Лекции по математической теории рассеяния для физиков.
Элементарная теория, резонансы,открытые резонаторы.

А.А.Арсеньев.

Введение.

Вниманию читателя предлагается элементарный учебник по математическим основам теории рассеяния, понимаемой в широком смысле: как теория возмущения операторов с непрерывным спектром. По принятой физиками терминологии предметом книги является теория двухчастичного рассеяния (теория рассеяния многих частиц и связанные с ней проблемы не рассматриваются совсем). Математическая теория рассеяния, понимаемая как теория возмущения операторов с непрерывным спектром, является составной частью многих физических теорий: теории парных столкновений и столкновений многих частиц, теории линейной реакции и коэффициентов переноса (теории Ландауэра-Буттикера), теории систем 2×2, теорий, объединенных общим названием модели атома Вигнера-Вайскопфа, и теорий, объединенных общим названием модели Паули-Фирца. Математическая теория рассеяния описывает рассеяние в волноводах. Теория дифракции также в значительной степени опирается на математическую теорию рассеяния.

Обычно для физиков знакомство с элементами математической теорией рассеяния (понятиями волнового оператора, матрицы рассеяния, уравнением Липмана -Швингера) происходит в начальном курсе квантовой механики, когда у преподавателя квантовой механики нет времени . Поэтому для физиков часто математическая теория рассеяния в лучшем случае оказывается вытесненной в упражнения и задачи для самостоятельного изучения. Предлагаемая книга предназначена помочь студенту в этом изучении. В предлагаемой книге подробно изложена элементарная математическая теория рассеяния в объеме, достаточном для понимания университетского курса квантовой механики, теории дифракции, теории непрерывного спектра. Для более подробного изучения математической теории рассеяния опытному читателю можно рекомендовать книги [6, 7, 8, 9].

Все выкладки и доказательства в предлагаемой книге проведены полностью, поэтому в книге много подробно проведенных выкладок. Автор старался быть внимательным, но читатель должен верить только собственному карандашу.

Книга предназначена для неискушенного читателя, который лишь в самых общих чертах недавно познакомился с основами функционального анализа. Достаточно знакомства с любым учебником функционального анализа, который содержит изложение теории Рисса-Шаудера и спектральной теоремы Неймана.

А.А.Арсньев.

a_arsenev@mail.ru

Оглавление

Глава 1

Вспомогательные сведения из функционального анализа.

Напомним некоторые факты из функционального анализа и принятые нами ранее обозначения (для справок можно обратиться к [22]). В основном мы используем стандартные обозначения, которые будут поясняться в процессе изложения. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве мы считаем линейным по *второму* аргументу. Комплексное сопряжение мы обозначаем символом $*$:

$$(a + ib)^* = a - ib.$$

Тем же символом $*$ мы обозначим гильбертово сопряжение. Банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из банахова (гильбертова) пространства $\mathcal{H}_1$ в банахово (гильбертово) пространство $\mathcal{H}_2$ мы обозначим символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$, банахово пространство всех компактных операторов из банахова (гильбертова) пространства $\mathcal{H}_1$ в банахово (гильбертово) пространство $\mathcal{H}_2$ мы обозначим символом $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$.

1.1 Полярное разложение оператора, операторы Гильберта-Шмидта и ядерные операторы.

Напомним определение банахова сопряжения.

Пусть $\mathcal{B}_i$, $i = 1$, 2 -банаховы пространства, $\mathcal{B}_i^\star$ -пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{B}_i$, $< \ f \ | \ \phi \ >_i$ -значение функционала $f \in \mathcal{B}_i^\star$ на элементе $\phi \in \mathcal{B}_i$, оператор

$$A \colon \mathcal{B}_1 \mapsto \mathcal{B}_2.$$

Оператор $A^\star$ определен соотношением:

$$A^\star\colon \mathcal{B}_2^\star \mapsto \mathcal{B}_1^\star \quad \forall (f \in \mathcal{B}_2^\star\,,\, \phi \in \mathcal{B}_1)\,,\, < A^\star f \ \mid\ \phi >_1 = < f \ \mid\ A\phi\ >_2\,.$$

В этом параграфе мы рассматриваем только ограниченные операторы,которые определены во всем пространстве.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(AB)^\star = B^\star A^\star,\\ &\forall(\lambda \in res(A))\ :\ R(\lambda\,,\,A)^\star = R(\lambda\,,\,A^\star).\end{aligned}$$

Напомним определение гильбертова сопряжения.

Пусть $\mathcal{H}_i\,,\, i = 1\,,\,2$ -гильбертовы пространства, $<\quad,\quad>_i$ -скалярное произведение в $\mathcal{H}_i$, оператор

$$A\colon \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2.$$

Оператор A^* определен соотношением:

$$A^*\colon \mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_1 \quad \forall(\psi \in \mathcal{H}_2\,,\, \phi \in \mathcal{H}_1)\,,\, < A^*\psi\,,\, \phi >_1 = < \psi\,,\, A\phi >_2\,.$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(AB)^* = B^*A^*,\\ &\forall(\lambda \in res(A))\ :\ R(\lambda\,,\,A)^* = R(\lambda^*\,,\,A^*).\end{aligned}$$

Полярное разложение оператора. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$. Тогда оператор $A^*A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1)$ и

$$\forall(f \in \mathcal{H}_1)\ :< f\,,\, A^*Af >_1 = < A^*Af\,,\, f >_1^* = \|Af\|_2^2 \geq 0. \tag{1.1}$$

Квадратичная форма (2.1) принимает действительные значения, поэтому порождающий по теореме Лакса эту квадратичную форму оператор A^*A самосопряжен. Так как квадратичная форма (2.1) неотрицательна, то оператор A^*A неотрицателен.

Положим по определению

$$|A| \overset{def}{=} (A^*A)^{1/2}\,. \tag{1.2}$$

Следующая теорема называется теоремой о полярном разложении (по поводу этого материала см. [22], 4.4.2-4.4.4. или любой учебник функционального анализа) оператора.

Теорема 1.1.1. *Оператор* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ *представим в виде:*

$$A = U|A|, \tag{1.3}$$

где самосопряженный неотрицательный оператор

$$|A| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1)$$

дается формулой (2.2), *а оператор*

$$U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

удовлетворяет условиям:

1. $\mathbf{Dom}(U) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|))$, $\mathbf{Im}(U) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A))$, $\mathbf{Ker}(U) = 0.$ (1.4)
2. $\forall f \in \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|)) : \ \|Uf\|_2^2 = \|f\|_1^2.$ (1.5)
3. $\exists U^{-1} \ : \ U^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) \mapsto \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|))).$ (1.6)

Доказательство. Из определения (2.2) следует, что

$$\forall (f \in \mathcal{H}_1) : \ < |A|f \, , \, |A|f >_1 = < f \, , \, A^*Af >_1 = \|Af\|_2^2.$$

Следовательно,

$$\forall (f \in \mathcal{H}_1) : \ \||A|f\|_1 = \|Af\|_2 \ , \ \mathbf{Ker}(|A|) = \mathbf{Ker}(A). \tag{1.7}$$

Оперделим оператор U , задав его график. Положим по определению

$$\mathbf{Gr}(U) := \{|A|f \oplus Af \mid f \in H\}. \tag{1.8}$$

Так как $Af = 0$ в том и только том случае, если $|A|f = 0$, равенство (2.8) корректно задает график оператора, который удовлетворяет условию

$$A = U|A|$$

и в силу (2.7) определенный равенством (2.8) оператор U удовлетворяет условиям теоремы (2.4)-(2.5) Так как последовательность $\{|A|f_n\}$ сходится в том и только том случае, если сходится последовательность $\{Af_n\}$, оператор U можно по непрерывности продолжить на замыкание множества $\mathbf{Im}(|A|)$, причем продолженный оператор удовлетворяет условию:

$$U(\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|))) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)). \tag{1.9}$$

В силу теоремы Банаха об обратном операторе отсюда следует третье утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 1.1.1. Опрератор U^{-1} не определен во всем пространстве $\mathcal{H}_2$. Пусть

$$P_A = \text{ортогональный проектор на пространство } \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) \subset \mathcal{H}_2. \tag{1.10}$$

Оператор $U^{-1}P_A$ определен на всем пространстве $\mathcal{H}_2$ и удовлетворяет условиям:

$$U^{-1}P_A A = |A| \ , \ \|U^{-1}P_A\| = 1. \tag{1.11}$$

Теорема 1.1.2. *Если A -компактный оператор, то оператор $|A|$ -компактный оператор.*

Доказательство. Если A компактный оператор, то оператор A^*A есть произведение двух компактных операторов и поэтому есть неотрицательный компактный самосопряженный оператор. Пусть

$$s_j(A)^2 : \ A^*Ae_j = s_j(A)^2 e_j \, , \, 0 \leq s_{(j+1)}(A) \leq s_j(A)$$

-система собственных значений и собственных функций оператора $A^\star A$. Из теоремы Гильберта-Шмидта следует, что

$$s_j(A) \to 0 \, , \, j \to \infty.$$

Из определения 2.2 следует равенство

$$|A|f = \sum_j s_j(A) < e_j \, , \, f > e_j. \tag{1.12}$$

Из этого равенства следует, что если оператор A компактен, то оператор $|A|$ -компактный оператор, так как он есть предел компактных (конечномерных) операторов в равномерной операторной топологии. Теорема доказана.

Определение 1.1.1. Расположенные в порядке убывания собственные значения оператора $|A|$ называются характеристическими числами (или s-числами) компактного оператора A.

Обычно характеристические числа оператора A обозначаются символом $s_j(A)$.

Теорема 1.1.3. *Для данного компактного оператора A существуют такие ортонормированные системы $\{e_j\} \subset \mathcal{H}_1$, $\{g_j\} \subset \mathcal{H}_2$, что оператор*

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

представим в виде

$$\forall (f \in \mathcal{H}_1) \; : \; Af = \sum_j s_j(A) < e_j \, , \, f >_1 g_j, \tag{1.13}$$

где $s_j(A)$ *-характеристические числа компактного оператора* A.

Доказательство. Справедливы равенства

$$Af = U|A|f = \sum_j s_j(A) < e_j \, , \, f > Ue_j, \tag{1.14}$$

где $\{e_j\} \in \mathcal{H}_1$ -ортонормированная система . Так как оператор

$$U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

изометричен на области значений оператора $|A|$, система

$$\{g_j\} = \{Ue_j\} \subset \mathcal{H}_2$$

-ортонормирована.

Представление компактного оператора A в виде (2.13) называется разложением Шмидта.

Операторы Гильберта-Шмидта.

Определение 1.1.2. Оператор

$$A \, : \, \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2$$

называется оператором Гильберта-Шмидта, если существуют такие полные ортонормированные системы

$$\{e_i\} \subset \mathcal{H}_1 \, , \, \{g_j\} \subset \mathcal{H}_2,$$

что

$$\|A|\mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)\|^2 \stackrel{def}{=} \sum_{i\,,j} | < g_j \, , \, Ae_i >_2 |^2 < \infty. \tag{1.15}$$

Из равенства

$$\sum_{i\,,j} | < g_j \, , \, Ae_i >_2 |^2 = \sum_i \|Ae_i\|_2^2 = \sum_j \|A^\star g_j\|_1^2 \tag{1.16}$$

следует, что если сумма в левой части (2.15) конечна для каких либо двух полных ортонормированных систем $\{e_i\} \subset \mathcal{H}_1$, $\{g_j\} \subset \mathcal{H}_2$, то она не зависит от выбора этих систем, конечна для любых полных ортонормированных систем и определяет норму на пространстве операторов Гильберта-Шмидта.

Непосредственно из определения (2.15) вытекает

Следствие 1.1.1. *Если оператор*

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

есть оператор Гильберта-Шмидта, то оператор

$$A^\star \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_1)$$

есть оператор Гильберта-Шмидта.

Определенная равенством (2.15) норма называется нормой Гильберта-Шмидта.

Если это не может вызвать недоразумений, в обозначении пространства операторов Гильберта-Шмидта мы будем опускать указание на пространства, в которых действуют операторы.

Лемма 1.1.1. *Оператор Гильберта-Шмидта компактен.*

Доказательство. Сохраняя введенные выше обозначения, положим

$$P_n w = \sum_{j \leq n} < g_j \, , \, w >_2 g_j .$$

Имеем:

$$\|Af - P_n Af\|^2 = \sum_{j>n} | < g_j \, , \, Af > |^2 < \left(\sum_{j>n} \|A^\star g_j\|_1^2 \right) \|f\|_1^2 .$$

Из этого неравенства следует, что каждый оператор Гильберта-Шмидта есть предел по норме компактных операторов и поэтому компактен.

Из (2.16) следует, что

$$\|A^\star | \mathcal{HS}\| = \|A|\mathcal{HS}\|. \tag{1.17}$$

Норма Гильберта-Шмидта порождается скалярным произведением

$$< A \, , \, B >_{HS} = \sum_j < Ae_j \, , \, Be_j >_2 \tag{1.18}$$

и удовлетворяет очевидному (произвольный вектор можно взять как вектор e_1) неравенству

$$\|A|\mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)\| \leq \|A|\mathcal{HS}\|. \tag{1.19}$$

Лемма 1.1.2. *Относительно скалярного произведения* (2.18) *пространство операторов Гильберта-Шмидта есть гильбертово пространство. Гильбертово пространство операторов Гильберта-Шмидта мы будем обозначать символом* $\mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$.

Доказательство. Если последовательность

$$\{A_n\} \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

фундаментальна по норме пространства $\mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$, то в силу неравенства (2.19) она фундаментальна в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ и поэтому

$$\exists A : \| (A - A_n) \mid \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)\| \to 0 \, , \, n \to \infty. \tag{1.20}$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ в неравенстве

$$\|A_n \mid \mathcal{HS}\|^2 = \sum_{1 \le j < \infty} \|A_n e_j\|^2 \le const.$$

мы получаем, что определенный равенством (2.20) оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$. Полнота пространства гильбертова пространства операторов Гильберта-Шмидта доказана. Предположив, что полная ортонормированная система $\{e_j\} \subset \mathcal{H}_1$ включает в себя систему собственных функций оператора $A^\star A$, мы в силу (2.16) получаем следующее выражение для нормы Гильберта-Шмидта оператор а A через характеристические числа оператора A:

$$\|A|\mathcal{HS}\|^2 = \sum_j s_j(A)^2. \tag{1.21}$$

Если пространство $\mathcal{H}_1$ -это $L^2(D_1 \, , \, \mu(dy))$, а пространство $\mathcal{H}_2$ -это $L^2(D_2 \, , \, \nu(dx))$, (области D_1 и D_2 могут лежать в пространства разных размерностей) то операторы Гильберта-Шмидта -это интегральные операторы

$$Af(x) = \int_{D_1} a(x \, , \, y) f(y) \mu(dy), \tag{1.22}$$

интегральное ядро которых удовлетворяет оценке

$$\int_{D_2 \times D_1} |a(x \, , \, y)|^2 \nu(dx) \mu(dy) < \infty. \tag{1.23}$$

Лемма 1.1.3. *Произведение оператора Гильберта-Шмидта и ограниченного оператора есть оператор Гильберта Шмидта:*

если

$A \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2) \, , \, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_1)$, *то* $AB \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_2) \, ,$ *если* $A \in$

$\mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_3)$, то $BA \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_3)$и справедливы неравенства:

$$\|AB|\mathcal{HS}\| \leq \|B\| \cdot \|A|\mathcal{HS}\| \, , \, \|BA|\mathcal{HS}\| \leq \|B\| \cdot \|A|\mathcal{HS}\|.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}&\|BAe_j\| \leq \|B\| \cdot \|Ae_j\|, \\ &| < g_i \, , \, ABe_j >_2 | = | < (AB)^\star g_i \, , \, e_j >_1 | = | < B^\star A^\star g_i \, , \, e_j >_1 |.\end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned}&\sum_j \|BAe_j\|^2 \leq \|B\|^2 \|A|HS\|^2, \\ &\sum_{i\,,j} | < g_i \, , \, ABe_j >_2 |^2 = \sum_i \|B^\star A^\star g_i\|^2 \leq \|B\|^2 \|A|HS\|^2.\end{aligned}$$

Ядерные операторы.

Определение 1.1.3. Оператор $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ называется *ядерным* оператором, если сходится ряд из его характеристических чисел:

$$\|A|Ncl\| \stackrel{def}{=} \sum_j s_j(A) < \infty. \tag{1.24}$$

Теорема 1.1.4. *Множество ядерных операторов $\mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ есть линейное подпространство в $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ и определенная равенством* (2.4) *функция $A \mapsto \|A \mid Ncl\|$ удовлетворяет условиям нормы:*

$$\begin{aligned}&\forall (A \, , \, B \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)) : \|zA \mid Ncl\| = |z| \|A \mid Ncl\|, \\ &\|A + B \mid Ncl\| \leq \|A \mid Ncl\| + \|B \mid Ncl\|.\end{aligned}$$

Относительно нормы (2.4) *пространство ядерных операторов есть банахово пространство. Банахово пространство всех ядерных операторов,действующих из пространства $\mathcal{H}_1$ в пространство $\mathcal{H}_2$, мы будем одозначать символом $\mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$.*

Доказательство. Однородность относительно умножеия на скаляр определенной правой частью равенства (2.24) функции очевидна. Докажем, что

$$(A \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2) \, , \, B \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)) \Rightarrow ((A + B) \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)).$$

Пусть $\{e_j\,,\, 1 \le j < \infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве $\mathcal{H}_1$. Из формулы (2.11) следует, что

$$|A + B| = U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)}(A + B),$$

поэтому

$$< e_j\,,\, |A + B|e_j >_1 = < e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)}(A + B)e_j >_1 =$$
$$< e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} A e_j >_1 + < e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} B e_j >_1 .$$

Далее имеем:

$$< e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} A e_j >_1 = < e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2}|A|^{1/2} e_j >_1 =$$
$$< (U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2})^* e_j\,,\, |A|^{1/2} e_j >_1,$$

следовательно,

$$\left| \sum_{1 \le j < \infty} < e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} A e_j >_1 \right| =$$
$$\left| \sum_{1 \le j < \infty} < (U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2})^* e_j\,,\, |A|^{1/2} e_j >_1 \right| =$$
$$\left| < (U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2})^*\,,\, |A|^{1/2} >_{HS} \right| \le$$
$$\|(U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2})^* \mid HS\| \cdot \||A|^{1/2} \mid HS\| \le$$
$$\||A|^{1/2} \mid HS\|^2 = \|A \mid Ncl\|.$$

Аналогично оценивается второе слагаемое. Отсюда следует, что

$$\|A + B \mid Ncl\| \le \|A \mid Ncl\| + \|B \mid Ncl\|.$$

Полнота пространства ядерных операторов относительно ядерной нормы следует из полноты пространства операторов Гильберта-ШШмидта и формулы

$$\|A \mid Ncl\| = \||A|^{1/2} \mid HS\|^2.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.1.5. *Оператор A ядерный в том и только том случае, если он есть произведение двух операторов Гильберта-Шмидта.*

Доказательство. Пусть оператор $A \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ ядерный. Используя полярное разложение оператора A (см. (2.3), стр. 11), мы получаем:

$$A = U|A| = U|A|^{1/2} \cdot |A|^{1/2},$$

где операторы $U|A|^{1/2} \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ и $|A|^{1/2} \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1)$ есть операторы Гильберта-Шмидта.

Пусть $A \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)\,,\, B \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_1)$. Докажем, что $AB \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_2)$. Из формулы (2.11) следует, что

$$|AB| = U_{AB}^{-1} P_{AB} AB,$$

где $U_{AB} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_2)$ - изометрический оператор, входящий в полярное разложение оператора AB. Пусть $\{e_j\,,\, 1 \leq j < \infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве $\mathcal{H}_0$. Имеем:

$$< e_j\,,\, |AB|e_j >_0 = < e_j\,,\, U^{-1} P_{AB} AB e_j >_0 = < A^\star (U^{-1} P_{AB})^\star e_j\,,\, B e_j >_1 .$$

Вспоминая определение скалярного произведения $\mathcal{HS}$ (см. (2.18), стр. 14), мы видим, что

$$\begin{aligned} \|AB|Ncl\| = \sum_{1 \leq j < \infty} < e_j\,,\, |AB|e_j >_0 = \\ < A^\star (U^{-1} P_{AB})^\star\,,\, B >_{\mathcal{HS}} \leq \|A|\mathcal{HS}\| \cdot \|B|\mathcal{HS}\| < \infty. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Теорема доказана.

Из теоремы (2.1.5) вытекает

Следствие 1.1.2. *Если оператор*

$$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

ядерный, то оператор

$$A^\star \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_1)$$

ядерный.

Оснащенные пространства. Познакомится с наиболее близкой нам трактовкой понятия оснащенного гильбертова пространства можно по монографии [18] или учебнику [22]. Если специально не оговорено другое, то основным пространством у нас будет гильбертово пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)\,,\, n = 1\,,\, 3$. В большинстве случаев возможно распространение результатов на случай, если основная область есть полупространство, волновод или слой. Мы рассматриваем функции со значениями в

$\mathbb{C}^1$, обобщения на случай функций со значениями в $\mathbb{C}^n$ (что соответствует обобщениям на случай систем уравнений) возможны, но специально рассматриваться не будут.

Для получения оценок резольвенты оператора Шредингера с помощью уравнения Липмана-Швингера часто применяется метод, который называется принципом предельного поглощения. Этого метод состоит в следующем. Строится оснащение исходного гильбертова пространства $\mathcal{H}\,:\,\mathcal{H}^+\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{H}^-$. Это оснащение подбирается так, чтобы получалась равномерная по $\epsilon>0$ оценка :

$$\|R(\lambda_0+i\epsilon\,,\,A)g|\mathcal{H}^-\|<C(\lambda_0)\|g|\mathcal{H}^+\|.$$

В соответствии с этим обычно строится такое оснащение исходного гильбертова пространства: $\mathcal{H}^+\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{H}^-$, что в метрике пространства $\mathcal{L}(\mathcal{H}^-\mapsto\mathcal{H}^+)$ резольвента возмущенного оператора имеет предел при стремлении спектрального параметра к точкам непрерывного спектра возмущенного оператора, и этот предел есть оператор в пространстве $\mathcal{H}^-$. Этот оператор не есть резольвента возмущенного оператора в пространстве $\mathcal{H}$, но с его помощью можно получить информацию о спектре возмущенного оператора и построить спектральную функцию возмущенного оператора. Выбор оснащения зависит от рассматриваемой задачи.

Напомним некоторые построения, связанные с теорией оснащенных гильбертовых пространств. Мы будем рассматривать оснащения пространства $\mathcal{H}$, которые имеют специальный вид.

Пусть

$$\rho\in C(\mathbb{R}^n)\,,\,\forall(x)\,;\,1\le\rho(x)<\infty\,, \tag{1.26}$$

$$\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx)\,,\,\mathcal{H}^\pm_\rho=L^2(\mathbb{R}^n\,,\,(\rho)^{\pm1}(x)dx) \tag{1.27}$$

Если потенциал быстро (экспоненциально) убывает, то удобно положить $\rho(x)=\exp(b|x|)\,,\,b>0$ и рассматривать оснащение

$$\mathcal{H}^+_b\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{H}^-_b,$$

где

$$\|f\mid\mathcal{H}^\pm_b\|^2=\int|f(x)|^2\exp(\pm b|x|)dx. \tag{1.28}$$

Интегрирование ведется по всему пространству. Очевидно,

$$\begin{aligned}\forall\,(a>b\ge0)\,:&\mathcal{H}^+_a\subset\mathcal{H}^+_b\subset\mathcal{H}\,,\,\|\cdot\mid\mathcal{H}^+_a\|\ge\|\cdot\mid\mathcal{H}^+_b\|\,\ge\|\cdot\mid\mathcal{H}\|\\ &\mathcal{H}^-_b\subset\mathcal{H}^-_a\,,\,\|\cdot\mid\mathcal{H}^-_a\|\le\|\cdot\mid\mathcal{H}^-_b\|\,,\le\|\cdot\mid\mathcal{H}\|.\end{aligned}$$

Если это ясно из контекста, то в дальнейшем мы не будем уточнять, в каком именно гильбертовом пространстве берется скалярное произведение. Параметр $b > 0$ -определяется условиями задачи. С помощью оснащения $\mathcal{H}_b^{\pm}$ для быстро (экспоненциально) убывающего потенциала мы докажем аналитичность матрицы рассеяния в окрестности действительной оси.

В дальнейшем мы будем часто использовать обозначение

$$\mathcal{B}_{\pm,\pm} \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^{\pm} \mapsto \mathcal{H}_b^{\pm}), \tag{1.29}$$

(последовательность знаков в нижнем индексе в левой части равенства совпадает с последовательностью знаков в верхних индексах в правой части равенства.)

Если потенциал на бесконечности убывает медленно (как степень $|x|$) то удобнее брать другое оснащение, получающееся при $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{\sigma/2}$. Положим

$$\mathcal{H}_\rho^{\pm} = L^2(\mathbb{R}^n\,,\,(1+|x|^2)^{\pm\sigma/2}dx).$$

Пространство C_0^∞ плотно в $\mathcal{H}_\rho^{\pm}$ и $\mathcal{H}$ по метрике соответствующих пространств.

Определение 1.1.4. *Фундаментальное пространство* -это любое линейное пространство $\mathcal{L}$, плотное в каждом пространстве $\mathcal{H}_\rho^{\pm}$, $\mathcal{H}$.

Отображения

$$U_{\pm}\ :\mathcal{H}_b^{\pm} \ni f(x) \mapsto f(x)\exp(\mp b|x|/2) \in \mathcal{H},$$
$$U_{\pm}\ :\mathcal{H}_\sigma^{\pm} \ni f(x) \mapsto f(x)(1+|x|)^{\mp\sigma/2} \in \mathcal{H}$$

унитарно отображают $\mathcal{H}_b^{\pm}$, $\mathcal{H}_\sigma^{\pm}$ на $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$. Это утверждение полезно иметь ввиду при построении двойственных к $\mathcal{H}_b^{\pm}$, $\mathcal{H}_\sigma^{\pm}$ пространств.

Скалярное произведение $<\ \ ,\ \ >$ в $\mathcal{H}$ мы будем считать по непрерывности продолженным на

$$\mathcal{H}_\rho^{\pm} \otimes \mathcal{H}_\rho^{\mp}.$$

Банахово и гильбертово сопряжение. Положим по определению

$$< f \ | \ g > \stackrel{def}{=} \int f(x)g(x)dx. \tag{1.30}$$

Заметим, что *комплексного сопряжения в* (2.30) *нет* и форма $< f \ | \ g >$ *линейна* по каждому аргументу.

Очевидна

Лемма 1.1.4. *Билинейная форма* (2.30) *и скалярное произведение* $<\ ,\ >$ *непрерывны на* $\mathcal{H}_\rho^\pm \otimes \mathcal{H}_\rho^\mp$ *:*

$$|< f \mid g >| \leq \|f|\mathcal{H}_\rho^-\| \cdot \|g|\mathcal{H}_\rho^+\|.$$

и форма (2.30) *приводит пространства* $\mathcal{H}_\rho^\pm$ *в отделимую двойственность [38].*

Замечание 1.1.2. Если K -интегральный оператор в $\mathcal{H}$ с ядром $k(\lambda\,,\,x\,,\,y)$, то оператор, сопряженный оператору K относительно формы $<\ \mid\ >$, -это интегральный оператор с ядром $k(\lambda\,,\,y\,,\,x)$ (комплексного сопряжения у ядра и у λ нет).

Замечание 1.1.3. Скалярное произведение часто удобно обобщить: по определению полагать

$$\forall (f \in \mathcal{H}_\rho^\pm\,,\, g \in \mathcal{H}_\rho^\mp) :< f\,,\, g >=< f^* \mid g > \tag{1.31}$$

Рассмотрим банахово сопряженное к $\mathcal{H}_\rho^-$ пространство $(\mathcal{H}_\rho^-)^\star$, т.е. банахово пространство всех линейных непрерывных (в метрике $\mathcal{H}_\rho^-$) функционалов на $\mathcal{H}_\rho^-$.

Нам будет удобно описать пространство $(\mathcal{H}_\rho^-)^\star$ с помощью формы (2.30)

Лемма 1.1.5. *Существует взаимно однозначное линейное изометрическое отображение*

$$J_+ \,:\, (\mathcal{H}_\rho^-)^\star \mapsto \mathcal{H}_\rho^+ \tag{1.32}$$

которое функционалу $l \in (\mathcal{H}_\rho^-)^\star$ *ставит в соответствие такой вектор* $J_+(l) \in \mathcal{H}_\rho^+$*, что*

$$\forall (f \in \mathcal{H}_\rho^-) \,:\, l(f) =< J_+(l)|f >= \int J_+(l)(x) f(x) dx, \tag{1.33}$$

$$\|l|(\mathcal{H}_\rho^-)^\star\| = \|J_+(l)|\mathcal{H}_\rho^+\|. \tag{1.34}$$

Доказательство. Пусть $l \in (\mathcal{H}_\rho^-)^\star$, l_H -вектор из гильбертова пространства $\mathcal{H}_\rho^-$, который по теореме М.Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве удовлетворяет условию

$$\forall (f \in \mathcal{H}_\rho^-) \,:\, l(f) =< l_H\,,\, f >= \int l_H(x)^* f(x) (\rho(x))^{-1} dx.$$

Положим

$$J_+(l)(x) = l_H(x)^*(x)(\rho(x))^{-1}.$$

Все требования леммы выполнены. Отображение J_+ линейно и

$$\|l \mid (\mathcal{H}_\rho^-)^\star\| = \|l_H \mid \mathcal{H}_\rho^-\| = \|J_+(l) \mid \mathcal{H}_\rho^+\|,$$

Аналогично определяется отображение

$$J_- \,:\, (\mathcal{H}_\rho^+)^\star \mapsto \mathcal{H}_\rho^-, \tag{1.35}$$

Таким образом, линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{H}_\rho^\pm$ можно представить либо на основе теоремы М.Рисса через скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_\rho^\pm$, либо через форму (2.30). По-существу, эти представления эквивалентны.

Пусть отображение

$$T \,:\, \mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-$$

компактно. Тогда по теореме Шаудера банахово сопряженное отображение

$$T^\star \,:\, (\mathcal{H}_\rho^-)^\star \mapsto (\mathcal{H}_\rho^-)^\star$$

компактно. Пусть $T_J^\star$ -отображение, которое делает коммутативной диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{H}_\rho^-)^\star \arrow[r, "T^\star"] \arrow[d, "J_+"'] & (\mathcal{H}_\rho^-)^\star \arrow[d, "J_+"] \\
\mathcal{H}_\rho^+ \arrow[r, "T_J^\star"] & \mathcal{H}_\rho^+
\end{tikzcd}$$

Очевидна

Лемма 1.1.6. *Если отображение T компактно, отображение $T_J^\star$ компактно.*

Мы будем использовать следующее утверждение.

Лемма 1.1.7. *Пусть оператор*

$$A(\lambda) \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$$

аналитичен по λ в области D. Тогда банахово сопряженный оператор

$$A(\lambda)^\star \in \mathcal{L}(B_2^\star \mapsto B_1^\star).$$

аналитичен по λ в области D.

Замечание 1.1.4. Гильбертово сопряженный оператор $A(\lambda)^*$*не аналитичен* в области D.

Лемма 1.1.8. *1. Пусть J- -интегральный оператор с интегральным ядром $J(x\,,\,y)$ в $L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx) = \mathcal{H}$:*

$$Jf(x) = \int J(x\,,\,y) f(y) dy.$$

Сопряженный относительно формы (2.30) *оператор $J^\star$ -интегральный оператор с ядром $J(x\,,\,y)^\star$,*

$$J^\star f(y) = \int J(x\,,\,y)^\star f(x) dx,$$

2. Если интегральное ядро $J(x\,,\,y)$ оператора J удовлетворяет оценке

$$\int |J(x\,,\,y)|^2 \Big(\rho(y)/\rho(x)\Big) dx dy < \infty,$$

то в пространстве $\mathcal{H}^-_\rho = L^2(\mathbb{R}^n\,,\,(\rho(y))^{-1} dy)$ оператор J -оператор Гильберта-Шмидта

$$J \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}^-_\rho \mapsto \mathcal{H}^-_\rho)$$

и

$$\|J|\mathcal{HS}\|^2 = \int |J(x\,,\,y)|^2 \Big(\rho(y)/\rho(x)\Big) dx dy.$$

Доказательство. Доказываем второе утверждение теоремы. Имеем:

$$Jf(x) = \int J(x\,,\,y) f(y) dy = \int \Big(J(x\,,\,y) \cdot \rho(y)\Big) \frac{f(y)}{\rho(y)} dy.$$

Отсюда следует, что если мы будем рассматривать оператор J как интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n\,,\,(\rho(y))^{-1} dy)$, то его интегральное ядро будет равно

$$a(x\,,\,y) = J(x\,,\,y) \cdot \rho(y).$$

Но тогда условие (2.23) (см. стр. 15) даст

$$\int |J(x\,,\,y)|^2 \Big(\rho(y)/\rho(x)\Big) dx dy < \infty.$$

Интеграл от функций со значениями в банаховом пространстве. Пусть Ω -компактное топологическое пространство, точки пространства Ω мы обозначим через $\omega \in \Omega$, $\mu(d\omega)$ - пополненная борелевская мера на Ω , $\mu(\Omega) < \infty$, B -рефлексивное банахово пространство, $B^\star$ -его сопряженное.

Определение 1.1.5. Отображение

$$u \,:\, \Omega \mapsto B$$

мы будем называть интегрируемым в слабой топологии, если

$$\forall (f \in B^\star) \,,\, \exists (\int_\Omega f(u(\omega))\mu(d\omega) < \infty),$$

вектор $w \in B$ мы будем называть интегралом отображения u,

$$w = \int_\Omega u(\omega)\mu(d\omega),$$

если

$$\forall (f \in B^\star) \,:\, f(w) = \int_\Omega f(u(\omega))\mu(d\omega).$$

Диагонализация. Пусть $\mathcal{H}$ -произвольное гильбертово пространство, A -самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, $\phi(\lambda)$ -ограниченная борелевская функция на спектре оператора A. Из спектральной теоремы Дж. Неймана следует, что существует такое (не зависящее от $\phi(\lambda)$) гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_0 = \oplus \sum_\alpha L^2(d\mu_\alpha(\lambda)) \,,\; \lambda \in \sigma(A),$$

и такое унитарное отображение

$$U_0 \,:\, \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_0,$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\phi(A)} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle U_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U_0} \\ \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{H}_0 \end{array}$$

коммутативна, причем в каждом пространстве $L^2(d\mu_\alpha(\lambda))$ оператор ϕ действует как оператор умножения на функцию $\phi(\lambda)$. Отображение U_0 в некотором смысле полностью характеризует оператор A.

В теории рассеяния часто используется несколько несколько другой вариант этой конструкции (см. [16], [27], [28], приложение Л.Гординга к книге [60]), который описывает большое число рассматриваемых в теории рассеяния задач.

Рассматривается компактное топологическое пространство Ω (в рассматриваемых нами приложениях пространство Ω -это единичная сфера, в рассматриваемых нами приложениях в пространстве Ω определена еще и инволюция $\omega \mapsto -\omega$) и пополненная борелевская мера $d\omega$. Далее рассматривается гильбертово пространство $L^2(\Omega\,,\,d\omega)$ со скалярным произведением

$$(f^*\,,\,g)_\Omega = \int\limits_\Omega f(\omega)g(\omega)d\omega,$$

нормой

$$\|\quad\|_\Omega^2 = (\;,\;)_\Omega.$$

Затем строится пространство $C_0(\sigma_{ac}(A)\,,\,L^2(\Omega\,,\,d\omega))$ всех непрерывных функций на $\sigma_{ac}(A)$ с компактными носителями и значениями в $L^2(\Omega\,,\,d\omega)$. Пространство

$$\mathcal{H}_d \equiv L^2(\sigma_{ac}(A) \otimes \Omega\,,\,d\lambda d\omega)$$

-это пополнение $C_0(\sigma_{ac}(A)\,,\,L^2(\Omega\,,\,d\omega))$ по норме

$$\|f \mid \mathcal{H}_d\|^2 = \int\limits_{\sigma_{ac}(A)} \|f(\lambda\,,\,\cdot)\|_\Omega^2 d\lambda.$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}_d$ мы обозначим символом $<,\quad,\quad>_d$, пространство $\mathcal{H}_d$ мы будем называть *диагонализующим* пространством для оператора A.

Определение 1.1.6. Преобразование

$$U_d\ : \mathcal{H}_{ac} \ni f(x) \mapsto U_d f(\lambda\,,\,\omega) \in \mathcal{H}_d \equiv L^2(\sigma_{ac}(A) \otimes \Omega\,,\,d\lambda d\omega)$$

мы называем диагонализующим для оператора A_{ac}, если выполнено равенство Парсеваля

$$\tag{1.36}$$

1. $$\forall (f \in \mathcal{H}_{ac}\,,\,g \in \mathcal{H}_{ac})\ :< f\,,\,g >=< U_d f\,,\,U_d g >_d, \tag{1.37}$$

и

2. $$\forall (f \in \mathcal{H}_{ac}\,,\,\phi \in \mathcal{B}or(\sigma_{ac}(A))\ :\ U_d(\phi(A)f)(\lambda\,,\,\omega) = \phi(\lambda)U_d(f)(\lambda\,,\,\omega). \tag{1.38}$$

Мы не требуем, чтобы для всех λ размерность области значений преобразования $U_d(\lambda\,,\,\cdot)$ была бы постоянна, и кратность спектра оператора A в рассматриваемых нами задачах роли не играет.

В рассматриваемой ситуации мы будем говорить, что пространство $\mathcal{H}_d$ и оператор U_d *диагонализуют* оператор A, а про оператор $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_d \mapsto \mathcal{H}_d)$ мы будем говорить, что оператор B действует в *диагональном представлении оператора* A.

В рассмотренных нами задачах пространство $\mathcal{H}$ есть $L^2(\mathbb{R}^n)$, а оператор U_d на финитных функциях в $\mathbb{R}^n$ задается интегральным ядром:

$$(U_d f)(\lambda\,,\,\omega) = \int e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) f(x) dx =< e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,|\,f(\,\cdot\,) > . \qquad (1.39)$$

Обратим внимание на то, что в формуле (2.39) коэффициенты Фурье определены через $e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)$, а не через $e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)^*$: нам так удобнее рассматривать аналитическое продолжение по λ обобщенных коэффициентов Фурье U_d.

Если преобразование

$$U_d(\lambda)\colon f \mapsto U_d f(\lambda\,,\,\omega)$$

диагонализует оператор A_0 и $\phi(\lambda)$ монотонна, то преобразование

$$U_d(\phi^{-1}(\lambda))\colon f \mapsto U_d f(\phi^{-1}(\lambda)\,,\,\omega)\sqrt{\left|\frac{d\phi^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right|}$$

диагонализует оператор $\phi(A_0)$.

В рассматриваемых нами приложениях тривиально устанавливается, что отображения

$$[a\,,\,b] \otimes \Omega \mapsto e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)$$

в слабой топологии соответствующих пространств непрерывны (и поэтому интегрируемы по $d\lambda \otimes d\omega$) на любом компакте $[a\,,\,b] \otimes \Omega$, и на этом факте мы специально останавливаться не будем.

Из равенства

$$\forall (f \in \mathcal{H}_{ac}) \; : \; U_d \phi(A) f(\lambda\,,\,\omega) = \phi(\lambda) U_d f(\lambda\,,\,\omega)$$

следует, что функция $e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ в (2.39) удовлетворяет уравнению

$$A e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \lambda e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega).$$

Можно показать, что если точка λ -это точка непрерывного спектра оператора A, то

$$\text{п.в. по мере} \quad d\lambda d\omega \; : \; e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \notin L^2(D\,,\,dx) \; , \; e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \in \mathcal{H}_b^-,$$

поэтому диагонализация -в общем случае это разложение по "обобщенным собственным функциям" оператора A (см. [18, 19, 20, 43]), однако в теории рассеяния задача разложения по обобщенным собственным функциям имеет специфику.

Из формулы Стоуна (по поводу спектральной функции и формулы Стоуна см. [22], теорема 4.5.2 или любой учебник функционального анализа) вытекает

Лемма 1.1.9. *Если $[a\,,\,b] \subset \sigma(A)_{ac}\,,\ g\,,\ f \in \mathcal{H}_{ac}$, и U_d -диагонализующее преобразование для A_{ac}, то спектральная функция оператора A_{ac} вычисляется по формуле*

$$< g\,,\,(E(b\,,\,A) - E(a\,,\,A))f >= \int\limits_{a<\lambda<b} < U_d g(\lambda\,,\,\cdot)\,,\,U_d f(\lambda\,,\cdot) >_\Omega d\lambda. \quad (1.40)$$

Без ограничения общности предполагается, что точки a и b -точки непрерывности спектральной функции $E(\lambda\,,\,A_{ac})$. Таким образом, квадратичная форма спектральной функции $E(\lambda\,,\,A_{ac})$ оператора A_{ac} просто связана с квадратичной формой диагонализующего преобразования U_d (см. формулы (2.67) и (2.68)). Но операторы $E(\lambda\,,\,A_{ac})$ и U_d действуют в разных пространствах: спектральная функция -проектор в исходном пространстве $\mathcal{H}$, а диагонализующее преобразование действует из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_d$.

Ниже мы с помощью уравнения Липмана-Швингера построим функции $e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$.

Остановимся на задаче вычисления функции $f(x)$ по $U_d f(\lambda\,,\,\omega)$.

Из (2.37) следует, что если мы будем рассматривать оператор U_d как оператор из $\mathcal{H}_{ac}$ в $\mathcal{H}_d$, то мы будем иметь: $\mathbf{Ker}(U_d) = 0$, поэтому

$$\exists((U_d)^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathbf{Im}(U_d) \mapsto \mathcal{H}_{ac}).$$

Из (2.37) следует

Лемма 1.1.10. *Если $\{g_n\}$ -полная ортонормированная система в $\mathcal{H}_{ac}$, то*

$$\forall (f \in \mathcal{H}_{ac})\ :\ f = \sum_n < U_d(g_n)\,,\,U_d(f) >_d g_n. \quad (1.41)$$

В том случае,[] если диагонализующее преобразование дается формулой (2.39), возможен и иной подход к построению оператора $(U_d)^{-1}$.

Лемма 1.1.11. *Если определяющая скалярное произведение в гильбертовом пространстве инволюция задается комплексным сопряжением:*

$$f(x) \mapsto f(x)^*,$$

то из равенства Парсеваля следует, что обратный оператор

$$U_d^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_d \mapsto \mathcal{H}_{ac})$$

в пространстве $\mathcal{H}_d$ задается формулой

$$f(x) = \int\limits_{\sigma_{ac}\otimes\Omega} e_d^*(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)(U_d f)(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega.$$

В самом деле, имеем:

$$\int f^*(x)g(x)dx = \int (U_d f)(\lambda\,,\,\omega)^*(U_d g)(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega =$$
$$\int (U_d f)(\lambda\,,\,\omega)^* \int e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)g(x)dxd\lambda d\omega.$$

Приравнивая множители при $g(x)$, и предполагая, что перемена порядка интегрирования возможна, получаем:

$$f^*(x) = \int (U_d f)^*(\lambda\,,\,\omega)e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega,$$
$$f(x) = \int (U_d f)(\lambda\,,\,\omega)e_d^*(x\,,\,\lambda\,,\,\omega))d\lambda d\omega. \tag{1.42}$$

Если инволюция задается более сложным образом, то и формула обращения приобретает более сложный вид.

Из (2.42) и (2.40) вытекает

Следствие 1.1.3. *Если оператор U_d^{-1} в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H}_d \mapsto \mathcal{H}_{ac})$ дается формулой* (2.42), *то спектральная функция вычисляется по формуле*

$$(E(b\,,\,A) - E(a\,,\,A))f(x) = \int\limits_{(a<\lambda<b)\otimes\Omega} e_d^*(x\,,\,\lambda\,,\,\omega))U_d f(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega. \tag{1.43}$$

Подробное доказательство формул обращения проводится в каждом случае отдельно, мы не всегда будем останавливаться на этом подробно, поскольку рассуждения во всех случаях стандартны.

Диагонализующее преобразование для оператора Лапласа. Рассмотрим принципиально важный для дальнейшего пример. Построим диагонализующие преобразования для самосопряженного расширения оператора Лапласа, заданного на гладких функциях в трехмерном евклидовом пространстве и на прямой. Напомним, что преобразование Фурье мы определили формулой

$$\widehat{f}(\xi) = \int \exp(-i\xi x) f(x) dx. \tag{1.44}$$

В трехмерном случае имеем:

$$< f\,,\,(-\Delta) f >= (2\pi)^{-3} \int |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$\frac{1}{2}(2\pi)^{-3} \int_0^\infty \lambda \left(\int\limits_{|\omega|=1} \lambda^{1/2} |\widehat{f}(\sqrt{\lambda}\omega)|^2 d\omega \right) d\lambda.$$

Отсда следует, что

$$\forall (\phi \in \mathcal{B}or) \,:< f\,,\,\phi(-\Delta) f >= (2\pi)^{-3} \int \phi(|\xi|^2) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$\frac{1}{2}(2\pi)^{-3} \int_0^\infty \phi(\lambda) \left(\int\limits_{|\omega|=1} \lambda^{1/2} |\widehat{f}(\sqrt{\lambda}\omega)|^2 d\omega \right) d\lambda.$$

В рассматриваем примере

$A = A_0 = -\Delta\,,\, \mathbf{Dom}(A_0) = H^2(\mathbb{R}^3)\,,\, \mathcal{H}_{ac} = L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)\,,\, \sigma_{ac}(A_0) = [0\,,\,\infty)$,
Ω – единичная сфера с обычной мерой, $\omega \in \mathbb{R}^3\,,\ |\omega| = 1$,

и инволюцией

$$\omega \mapsto -\omega, \tag{1.45}$$

$$U_d = U_d^0\,:\, f(x) \mapsto c(\lambda)\widehat{f}(\sqrt{\lambda}\omega)\,,\, c(\lambda) = (4(\pi^{3/2}))^{-1}\lambda^{1/4}, \tag{1.46}$$

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = c(\lambda)\exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}). \tag{1.47}$$

Полученный результат сформулируем как теорему.

Теорема 1.1.6. *Преобразование* (2.46) *диагонализует оператор Лапласа в* $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Преобразование (2.45) может быть представлено как композиция преобразований:

$$L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx) \overset{F}{\longmapsto} L^2(\mathbb{R}^3\,,\,(2\pi)^{-3}d\xi) \overset{Z}{\longmapsto} L^2((0\,,\,\infty)\otimes\Omega; d\lambda d\omega), \tag{1.48}$$

где F -преобразование Фурье и Z - преобразование, порожденное заменой переменных в определенном интеграле:

$$Z\widehat{f}(\xi) = c(\lambda)\widehat{f}(\sqrt{\lambda}\omega)\,,\ \xi^2 = \lambda, \tag{1.49}$$

поэтому диагонализующее преобразование мы часто будем отождествлять с преобразованием Фурье. Заметим, что в рассматриваемом случае формула обращения (2.42) может быть записана в виде

$$f(x) = \int (U_d f)(\lambda\,,\,\omega) e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,-\omega) d\lambda d\omega. \tag{1.50}$$

Диагонализующее преобразование не единственно: например, в формуле (2.44) мы можем определить преобразование Фурье через экспоненту со знаком $+$.

Аналогично, в $L^2(\mathbb{R}^1)$ имеем:

$$< f\,,\, D^2 f >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi =$$
$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} \lambda \left(|\widehat{f}(-\sqrt{\lambda})|^2 + |\widehat{f}(\sqrt{\lambda})|^2 \right) \lambda^{-1/2} d\lambda.$$

В рассматриваемом случае пространство Ω состоит из двух точек: $\Omega = \{+1\,,\,-1\}$, $d\omega-$ считающая мера. Инволюция $-$в пространстве Ω определена равенствами $-(+1) = -1\,,\ -(-1) = +1$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1.1.7. *Диагонализующее преобразование U_d^0 для оператора Лапласа на прямой задается формулами:*

$$e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = c(\lambda)\exp(-i\omega x\sqrt{\lambda})\,,\ c(\lambda) = (4\pi\sqrt{\lambda})^{-1/2}, \tag{1.51}$$
$$U_d^0 f(\lambda,\omega) = \int e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) f(x) dx. \tag{1.52}$$

Обратное преобразование дается формулой

$$f(x) = \sum_{\omega} \int\limits_0^{\infty} e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,-\omega) U_d^0 f(\lambda,\omega) d\lambda. \tag{1.53}$$

Мы видим, что в рассмотренных примерах диагонализующее преобразование лишь заменой переменных отличается от классического преобразования Фурье.

Пусть преобразование

$$f \mapsto U_d^0(f)(\lambda\,,\,\omega)$$

диагонализует оператор A_0, для простоты предположим, что спектр оператора A_0 , $\sigma(A_0) = [a\,,\,b]$ абсолютно непрерывен, пусть $\phi(\lambda)$ -монотонная и гладкая функция на спектре оператора A_0 , $a' = \min(\phi(a)\,,\,\phi(b))$, $b' = \max(\phi(a)\,,\,\phi(b))$. Ясно, что преобразование

$$f \mapsto \widetilde{U}_d^0(f)(\mu\,,\,\omega) = \left|\frac{d\phi^{-1}(\mu)}{d\mu}\right|^{1/2} U_d^0(f)(\phi^{-1}(\mu)\,,\,\omega), \quad a' < \mu < b',$$

унитарно и диагонализует оператор $\phi(A_0)$.

Если оператор K коммутирует с оператором A_0 и в диагональном представлении оператора A_0 задается интегральным ядром

$$\begin{aligned} &\lambda \mapsto K(\lambda\,,\,\omega\,,\,\omega'), \\ &< f\,,\,Kg >= \int_a^b < U_d^0(f)(\lambda)\,,\,K(\lambda)U_d^0(g)(\lambda) >_\Omega d\lambda, \end{aligned}$$

то в диагональном представлении оператора $\phi(A_0)$ оператор K будет задаваться формулой

$$< f\,,\,Kg >= \int_{a'}^{b'} < \widetilde{U}_d^0(f)(\mu)\,,\,K(\phi^{-1}(\mu))\widetilde{U}_d^0(g)(\mu) >_\Omega d\mu.$$

Несколько замечаний. Пусть на множестве $[0\,,\,\infty) \otimes \Omega$ задана функция $v(\lambda\,,\,\omega)$:

$$(\lambda \otimes \omega) \mapsto v(\lambda\,,\,\omega)$$

Фиксируем произвольно точку $\lambda_0 \in [0,\,,\,\infty)$. Функции $v(\lambda\,,\,\omega)$ будет соответствовать заданная на множестве Ω функция

$$\omega \mapsto v(\lambda_0\,,\,\omega).$$

Данная конструкция обратима: если каждому $\lambda_0 \in [0,\,,\,\infty)$ поставлена в соответствие заданная на множестве Ω функция $v(\lambda_0\,,\,\omega)$, то на множестве $[0\,,\,\infty) \otimes \Omega$ мы можем задать функцию

$$(\lambda \otimes \omega) \mapsto v(\lambda\,,\,\omega).$$

Мы видим, что понятие функции двух переменных эквивалентно понятию отображения, область значений которого есть множество функций.

Мы неоднократно будем пользоваться этим обстоятельством: функцию двух переменных $f(\lambda\,,\,\omega)$ мы будем рассматривать как функцию от переменной λ со значениями в $L^2(\Omega\,,\,d\omega)$. В этом случае мы будем обозначать ее значения через $f(\lambda)$.

Пусть $\mathcal{D}$ -область в $\mathbb{R}^n$, гильбертово прстранство $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{D}\,,\,d\mu)$, функции

$$\begin{aligned}&[a\,,\,b] \ni \lambda \mapsto \phi(\cdot\,,\,\lambda) \in \mathcal{H},\\&[a\,,\,b] \ni \lambda \mapsto K(\cdot\,,\,\lambda) \in L^2(\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}\,,\,d\mu\otimes d\mu)\end{aligned}$$

непрерывны.

Рассмотрим уравнение

$$y(t\,,\,\lambda) = \phi(t\,,\,\lambda) + \int\limits_D K(t\,,\,s\,,\,\lambda)y(s\,,\,\lambda)\mu(ds). \tag{1.54}$$

Лемма 1.1.12. *1. Если решение $y(t\,,\,\lambda)$ уравнения* (2.54) *существует при всех $\lambda \in [a\,,\,b]$, то оно непрерывно по λ в метрике $\mathcal{H}$.*

2. Если функция

$$\lambda \mapsto \phi(\cdot\,,\,\lambda) + \int\limits_D K(\cdot\,,\,s\,,\,\lambda)y(s\,,\,\lambda_0)\mu(ds)$$

непрерывно дифференцируема в $\mathcal{H}$:

$$\exists\psi(\cdot\,,\,\lambda) = \Big(\frac{d\phi(\cdot\,\lambda)}{d\lambda} + \int\limits_D \frac{dK(\cdot\,,\,s\,,\,\lambda)}{d\lambda}y(s\,,\,\lambda_0)\mu(ds)\Big) \in \mathcal{H},$$

то решение уравнения (2.54) *в точке λ_0 дифференцируемо по λ в метрике $\mathcal{H}$ и производная есть решение уравнения:*

$$\frac{dy(t\,,\,\lambda)}{d\lambda} = \psi(t\,,\,\lambda) + \int\limits_D K(t\,,\,s\,,\,\lambda)\frac{dy(s\,,\,\lambda)}{d\lambda}\mu(ds). \tag{1.55}$$

при $\lambda = \lambda_0$

Абсолютно непрерывный и сингулярный спектр оператора. Пусть $\mathcal{H}$ -сепарабельное гильбертово пространство, A -самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, $E(\lambda\,,\,A)$ -спектральная функция оператора A. Мы будем считать, что функция $E(\lambda\,,\,A)$ доопределена нулем на множество $\{\lambda < \inf\sigma(A)\}$ и доопределена как $E(\sup\{\sigma(A)\} + 0\,,\,A)$ на множество $\{\lambda >$

$\sup\{\sigma(A)\}\}$ (если эти множества не пусты).В дальнейшем по умолчанию все интегалы от спектральной функции без указания пределов интегрирования берутся от $-\infty$ до $+\infty$.

Пусть $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}^1$ -произвольный отрезок, $\mathcal{B}or([a\,,\,b])$ алгебра все борелевских подмножеств отрезка $[a\,,\,b]$. Каждому множеству $m\in\mathcal{B}or([a\,,\,b])$ поставим в соответствие задаваемый квадратичной формой проектор:

$$\forall(\phi\in H)\,:\,\mathcal{B}or([a\,,\,b])\ni m\mapsto<\phi\,,\,P(m)\phi>= \int\mathbb{I}(m\mid\lambda)d_\lambda<\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\phi>\,. \tag{1.56}$$

Каждому элементу $\phi\in\mathcal{H}$ соответствует борелевская мера на отрезке $[a\,,\,b]$:

$$\mu(\phi\mid\cdot\,)\,:\,\mathcal{B}or[a\,,\,b])\mapsto\mu(\phi\mid m)=<\phi\,,\,P(m)\phi>\,. \tag{1.57}$$

Если A -компактный оператор, то

$$\mu(\phi\mid m)=\sum_{\lambda_j\in m}|\phi_j|^2,$$

где λ_j -собственные значения оператора A, ϕ_j -коэффициенты Фурье по собственным функциям оператора A.

Если $A=-\Delta$, то

$$\mu(\phi\mid m)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\xi^2\in m}|F\phi(\xi)|^2d\xi.$$

Все нужные нам сведения об абсолютно непрерывном и сингулярном подпространстве оператора A собраны в

Теорема 1.1.8. *Пространство $\mathcal{H}$ есть прямая сумма двух пространств:*

$$\mathcal{H}=\mathcal{A}_{ac}\oplus\mathcal{A}_s. \tag{1.58}$$

Если $\phi\in\mathcal{A}_{ac}$, то определенная равенством (2.57) мера $\mu(\phi\mid\cdot)$ на любом отрезке $[a\,,\,b]$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^1$. Если $\phi\in\mathcal{A}_s$, то определенная равенством (2.57) мера $\mu(\phi\mid\cdot)$ на любом отрезке $[a\,,\,b]$ сингулярна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^1$. Разложение (2.58) приводит оператор A: если f -любая ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}^1$, то

$$f(A)\mathcal{A}_{ac}\subset\mathcal{A}_{ac}\,,\;f(A)\mathcal{A}_s\subset\mathcal{A}_s. \tag{1.59}$$

Доказательство. Обозначим символом $|m|$ меру Лебега множества $m \in \mathcal{B}or([a\,,\,b])$. Напомним, что мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, если

$$(|m| = 0) \Rightarrow (\mu(\phi \mid m) = 0).$$

Определим множество $\mathcal{A}_{ac} \subset \mathcal{H} :\ \phi \in \mathcal{A}_{ac}$, если $\forall [a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$ на отрезке $[a\,,\,b]$ мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Множество $\mathcal{H}_{ac}$ есть линейное пространство, так как если $\phi \in \mathcal{A}_{ac}\,,\ \psi \in \mathcal{A}_{ac}$, то

$$< (\phi + \psi), P(m)(\phi + \psi) >=< \phi\,,\, P(m)\phi > + < \psi\,,\, P(m)\psi >$$
$$+ 2Re\ < \psi\,,\, P(m)\phi >= 0,$$

при

$$< \phi\,,\, P(m)\phi >= 0\ ,\ < \psi\,,\, P(m)\psi >= 0.$$

В силу непрерывности проектора $P(m)$ множество H_{ac} замкнуто. По теореме Леви о проекции (см. [22], теорема 4.2.2. или любой учебник функционального анализа)

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}_{ac} \oplus \mathcal{A}_{ac}^{\perp}.$$

Докажем, что любая ограниченная борелевсая функция оператора A приводит подпространсва $\mathcal{A}_{ac}$ и $\mathcal{A}_s$:

$$f(A)\mathcal{A}_{ac} \subset \mathcal{A}_{ac}\ ,\ f(A)\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_s.$$

Имеем:

$$\forall(\phi \in A_{ac})\ :< f(A)\phi\,,\, P(m)f(A)\phi >=$$
$$\int \mathbb{I}(m \mid \lambda)|f(\lambda)|^2 d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\,A)\phi >\leq$$
$$\sup\{|f(\lambda)|^2\}\mu(\phi \mid m),$$

поэтому

$$(\mu(\phi \mid m) = 0) \Rightarrow (\mu(f(A)\phi \mid m)) = 0),$$

и

$$f(A)\mathcal{A}_{ac} \subset \mathcal{A}_{ac}.$$

Из (2.64) следует, что

$$\forall(\phi \in A_s): \ \mu(f(A)\phi \mid m) = \mu(f(A)\phi \mid m \bigcap m_0),$$

поэтому

$$f(A)A_s \subset A_s.$$

Дополнительные сведения о абсолютно непрерывной и сингулярной части оператора. Получим другое описание пространств $\mathcal{A}_{ac}$ и $\mathcal{A}_s$ (этот материал нам в дальнейшем не понадобится).

Так как

$$\mathcal{H} = \oplus \sum_n (E(n\,,\,A) - E(n-1\,,\,A))\mathcal{H},$$

то достаточно рассмотреть случай, когда

$$\psi\,,\,\phi \in (E(n\,,\,A) - E(n-1\,,\,A))\mathcal{H}.$$

Рассмотрим сужение меры $\mu(\phi \mid \cdot)$ на отрезок $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$. По теореме Лебега о разложении меры справедливо равенство

$$\forall(m \in \mathcal{B}or([a\,,\,b])): \ \mu(\phi \mid m) = \mu_{ac}(\phi \mid m) + \mu_s(\phi \mid m), \tag{1.60}$$

где мера $\mu_{ac}(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега:

$$\forall(m \in \mathcal{B}([a\,,\,b])): ((|m| = 0)) \Rightarrow (\mu_{ac}(\phi \mid m) = 0), \tag{1.61}$$

а мера $\mu_s(\phi \mid \cdot)$ сингулярна относительно меры Лебега:

$$\exists(|m_0| = 0)\,,\,\forall(m \in \mathcal{B}([a\,,\,b])): \ \mu_s(\phi \mid m) = \mu_s(\phi \mid m \bigcap m_0). \tag{1.62}$$

Заметим, что входящее в (2.62) множество m_0 зависит от ϕ, и когда это существенно, мы будем писать

$$m_0 = m_0(\phi).$$

Пусть множество m_0 удовлетворяет условию (2.62). Положим

$$\phi_{ac} = \int \mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0) \mid \lambda) d_\lambda E(\lambda\,,\,A)\phi, \tag{1.63}$$

$$\phi_s = \int \mathbb{I}(m_0 \mid \lambda) d_\lambda E(\lambda\,,\,A)\phi. \tag{1.64}$$

Так как

$$\mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0) \mid \lambda) + \mathbb{I}(m_0 \mid \lambda) \equiv 1,$$

то

$$\forall(\phi \in H) : \phi = \phi_{ac} + \phi_s. \tag{1.65}$$

Докажем, что мера $\mu(\phi_{ac} \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера $\mu(\phi_s \mid \cdot)$ сингулярна относительно меры Лебега.

Имеем:

$$\mu(\phi_{ac} \mid m) = \int \mathbb{I}(m \mid \lambda) d_\lambda < \phi_{ac}\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi_{ac} >=$$
$$\int \mathbb{I}(m \mid \lambda)\mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0)) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi >= \mu(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) =$$
$$\mu_{ac}(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) + \mu_s(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) = \mu_{ac}(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)),$$

так как

$$\mu_s(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) = \mu_s(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0) \bigcap m_0) = 0.$$

Аналгично,из (2.64) следует, что

$$\mu(\phi_s \mid m) = \mu(\phi \mid m \bigcap m_0),$$

поэтому мера $\mu(\phi_s \mid \cdot)$ сингулярна. Пусть

$$\psi = \psi_{ac} + \psi_s$$

-разложение произвольного элемента $\psi \in H$.

Имеем:

$$| < \phi_{ac}\,,\, \psi_s > |^2 = | \int \mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0(\phi)))\mathbb{I}(m_0(\psi)) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi > |^2 \leq$$
$$| \int \mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0(\phi)))\mathbb{I}(m_0(\psi)) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi > | \|\psi\|^2 =$$
$$\mu_{ac}(\phi \mid m_0(\psi)) \|\psi\|^2 = 0.$$

Итак, мы доказали что мера $\mu(\phi_{ac} \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера $\mu(\phi_s \mid \cdot)$ сингулярна относительно меры Лебега.

Определение 1.1.7. Спектр сужения оператора A на пространство $\mathcal{F}_{ac}$ называется абсолютно непрерывным спектром оператора A. Спектр сужения оператора A на пространство $\mathcal{A}_s$ называется сингулярным спектром оператора A.

Чтобы уточнить, относительно какого оператора рассматривается разложение пространства $\mathcal{H}$, мы будем обозначать проектор на абсолютно непрерывное пространство оператора A символом

$$P_{ac}(A)\ :\ P_{ac}(A)\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_{ac}. \tag{1.66}$$

Если либо $\phi \in H_{ac}$, либо $\psi \in H_{ac}$, то

$$< \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi >=< \phi_{ac}\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi_{ac} > .$$

Далее заметим, что если $\phi \in H_{ac}$, то на любом отрезке $[a\,,\, b] \subset \mathbb{R}^1$ функция

$$\lambda \mapsto < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi >$$

не убывает и мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Следовательно,

$$\exists(\omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi) \in L^1([a\,,\, b]))\ :\text{п.в. } \omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi) \geq 0, \tag{1.67}$$

$$\forall(m \in \mathcal{B}([a\,,\, b])\,,\, \mu(\phi \mid m) = \int\limits_m \omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi)d\lambda. \tag{1.68}$$

Так как

$$\forall(a\,,\, b):\ \int_a^b \omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi)d\lambda = \|(E(a\,,\, A) - E(b\,,\, A))\phi\|^2 \leq \|\phi\|^2,$$

то

$$\omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi) \in L^1(\mathbb{R}^1).$$

Положим

$$\mathcal{M}(A) \overset{def}{=} \{\phi \mid \phi \in H_{ac}\,,\, \text{п.в. } |\omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi)| < \infty\}. \tag{1.69}$$

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A))\ :\ \|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|^2 = \inf\{C \mid \text{п.в. } |\omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi)| < C\}. \tag{1.70}$$

Из поляризационного тождества следует, что функция

$$\lambda \mapsto \int_{-\infty}^{\lambda} \omega(\xi\,,\, \phi\,,\, \psi)d\xi =< \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi >$$

по мере Лебега почти всюду дифференцируема и

$$\text{п.в. } \frac{d}{d\lambda} < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi >= \omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \psi). \tag{1.71}$$

Замечание 1.1.5. Утверждение (2.71) и аналогичные формулы выше означают, что существует такое *зависящее* от пары $\phi\,,\,\psi$ множество $m_0\,,\,|m_0|=0$, что при $\lambda\in\mathbf{C}(m_0)$ справедливы соответствующие равенства. В следующих ниже формулах *до интегрирования* по $d\lambda$ аргументы типа $\phi\,,\,\psi$ у функции ω в (2.71) будут входить в не более чем в счетном (фактически -конечном) числе, поэтому на формулы, получаемые *после интегрирования* по $d\lambda$, выбор множества m_0 роли не играет.

Наши рассуждения мы подытожим в

Теорема 1.1.9. *Если либо $\phi\in H_{ac}$, либо $\psi\in H_{ac}$, то функция*

$$\lambda\mapsto<\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>$$

абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}^1$ и

$$\exists(\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\psi)\in L^1(\mathbb{R}^1)):\ <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>=\int_{-\infty}^{\lambda}\omega(\xi\,,\,\phi\,,\,\psi)d\xi. \quad (1.72)$$

Определенная равенством (2.72) функция $\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\psi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ \forall(\phi\in H_{ac}):\ \textit{п.в. }\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)\geq 0, \quad (1.73)$$

$$2.\ |\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\psi)|^2\leq\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)\omega(\lambda\,,\,\psi\,,\,\psi), \quad (1.74)$$

$$3.\ \forall(f\in L^{\infty}(\mathbb{R}^1)):\ <\phi\,,\,f(A)\psi>=\int f(\lambda)\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\psi)d\lambda. \quad (1.75)$$

4.*Множество*

$$\mathcal{M}(A)=\{\phi\mid\phi\in H_{ac}\,,\,\|\phi\mid\mathcal{M}(A)\|<\infty\} \quad (1.76)$$

плотно в H_{ac} и функция

$$\phi\to\|\phi\mid\mathcal{M}(A)\| \quad (1.77)$$

определяет на этом множестве норму.

Доказательство. Докажем утверждение 2. Остальные утверждения очевидны. Для доказательства утверждения 2 заметим, что по переменным $\phi\,,\,\psi$ функция $\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\psi)$ есть эрмитова форма, которая неотрицательна на диагонали. Поэтому утверждение 2 есть просто неравенство Коши-Буняковского.

Равенство (2.75) есть следствие равенства (2.72) и определения функции от оператора.

Оператор отождествления (вложения). В этом параграфе мы введем оператор отождествления (по другой терминологии: вложения)

$$J \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

и получим некоторые вспомогательные равенства. Подробно смысл введения оператора отождествления (вложения) и его свойства будут разъяснены позже, а сейчас мы ограничимся типичным примером.

Пусть D -открытая ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^d)\,,\, \mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^d \setminus D).$$

Положим

$$\forall (f \in L^2(\mathbb{R}^d)) \,:\, Jf(x) = f(x)\;,\; x \in \mathbb{R}^d \setminus D, \tag{1.78}$$

$$\forall (f \in L^2(\mathbb{R}^d \setminus D)) \,:\, J^\star f(x) = \begin{cases} f(x)\;,\; x \in \mathbb{R}^d \setminus D, \\ 0\;,\; x \in D. \end{cases}$$

Пусть A -самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_1$, B -самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}_2$. Предположим, что

$$J1. \quad \mathbf{Dom}(BJ - JA) \equiv (\mathbf{Dom}(A) \bigcap \mathbf{Dom}(BJ)) \neq \emptyset, \tag{1.79}$$

$$J2. \quad \mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(BJ - JA)) = \mathcal{H}_1. \tag{1.80}$$

$J3.$ Оператор

$$V \stackrel{def}{=} (BJ - JA)$$

продолжается по непрерывности на пространство $\mathcal{H}_1$ и продолженный оператор удовлетворяет условию:

$$V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)\,,\, \mathbf{Dom}(V) = \mathcal{H}_1. \tag{1.81}$$

Часто оператор отождествления можно и не вводить ([61]), а ограничится одним пространством, но многие построения при этом будут выглядеть неестественно.

Резольвентные тождества. В этом параграфе сформулированные выше предположения об операторе отождествления мы будем предполагать выполненными.

Теорема 1.1.10. *При*

$$\lambda \in res(A) \bigcap res(B) \tag{1.82}$$

справедливы равенства

$$R(\lambda\,,\,B)J - JR(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,B)VR(\lambda\,,\,A), \qquad (1.83)$$
$$J^{\star}R(\lambda\,,\,B) - R(\lambda\,,\,A)J^{\star} = R(\lambda\,,\,A)V^{\star}R(\lambda\,,\,B). \qquad (1.84)$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall (f \in (\mathbf{Dom}(A)\bigcap \mathbf{Dom}(BJ)))\ :(BJ - JA)f = Vf,$$
$$\forall (f \in (\mathbf{Dom}(A)\bigcap \mathbf{Dom}(BJ))\ :(J(\lambda \mathsf{id} - A) - (\lambda \mathsf{id} - B)J)f = Vf,$$
$$R(\lambda\,,\,B)(J(\lambda \mathsf{id} - A) - (\lambda \mathsf{id} - B)J)R(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,B)VR(\lambda\,,\,A).$$

Переходя к сопряженному уравнению, получим (2.84). Теорема доказана.

Предполагая выполненными предположения (2.79)-(2.80), для $\lambda \in res(B)\bigcap res(A)$ положим

$$T_{+}(\lambda\,,\,A\,,\,B) \stackrel{def}{=} J^{\star}V + V^{\star}R(\lambda\,,\,B)V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1), \qquad (1.85)$$
$$T_{-}(\lambda\,,\,A\,,\,B) \stackrel{def}{=} V^{\star}J + V^{\star}R(\lambda\,,\,B)V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1). \qquad (1.86)$$

Справедливо равенство

$$T_{+}(\lambda\,,\,A\,,\,B)^{\star} = T_{-}(\lambda^{*}\,,\,A\,,\,B).$$

Теорема 1.1.11. *Справедливы равенства*

$$T_{-}(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A) = V^{\star}R(\lambda\,,\,B)J, \qquad (1.87)$$
$$R(\lambda\,,\,A)T_{+}(\lambda\,,\,A\,,\,B) = J^{\star}R(\lambda\,,\,B)V \qquad (1.88)$$
$$J^{\star}R(\lambda\,,\,B)J = J^{\star}JR(\lambda\,,\,A) + R(\lambda\,,\,A)T_{+}(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A), \qquad (1.89)$$
$$J^{\star}R(\lambda\,,\,B)J = R(\lambda\,,\,A)J^{\star}J + R(\lambda\,,\,A)T_{-}(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A), \qquad (1.90)$$

Доказательство. Имеем:

$$R(\lambda\,,\,B)VR(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,B)J - JR(\lambda\,,\,A),$$
$$V^{\star}R(\lambda\,,\,B)VR(\lambda\,,\,A) = V^{\star}R(\lambda\,,\,B)J - V^{\star}JR(\lambda\,,\,A),$$
$$(T_{-}(\lambda\,,\,A\,,\,B) - V^{\star}J)R(\lambda\,,\,A) = V^{\star}R(\lambda\,,\,B)J - V^{\star}JR(\lambda\,,\,A),$$
$$T_{-}(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A) = V^{\star}R(\lambda\,,\,B)J,$$

Второе равенство получается сопряжением. Далее:

$$J^{\star}R(\lambda\,,\,B)J - J^{\star}JR(\lambda\,,\,A) = J^{\star}R(\lambda\,,\,B)VR(\lambda\,,\,A),$$

воспользовавшись (2.87), получаем:

$$J^\star R(\lambda\,,\,B)J - J^\star JR(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,A)T_+(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A).$$

Равенство (2.90) получается сопряжением. Теорема доказана.

Для удобства ссылок (см. [22]) приведем упрощенную формулировку этой теоремы для случая одного пространства.

Пусть $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ и $J = \mathsf{id}$.

Положим по определению

$$\begin{aligned}&\forall(\lambda \in res(A)\bigcap res(B))\ :\\ &T(\lambda\,,\,A\,,\,B) \overset{def}{=} (B-A) + (B-A)R(\lambda\,,\,B)(B-A).\end{aligned} \tag{1.91}$$

Лемма 1.1.13. *Справедливы равенства*

$$R(\lambda\,,\,B) = R(\lambda\,,\,A)T(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,A)Q(\lambda\,,\,A\,,\,B), \tag{1.92}$$

$$T(\lambda\,,\,A\,,\,B) = (B-A) + (B-A)R(\lambda\,,\,A)T(\lambda\,,\,A\,,\,B), \tag{1.93}$$

$$R(\lambda\,,\,B)(B-A) = R(\lambda\,,\,A)T(\lambda\,,\,A\,,\,B), \tag{1.94}$$

$$(B-A)R(\lambda\,,\,B) = T(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A), \tag{1.95}$$

$$\begin{aligned}&T(\lambda\,,\,A\,,\,B) - T(\mu\,,\,A\,,\,B) =\\ &-(\lambda-\mu)T(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A)R(\mu\,,\,A)T(\mu\,,\,A\,,\,B).\end{aligned} \tag{1.96}$$

Доказательство. Из второго резольвентного уравнения следует, что

$$\begin{aligned}&R(\lambda\,,\,B)(B-A) = R(\lambda\,,\,A)(B-A) + R(\lambda\,,\,A)(B-A)R(\lambda\,,\,B)(B-A) =\\ &R(\lambda\,,\,A)(B-A) + R(\lambda\,,\,A)(T(\lambda\,,\,A\,,\,B) - (B-A)) =\\ &R(\lambda\,,\,A)T(\lambda\,,\,A\,,\,B).\end{aligned}$$

Подставив левую часть этого равенства в (2.91), мы получим (2.93). Подставив во второе резольвентное уравнение, получим (2.94). Равенство (2.95) доказывается абсолютно аналогично.

Далее имеем:

$$\begin{aligned}&T(\lambda\,,\,A\,,\,B) - T(\mu\,,\,A\,,\,B) = (B-A)(R(\lambda\,,\,B) - R(\mu\,,\,B)(B-A) =\\ &-(\lambda-\mu)(B-A)(R(\lambda\,,\,B)R(\mu\,,\,B)(B-A) =\end{aligned}$$

(с учетом доказанных выше равенств)

$$-(\lambda-\mu)T(\lambda\,,\,A\,,\,B)R(\lambda\,,\,A)R(\mu\,,\,A)T(\mu\,,\,A\,,\,B).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.1.14. *Определим операторы*

$$V \overset{def}{=} B - A\,,\; Q(\lambda) \overset{def}{=} \mathsf{id} + VR(\lambda\,,\, B)\,,\; Q^0(\lambda) \overset{def}{=} \mathsf{id} - VR(\lambda\,,\, A), \tag{1.97}$$

тогда

$$R(\lambda\,,\, B) = R(\lambda\,,\, A)Q(\lambda)\;,\; R(\lambda\,,\, A) = R(\lambda\,,\, B)Q^0(\lambda), \tag{1.98}$$
$$Q(\lambda) = \mathsf{id} + T(\lambda\,,\, A\,,\, B)R(\lambda\,,\, A), \tag{1.99}$$
$$Q(\lambda)Q^0(\lambda) = Q^0(\lambda)Q(\lambda) = \mathsf{id}, \tag{1.100}$$
$$R(\lambda - i\epsilon\,,\, B) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, B) =$$
$$Q(\lambda + i\epsilon)^*(R(\lambda - i\epsilon\,,\, A) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, A))Q(\lambda + i\epsilon), \tag{1.101}$$
$$R(\lambda - i\epsilon\,,\, A) - R(\lambda + i\epsilon, A) =$$
$$(Q^0)^*(\lambda + i\epsilon)(R(\lambda - i\epsilon\,,\, B) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, B))Q^0(\lambda + i\epsilon). \tag{1.102}$$

Доказательство. Первое равенство (2.99) есть следствиеие (2.95). Остальные два равенства в (2.100) проверяются вычислением:

$$Q(\lambda)Q^0(\lambda) = (\mathsf{id} + VR(\lambda\,,\, B))(\mathsf{id} - VR(\lambda\,,\, A)) =$$
$$\mathsf{id} + VR(\lambda\,,\, B) - VR(\lambda\,,\, A) - VR(\lambda\,,\, B)VR(\lambda\,,\, A) =$$
$$\mathsf{id} + V(R(\lambda\,,\, B) - R(\lambda\,,\, A) - R(\lambda\,,\, B)VR(\lambda\,,\, A)) = \mathsf{id}.$$

Третье равенство в (2.100) доказывается аналогично. Далее имеем:

$$\forall(\lambda \in \mathbb{R}^1):\; R(\lambda + i\epsilon\,,\, B) = R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)Q(\lambda + i\epsilon),$$
$$R(\lambda - i\epsilon\,,\, B) = R(\lambda + i\epsilon\,,\, B)^* = Q(\lambda + i\epsilon)^*R(\lambda - i\epsilon\,,\, A),$$
$$R(\lambda - i\epsilon\,,\, B) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, B) = 2i\epsilon R(\lambda - i\epsilon\,,\, B)R(\lambda + i\epsilon\,,\, B) =$$
$$2i\epsilon Q(\lambda + i\epsilon)^*R(\lambda - i\epsilon\,,\, A_0)R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)Q(\lambda + i\epsilon)$$
$$R(\lambda - i\epsilon\,,\, B) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, B) = Q(\lambda + i\epsilon)^*(R(\lambda - i\epsilon\,,\, A) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, A))Q(\lambda + i\epsilon),$$
$$R(\lambda - i\epsilon\,,\, A) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, A) = (Q^0(\lambda + i\epsilon))^*(R(\lambda - i\epsilon\,,\, B) - R(\lambda + i\epsilon\,,\, B))Q^0(\lambda + i\epsilon).$$

Лемма 1.1.15. *Справедливы равенства:*

$$\forall z:\; R(z\,,\, A) = R(z\,,\, A)Q(z) = Q(z^*)^*R(z\,,\, A); \tag{1.103}$$
$$R(z\,,\, A) = R(z\,,\, B)Q^0(z) = Q^0(z^*)^*R(z\,,\, B). \tag{1.104}$$

Доказательство. По определению имеем:

$$R(z\,,\, B) = R(z\,,\, A)Q(z),$$

далее имеем:

$$
\begin{aligned}
&R(z\,,\,B)^* = (R(z\,,\,A)Q(z))^*,\\
&R(z^*\,,\,B) = Q(z)^*R(z^*\,,\,A),\ z \mapsto z^*.
\end{aligned}
$$

Равенство (2.103) доказано. Равенство (2.104) доказывается аналогично.

Заметим, что в равенства (2.92)-(2.96) входят только резольвенты операторов A, B и их разность, поэтому сами тождества сохраняются и для неограниченных операторов при условии ограниченности оператора $B - A$.

Иногда бывает удобна форма резольвентного тождества, которая на жаргоне работающих в теории потенциального рассеяния специалистов называется "резольвентным тождеством в обкладках (sandwitched)". Существует много вариантов "sandwitched" тождества. Мы получим это тождество для простейшего случая $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, $J = \mathsf{id}$ и ограниченных операторов A, B, C, D.

Теорема 1.1.12. *Пусть*

$$B - A = CD.$$

Тогда в тех точках λ, где существуют операторы

$$R(\lambda\,,\,A)\ ,\ R(\lambda\,,\,B)\ ,\ (\mathsf{id} - DR(\lambda\,,\,A)C)^{-1},$$

справедливо равенство

$$R(\lambda\,,\,B) - R(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,A)C(\mathsf{id} - DR(\lambda\,,\,A)C)^{-1}DR(\lambda\,,\,A). \quad (1.105)$$

Доказательство. Из второго резольвентного уравнения

$$R(\lambda\,,\,B) - R(\lambda\,,\,A) = R(\lambda\,,\,B)CDR(\lambda\,,\,A)$$

следует равенство

$$DR(\lambda\,,\,B)C - DR(\lambda\,,\,A)C = DR(\lambda\,,\,B)CDR(\lambda\,,\,A)C.$$

Пусть

$$\alpha = DR(\lambda\,,\,B)C\ ,\ \beta = DR(\lambda\,,\,A)C.$$

Тогда предыдущее равенство можно записать в виде

$$\alpha - \beta = \alpha\beta,$$

поэтому

$$(\mathsf{id} - \beta)(\mathsf{id} + \alpha) = \mathsf{id} \quad , \quad (\mathsf{id} + \alpha) = (\mathsf{id} - \beta)^{-1}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
&R(\lambda\,,\,B)-R(\lambda\,,\,A)=R(\lambda\,,\,B)CDR(\lambda\,,\,A)=\\
&(R(\lambda\,,\,A)+R(\lambda\,,\,A)CDR(\lambda\,,\,B))CDR(\lambda\,,\,A)=\\
&R(\lambda\,,\,A)(\mathsf{id}+CDR(\lambda\,,\,B))CDR(\lambda\,,\,A)=\\
&R(\lambda\,,\,A)C(\mathsf{id}+DR(\lambda\,,\,B)C)DR(\lambda\,,\,A)=\\
&R(\lambda\,,\,A)C(\mathsf{id}+\alpha)DR(\lambda\,,\,A)=\\
&R(\lambda\,,\,A)C(\mathsf{id}-\beta)^{-1}DR(\lambda\,,\,A).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2.1.12 применяется в том случае, если оператор $DR(\lambda\,,\,A)C$ достаточно "хороший".

Комментарии и литературные указания. Читатель, знакомый с функциональным анализом приблизительно в объеме учебника [22] может сразу начать с нестационарной теории рассеяния. Вопросы могут возникнуть только в связи с обобщенными собственными функциями и диагонализацией. По-существу, теория разложения по обобщенным собственным функциям -это конкретизация спектральной теоремы Неймана для дифференциальных операторов. Теория разложения по обобщенным собственным функциям построена в 60-х годах прошлого века. Подробное изложение теории обобщенных собственных функций см. в [18]. Обзоры для физиков см. в [20, 43, 52, 56, 63]. Диагонализация обсуждается в написанном Л.Гордингом (одним из создателей этой теории) приложении к книге [60].

Часть I

Нестационарная теория рассеяния.

Глава 2

Начальные сведения. Нестационарная теория рассеяния.

Пусть функция

$$t \mapsto f(t)$$

описывает эволюцию волнового пакета (электромагнитных волн, плотности вероятности и т.д.). Эволюция волнового пакета в вакууме обычно задается группой унитарных операторов:

$$U_0(t)\ :\ f(t) = U_0(t)f_0.$$

Если волновой пакет встречает препятствие (дифрагирующее тело, мишень и т.д.), то его эволюция описывается уже другой группой унитарных операторов:

$$f(t) = U(t)f_0.$$

Обычно эволюции, описываемые этими группами в далеком пршлом и далеком будущем в некотором смысле близки:

$$\exists (f_\pm)\ :\ \lim_{t\to\pm\infty} \|U(t)f_0 - U_0(t)f_\pm\| = 0,$$

т.е. предполагается, что возмущенный волновой пакет в далеком будущем (прошлом) эволюционирует также, как и невозмущенный волновой пакет, но только с другими начальными данными.

Используя унитарность группы $U(t)$ (пока мы не будем обращать внимание на то, что операторы $U(t)$ и $U_0(t)$ в общем случае действуют в разных пространствах: в случае дифракции электромагнитных волн на теле D группа $U_0(t)$ действует на функциях, определенных в $\mathbb{R}^d$, а группа $U(t)$ действует на функциях, определенных в $\mathbb{R}^d \setminus D$) отсюда получаем:

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|f_0 - U(-t)U_0(t)f_\pm\| = 0.$$

Это равенство выполнено, если

$$\lim_{t\to+\infty} U(-t)U_0(t)f_+ = \lim_{t\to-\infty} U(-t)U_0(t)f_-,$$

$$f_+ = \left(\lim_{t\to+\infty} U(-t)U_0(t)\right)^{-1} \left(\lim_{t\to-\infty} U(-t)U_0(t)\right) f_- =$$

$$\left(\lim_{t\to+\infty} U(-t)U_0(t)\right)^{*} \left(\lim_{t\to-\infty} U(-t)U_0(t)\right) f_- \tag{2.1}$$

Оператор, который стоит в левой части равенства и сопоставляет функции f_- функцию f_+ (физики часто пользуются другим соглашением о знаках, см. [5]), называется оператором рассеяния. Этот оператор есть основной объект изучения в математической теории рассеяннния. Зная оператор рассеяния и состояние системы в далеком прошлом, можно определить состояние системы в далеком будущем.

2.1 Основные определения: волновые операторы и оператор рассеяния.

Опишем основные объекты, с которыми мы будем иметь дело.

Пусть

$\mathcal{H}_i$, $i = 1$, 2 -гильбертовы пространства,

$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_2)$ -самосопряженные операторы,

$J \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$ -оператор отождествления,

$J^\star \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_1)$ оператор, банахово сопряженный оператору отождествения, (см. стр. 38).

В определении волновых операторов оператор J может быть любым ограниченным оператором и опытные исследователи часто этим пользуются, однако содержательную и достаточно общую теорию удается построить лишь при довольно жестких ограничениях на оператор J. В задачах квантовой механики оператор J -это чаще всего единичный оператор.

Мы предположим, что в дополнении к сформулированным на стр. 38 условиям оператор J удовлетворяет условию:

$$J4. \quad \forall(\psi \in \mathcal{H}_1)\ :\ \lim_{t\to\pm\infty} \|(\mathsf{id} - J^\star J)\exp(-itA)P_{ac}\psi\|_1 = 0. \tag{2.2}$$

В дальнейшем по умолчанию мы будем предполагать, что условия 2.79-2.81 (см. стр. 38)и условие 3.2 выполнены.

В приведенном на стр. 38 примере условие 3.2 можно интерпретировать как требование, чтобы волновой пакет при описываемой группой $\exp(-itA)$ эволюции покидал область D.

Замечание 2.1.1. Далее следуют равенства, в которых есть индексы $\pm$. Эти равенства мы будем понимать как независимые равенства, в обеих частях которых берутся либо верхние индексы, либо нижние. Нужно отметить, что из справедливости какого-либо утверждения для знака $+$ (или $-$) , вообще говоря, *не следует* справедливость этого утверждения для противоположного знака.

Определение 2.1.1. Если существуют пределы

$$\forall(\phi \in \mathcal{H}_1): \ W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)\phi = \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itB)J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi, \quad (2.3)$$

то эти пределы называются волновыми операторами при отождествлении J.

Определение волновых операторов можно сформулировать так:

$$\forall(\phi \in \mathcal{H}_1): \ \lim_{t\to\pm\infty} \|W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)P_{ac}(A)\phi - \exp(itB)J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\|_2 = 0. \quad (2.4)$$

Условия существования волновых операторв мы обсудим позже, а сейчас мы будем предполагать, что эти операторы существуют и установим их простейшие свойства.

Теорема 2.1.1. *Если волновые операторы $W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)$ существуют и выполнено условие 3.2, то тогда*

1. $\forall(\phi \in \mathcal{H}_1): \ \|W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)\phi\|_2 = \|P_{ac}\phi\|_1.$ (2.5)
2. $E(\lambda\,,\,B)W_\pm(B\,,\,A\,,\,J) = W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)E(\lambda\,,\,A).$ (2.6)
3. $\mathbf{Im}(W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)) \subset P_{ac}(B)\mathcal{H}_2.$ (2.7)

Проведем доказательство для знака $+$. Имеем:

$$\|W_+(B\,,\,A\,,\,J)\phi\|_2^2 =$$
$$\lim_{t\to\infty} | < \exp(itB)J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\,,\,\exp(itB)J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi >_2 | =$$
$$\lim_{t\to\infty} | < J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\,,\,J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi >_2 | =$$
$$\lim_{t\to\infty} | < \exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\,,\,J^\star J\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi >_1 | =$$
$$\lim_{t\to\infty} | < \exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\,,\,(J^\star J - \mathsf{id})\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi >_1 +$$
$$< \exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\,,\,\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi >_1 | = \|P_{ac}(A)\phi\|_1^2,$$

так как в силу условия (3.2)

$$| < \exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\,,\,(J^\star J - \mathsf{id})\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi >_1 | \leq$$
$$\|P_{ac}(A)\phi\|_1 \cdot \|(J^\star J - \mathsf{id})\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\|_1 \to 0\,,\, t \to \infty.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Далее имеем:

$$\forall(\tau \in \mathbb{R}^1) : W_+(B\,,\,A\,,\,J)\exp(-i\tau A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\infty} \exp(itB)J\exp(-itA)\exp(-i\tau A)P_{ac}(A)\phi =$$
$$\exp(-i\tau B)\lim_{t\to\infty}\exp(itB)\exp(-itA))P_{ac}(A)\phi = \exp(-i\tau B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)\phi,$$

следовательно,

$$\exp(-i\tau B)W_+(B\,,\,A\,,\,J) = W_+(B\,,\,A\,,\,J)\exp(-i\tau A).$$

Поэтому

$$\forall(\phi \in \mathcal{H}_2\,,\,\psi \in \mathcal{H}_1) : \ < \phi\,,\,\exp(-i\tau B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)\psi >_2 =$$
$$< \phi\,,\,W_+(B\,,\,A\,,\,J)\exp(-i\tau A)\psi >_2 = < W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star\phi\,,\,\exp(-i\tau A)\psi >_1,$$
$$\int \exp(-i\tau\lambda)d_\lambda < W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi >_1 =$$
$$\int \exp(-i\tau\lambda)d_\lambda < \phi\,,\,E(\lambda\,,\,B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)\psi >_2,$$

и из единственности преобразования Фурье следует равество

$$< \phi\,,\,E(\lambda\,,\,B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)\psi >_2 = < W_+(B\,,\,A)^\star\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi >_1,$$

поэтому

$$\forall(\phi\,,\, \in \mathcal{H}_2\,,\,\psi \in \mathcal{H}_1)) : \ < \phi\,,\,W_+(B\,,\,A\,,\,J)E(\lambda\,,\,A)\psi >_2 =$$
$$< \phi\,,\,E(\lambda\,,\,B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)\psi >_2 .$$

Второе утверждение теоремы доказано.

Далее имеем:

$$\forall(\psi \in \mathcal{H}_1) : < W_+(B\,,\,A\,,\,J)\psi\,,\,E(\lambda\,,\,B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)\psi >_2 =$$
$$< W_+(B\,,\,A\,,\,J)P_{ac}(A)\psi\,,\,E(\lambda\,,\,B)W_+(B\,,\,A\,,\,J)P_{ac}(A)\psi >_2 =$$
$$< W_+(B\,,\,A\,,\,J)P_{ac}(A)\psi\,,\,W_+(B\,,\,A\,,\,J)E(\lambda\,,\,A)P_{ac}(A)\psi >_2 =$$
$$< W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star W_+(B\,,\,A\,,\,J)P_{ac}(A)\psi\,,\,E(\lambda\,,\,A)P_{ac}(A)\psi >_1 . \quad (2.8)$$

Правая часть (3.8) есть абсолютно непрерывная функция. Теорема доказана.

Утверждение 3.6 называется сплетающим свойством волновых операторов.

Замечание 2.1.2. Вообще говоря,

$$W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star W_+(B\,,\,A\,,\,J) \neq P_{ac}(A).$$

Следующая теорема называется теоремой об умножении волновых операторов.

Теорема 2.1.2. *Если волновые операторы* $W_\pm(B\,,\,A\,,\,J_{12})$ *и* $W_\pm(C\,,\,B\,,\,J_{23})$ *существуют, то волновой оператор* $W_\pm(C\,,\,A\,,\,J_{23}J_{12})$ *существует и выполнено равенство*

$$W_\pm(C\,,\,A\,,\,J_{23}J_{12}) = W_\pm(C\,,\,B\,,\,J_{23})W_\pm(B\,,\,A\,,\,J_{12}). \tag{2.9}$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\|\exp(itC)J_{23}\exp(-itB)(P_{ac}(B)-\mathsf{id})\exp(itB)J_{12}\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\| \leq$$
$$C\|(P_{ac}(B)-\mathsf{id})\exp(itB)J_{12}\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\| \to 0\,,\, t\to\infty.$$

С учетом этого замечания, имеем:

$$W_\pm(C\,,\,B\,,\,J_{23})W_\pm(B\,,\,A\,,\,J_{12})\phi =$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)J_{23}\exp(-itB)P_{ac}(B)\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itB)J_{12}\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)J_{23}\exp(-itB)\lim_{t\to\infty}\exp(itB)J_{12}\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi+$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)J_{23}\exp(-itB)(P_{ac}(B)-\mathsf{id})\times$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itB)J_{12}\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)J_{23}J_{12}\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi = W_\pm(C\,,\,A\,,\,J_{23}J_{12}).$$

Теорема доказана.

Напомним, что мы рассматриваем только такие операторы отождествления, которые удовлетворяют условию (3.2), и поэтому при рассматриваемых нами ограничениях на оператор отождествления операторы $W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)$ изометричны.

Определение 2.1.2. Изометрический волновой оператор

$$W_\pm(B\,,\,A\,,\,J) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$$

называется полным, если

$$\mathbf{Im}(W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)) = P_{ac}(B)\mathcal{H}_2. \tag{2.10}$$

Теорема 2.1.3. *Если $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, $J = \mathsf{id}$ и хотя бы один волновых операторов $W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})$ полный, то*

1. Этот оператор обратим и операторы $E(\lambda\,,\,B)P_{ac}(B)$ и $E(\lambda\,,\,A)P_{ac}(A)$ унитарно эквивалентны:

$$\forall(\phi \in P_{ac}(B)\mathcal{H}) : \; E(\lambda\,,\,B)P_{ac}(B)\phi = \\ W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})E(\lambda\,,\,A)P_{ac}(A)W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})^{-1}\phi \qquad (2.11)$$

2. Существует волновой оператор $W_\pm(A\,,\,B\,,\,\mathsf{id})$.

3. Если существуют оба волновых оператора $W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})$ и $W_\pm(A\,,\,B\,,\,\mathsf{id})$, то они полны.

Доказательство. Если выполнено условие (3.10), то к пространствам $P_{ac}(A)\mathcal{H}$, $P_{ac}(B)\mathcal{H}$ и оператору

$$W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id}) \in \mathcal{L}(P_{ac}(A)\mathcal{H} \mapsto P_{ac}(B)\mathcal{H})$$

мы можем применить теорему Банаха об обратном операторе и первое утверждение теоремы следует из равенства (3.7).

Если

$$\forall(\psi \in P_{ac}(B))\mathcal{H}\,,\, \exists(\phi \in P_{ac}(A)\mathcal{H}) : \; \psi = W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})\phi,$$

то

$$\forall(\psi \in P_{ac}(B)\mathcal{H}) : \; \lim_{t\to\pm\infty} \|\psi - \exp(itB)\exp(-itA)\phi\| = \\ \lim_{t\to\pm\infty} \|\exp(itA)\exp(-itB)\psi - \phi\| = \|W_\pm(A\,,\,B\,,\,\mathsf{id})\psi - \phi\|.$$

Второе утверждение теоремы доказано.

Если существуют оба волновых оператора, то по теореме об умножении волновых операторов имеем:

$$P_{ac}(A) = W_\pm(A\,,\,B\,,\,\mathsf{id})W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id}), \\ P_{ac}(B) = W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})W_\pm(A\,,\,B\,,\,\mathsf{id}).$$

Эти равенства доказывают, что

$$P_{ac}(A)\mathcal{H} = \mathbf{Im}(W_\pm(A\,,\,B\,,\,\mathsf{id}))\;,\; P_{ac}(B)\mathcal{H} = \mathbf{Im}(W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})).$$

Теорема доказана.

Пусть существуют операторы $W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)$.

Определение 2.1.3. Оператором рассеяния

$$S(B\,,\,A\,,\,J) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_1)$$

называется оператор

$$S(B\,,\,A\,,\,J) \stackrel{\text{def}}{=} W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star W_-(B\,,\,A\,,\,J). \tag{2.12}$$

Теорема 2.1.4. *Оператор рассеяния $S(B\,,\,A\,,\,J)$ коммутирует с любой ограниченной борелевской функцией оператора A.*

Доказательство. Имеем:

$f(A)S(B\,,\,A\,,\,J) = f(A)W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star W_-(B\,,\,A\,,\,J) =$
$(W_+(B\,,\,A\,,\,J)f(A))^\star W_-(B\,,\,A\,,\,J) = (f(B)W_+(B\,,\,A\,,\,J))^\star W_-(B\,,\,A\,,\,J) =$
$W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star f(B)W_-(B\,,\,A\,,\,J) = W_+(B\,,\,A\,,\,J)^\star W_-(B\,,\,A\,,\,J)f(A) =$
$S(B\,,\,A\,,\,J)f(A).$

Теорема доказана.

2.2 Признаки существования волновых операторов.

Сначала мы докажем несколько вспомогательных утверждений.

Вспомогательные леммы: лемма о компатном операторе и лемма М. Розенблюма.

Лемма 2.2.1. *Если K-компактный оператор:*

$$K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2),$$

то

$$\forall (\phi \in P(A)_{ac}\mathcal{H}_1): \lim_{t\to\infty} \|K\exp(-itA)\phi\|_2 = 0. \tag{2.13}$$

Доказательство. Используя разложение Шмидта (см. (2.15) на стр. 13), мы получаем:

$\|K\exp(-itA)\phi\|^2 =$

$$\sum_{1\le j\le n} s_j(K)^2| < e_j\,,\,\exp(-itA)\phi >_1|^2 + \sum_{j>n} s_j(K)^2| < e_j\,,\,\exp(-itA)\phi >_1|^2$$

$$\le \sum_{1\le j\le n} s_j(K)^2| < e_j\,,\,\exp(-itA)\phi >_1|^2 + s_n(K)^2\|\phi\|_1^2\,,\; s_n(K)\to 0\,,\; n\to\infty.$$

Так как

$$\forall(\phi \in P(A)_{ac}\mathcal{H}_1\,,\, e_j \in \mathcal{H}_1)\,:\, \omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, \phi) \in L^1(d\lambda),$$

то

$$\forall(\phi \in P(A)_{ac}\mathcal{H}_1)\,:\, < e_j\,,\, \exp(-itA)\phi >_1 =$$
$$\int \exp(-it\lambda)\omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, \phi)d\lambda \to 0\,,\, t \to \infty,$$

что и доказывает наше утверждение.

Следующая важная в теории рассеяния лемма называется леммой М. Розенблюма.

Лемма 2.2.2. *Если T - оператор Гильберта-Шмидта:*

$$T \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2),$$

то справедлива оценка:

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A))\,:\, \int \|T\exp(-itA)\phi\|_2^2 dt \leq 2\pi\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|^2\|T \mid HS\|^2. \quad (2.14)$$

(Определение пространства $\mathcal{M}(A)$ см. на стр. 37).

Доказательство. Используя разложение Шмидта, мы получаем:

$$\int \|T\exp(-itA)\phi\|_2^2 dt = \int \left(\sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2| < e_j\,,\, \exp(-itA)\phi >_1 |^2\right) dt =$$
$$\sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int |\int \omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, \phi)\exp(-i\lambda t)d\lambda|^2 dt.$$

Интеграл по $d\lambda$ мы можем рассматривать как преобразование Фурье по переменной λ от переменной λ к переменной t. Используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье по λ и неравенство (2.74), мы получаем:

$$\int \|T\exp(-itA)\phi\|_2^2 dt = 2\pi \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int |\omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, \phi)|^2 d\lambda =$$
$$2\pi \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int |\omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, \phi)|^2 d\lambda \leq$$
$$2\pi \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int |\omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, e_j)\omega(\lambda\,,\, \phi\,,\, \phi)| d\lambda \leq$$
$$2\pi\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|^2 \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int \omega(\lambda\,,\, e_j\,,\, e_j)d\lambda = 2\pi\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|^2\|T \mid HS\|^2.$$

Лемма доказана.

Пусть A -самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_1$, B -самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}_2$. Предположим, что выполнены предположения (2.79)-(2.81). Пусть $\mathcal{R}$ -множество, которое удовлетворяет условиям:

$$\mathcal{R} \subset \mathbf{Dom}(A) \ , \ \mathbf{Cl}(\mathcal{R}) \supset P(A)_{ac}\mathcal{H}_1, \tag{2.15}$$

При рассматриваемых нами ограничениях на операторы A и B множество $\mathcal{R}$ с такими свойствами существует .

Признак Кука существования волновых операторов. Следующее простое утверждение называется признаком Кука существования волновых операторов и оказывается очень полезным в теории рассеяния.

Лемма 2.2.3. *Если множество $\mathcal{R}$ удовлетворяет описанным выше требованиям и*

$$\forall (t > 0 \, , \, J \exp(-itA)\mathcal{R} \subset \mathbf{Dom}(B)), \tag{2.16}$$

$$\forall (\phi \in \mathcal{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} \|(BJ - JA)\exp(-iAt)\phi\| dt < \infty, \tag{2.17}$$

то волновые операторы $W_{\pm}(B \, , \, A \, , \, J)$ существуют.

Доказательство. Положим

$$W(t) := \exp(itB)J\exp(-itA). \tag{2.18}$$

Так как

$$\|W(t)\| \leq 1,$$

то в силу теоремы Банаха-Штейнгауза для доказательства существования пределов (3.3) для всех $\phi \in P(A)_{ac}\mathcal{H}_1$ достаточно доказать существование этих пределов для $\phi \in \mathcal{R}$. Так как

$$\phi \in \mathbf{Dom}(A) \, , \, J\exp(-itA)\phi \in \mathbf{Dom}(B),$$

то

$$\exists \, \frac{d}{d\tau} W(\tau)\phi \ , \ \frac{d}{d\tau} W(\tau)\phi \in C((0 \, , \, \infty) \, , \, H).$$

Докажем существование предела (3.3). Имеем:

$$(W(t) - W(s))\phi = \int_s^t \frac{d}{d\tau} W(\tau)\phi d\tau = i\int_s^t \exp(i\tau B)(BJ - JA)\exp(-i\tau A)\phi d\tau,$$

$$\forall (t > s > s(\epsilon)) : \ \|(W(t) - W(s))\phi\| \leq \int_s^t \|(BJ - JA)\exp(-i\tau A)\phi\| d\tau < \epsilon.$$

Существование предела при $t \to -\infty$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим пример.

Существование волновых операторов для уравнения Шредингера.

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)\ ,\ A = -\Delta\ ,\ B = -\Delta + V,$$

где V -оператор умножения на действительную непрерывную функцию $v(x)$, которая удовлетворяет оценке

$$\forall (x \in \mathbb{R}^3) : \ |v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(1+\epsilon)}\ ,\ \epsilon > 0. \tag{2.19}$$

Докажем существование волновых операторов $W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})$.

Имеем:

$$\forall (\phi \in \mathcal{H}) : \ \ < \phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\phi >= (2\pi)^{-3}\int\limits_{\xi^2 < \lambda} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi,$$

Так как правая часть этого равенства есть абсолютно непрерывная функция параметра λ при любом $\phi \in H$, то в рассматриваемом случае

$$P_{ac}(A)\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} = L^2(\mathbb{R}^3)$$

и у оператора A нет сингулярного спектра.

В силу известной в теории преобразования Фурье теоремы Винера множество функций вида

$$\psi = \sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j \exp(-(x - a_j)^2)\,,\ a_j \in \mathbb{R}^3\,,\ n = 1\,,\,2\,\ldots$$

плотно в $L^2(\mathbb{R}^3)$, поэтому для доказательства существования волновых операторов $W_\pm(B\,,\,A\,,\,\mathsf{id})$ достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(t)dt < \infty, \tag{2.20}$$

где

$$J(t) = \|V \exp(-itA)\psi_0\|\,,\; \psi_0 = \exp(-(x-a)^2).$$

Имеем:

$$\exp(-itA)\psi_0(x) = F^{-1}(\exp(it\xi^2)F(\exp(-(\cdot - a)^2))(x) =$$
$$\sigma(t)^{-3/2}\exp(-(x-a)^2/\sigma(t))\;,\; \text{где } \sigma(t) = 1 + 4it.$$

В силу оценки (3.19)

$$|V\exp(-itA)\psi_0(x)| < C|\sigma(t)|^{-3/2}(1+|x|)^{-(1+\epsilon)}\exp(-(|x-a|/|\sigma(t)|)^2).$$

Пусть число q удовлетворяет оценке

$$\frac{3}{2(1+\epsilon)} < q < \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда по неравенству Гельдера имеем:

$$J(t) \le C|\sigma(t)|^{-3/2}\left(\int (1+|x|)^{-2(1+\epsilon)}\exp(-2((x-a)/|\sigma(t)|)^2)dx\right)^{1/2} \le$$
$$C|\sigma(t)|^{-3/2}\left(\int (1+|x|)^{-2q(1+\epsilon)}dx\right)^{1/2q}\left(\int \exp\left(-\frac{2p|x-a|^2}{|\sigma(t)|^2}\right)dx\right)^{1/2p} \le$$
$$const.|\sigma(t)|^{-3/2q}.$$

Так как $3/2q > 1$, то отсюда следует оценка (3.20).

Существование волновых операторов для гиперболических по Фридрихсу систем. Мы рассмотрим задачу Коши для гиперболических по Фридрихсу систем (см. [59, 62]) вида:

$$u(x\,,\,t)\;:\;\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m;$$
$$E(x)^\star = E(x) \ge \alpha \mathsf{id}\,,\; \alpha > 0\,,\; A_k^\star = A_k \in M(m\,,\,m),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = E(x)^{-1}\Big(\sum_{1\le k\le d} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)\,,\; t > 0; \quad u(x\,,\,0) = u_0(x)$$

Предполагается, что все характеристические значения матрицы

$$A(\xi) \stackrel{def}{=} \sum_{1\le k\le m} A_k\xi_k$$

действительны и различны:

$$A(\xi)e_k = \nu_k(\xi)e_k\,,\ \nu_j(\xi) \neq \nu_p(\xi)\,,\ j \neq p. \tag{2.21}$$

Легко видеть (умножаем обе части (3.21) на скалярный множитель s), что характеристические числа -однородные функции первой степени от ξ:

$$\nu_k(\xi) \equiv |\xi|\nu_k(\xi/|\xi|) \tag{2.22}$$

Преобразования

$$U_E(t) : u_0(x) \mapsto u(x\,,\,t) \tag{2.23}$$

образуют полугруппу унитарных операторов класса C_0 в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением

$$< u\,,\,v > \Big|_E = \int u(x)^\star \cdot E(x)v(x)dx.$$

Это скалярное произведение зависит от оператора $E(x)$: разные операторы определяют разные скалярные произведения и поэтому разные гильбертовы пространства (совпадающие как линейные пространства).

Для каждого $E(x)$ существуют такие константы c и C, что справедливо неравенство:

$$\forall u\ :\ c\|u\|\Big|_{E=\mathsf{id}} \leq \|u\|\Big|_E \leq C\|u\|\Big|_{E=\mathsf{id}}$$

Пусть

$\mathcal{H}_0$ -гильбертово пространство со скалярным произведением

$$< u\,,\,v > \Big|_{E=\mathsf{id}},$$

пусть L_0 -инфинитезимальный оператор действующей в $\mathcal{H}_0$ полугруппы $U_{\mathsf{id}}(t)$,

$$L_0 = i\Big(\sum_{1\leq k\leq d} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big).$$

$\mathcal{H}_1$-гильбертово пространство со скалярным произведением

$$< u\,,\,v > \Big|_E,$$

пусть L -инфинитезимальный оператор действующей в $\mathcal{H}_1$ полугруппы $U_E(t)$,

$$L = iE(x)^{-1}\Big(\sum_{1\leq k\leq d} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big).$$

Определим оператор отождествления

$$J\ :\ \mathcal{H}_0 \mapsto \mathcal{H}_1\,,\ Jv = u = E(x)^{-1/2}v.$$

Этот оператор унитарен:

$$\forall(v_1\,,\,v_2 \in \mathcal{H}_0)\ :< v_1\,,\,v_2 >_0 =< Jv_1\,,\,Jv_2 >_1\,.$$

Пусть для простоты

$$E_0 = \mathsf{id}\,,\ (E(x) - E_0) \in C_0^\infty$$

Докажем существование волновых операторов

$$W_\pm(L\,,\,L_0\,,\,J) = \lim_{t\to\pm\infty} \exp(itL)J\exp(-itL_0)P_{ac}(L_0). \tag{2.24}$$

Сначала найдем оператор $U_{\mathsf{id}}(t)$.

Лемма 2.2.4.

$$\exp(-itL_0)u_0(x) = \sum_k \int \exp(i\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t))\mathcal{P}_k(\xi)\widehat{u}_0(\xi)d\xi\,,$$

где

$$\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t) = x\xi - t|\xi|\nu_k(\xi/|\xi|)\,,\ \widehat{u}_0(\xi) = \int \exp(-ix\cdot\xi)u_0(x)dx,$$
$$\mathcal{P}_k(\xi) \in M(m\,,\,m) - \textit{полиномы по}\ \xi_1\ldots\xi_d.$$

Доказательство. Преобразование Фурье.
Положим

$$u_k(x\,,\,t) = \int \exp(i\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t))\mathcal{P}_k\widehat{u}(\xi)d\xi\,,\ 1 \le k \le m. \tag{2.25}$$

Мы будем говорить,что функция $u_0(x) \in \Phi$,если ее преобразование Фурье $\widehat{u}_0(\xi)$ удовлетворяет условиям:

1. $\widehat{u}_0(\xi) \in C_0^\infty$;
2. $dist(supp|\widehat{u}_0(\xi)|\,,\,\{\xi||\nabla_\xi\nu_k(\xi)| = 0\}) > 0,$

Лемма 2.2.5. *Если* $u_0(x) \in \Phi$, *то*

$$\forall(R):\ \sup_{|x|<R} |u_k(x\,,\,t)| = O(t^{-2})\,,\ t \to \infty.$$

Доказательство. Справедливо равенство:

$$\Delta_\xi \exp(i\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)) = [-|\nabla_\xi \theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)|^2 + i\Delta_\xi \theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)] \exp(i\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)),$$
$$\exp(i\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)) =$$
$$[-|\nabla_\xi \theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)|^2 + i\Delta_\xi \theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t)]^{-1} \widehat{u}_0(\xi) \times \Delta_\xi \Big(\exp(i\theta_k(x\,,\,\xi\,,\,t))\Big)$$

Мы использовали то обстоятельство, что множества $[\cdots] = 0$ и $supp\widehat{u}_0$ при $t \gg 1$, $u_0(x) \in \Phi$ не пересекаются. Дальше -интегрируем по частям.

Так как множество Φ инвариантно относительно умножения на $\xi_1 \ldots \xi_d$, то отсюда вытекает

Следствие 2.2.1. *Справедлива оценка:*

$$\forall (R\,,\,p) : \sup_{|x|<R} |D_x^p u_k(x\,,\,t)| = O(t^{-2})\,,\, t \to \infty.$$

Пусть

$$u_0(x) \in \Phi\,,\, W(t) = \exp(itL) J \exp(-itL_0) u_0,$$

тогда

$$\frac{dW(t)}{dt} = i \exp(itL)(LJ - JL_0) \exp(-itL_0) u_0,$$
$$\Big\| \frac{dW(t)}{dt} \Big\| \le \|(J^{-1}LJ - L_0) \exp(-itL_0) u_0\| = O(t^{-2})\,,\, t \to \infty,$$

так как оператор

$$u \mapsto (J^{-1}LJ - L_0)u$$

-дифференциальный оператор второго порядка с финитными коэффициентами.

Так как множество Φ плотно в $\mathcal{H}_0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big\| \frac{dW(t)}{dt} \Big\| dt < \infty$$

,то волновые операторы (3.24) существуют.

Теорема Като о существовании волновых операторов при ядерных возмущениях. Одним из основных признаков существования волновых операторов является следующий.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены предположения* (2.79)-(3.2) *и оператор* $V = BJ - JA$, $\mathbf{Dom}(BJ - JA) = (\mathbf{Dom}(A) \bigcap \mathbf{Dom}(BJ))$ *продолжается по непрерывности до ядерного оператора* $V \in \mathcal{N}(\mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2)$. *Тогда волновые операторы* $W_\pm(B\,,\, A\,,\, J)$ *существуют.*

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько лемм. Мы будем доказывать существование оператора $W_+(B\,,\, A\,,\, J)$, доказательство существования оператора $W_-(B\,,\, A\,,\, J)$ аналогично.

Пусть

$$W(t) = \exp(itB)J\exp(-itA) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2),$$
$$Z(t\,,\, s) = W(t)^\star(W(t) - W(s)) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1).$$

Прямым вычислением доказывается

Лемма 2.2.6. *Справедливо равенство*

$$\|(W(t) - W(s))\phi\|_2^2 =< \phi\,,\, Z(t\,,\, s)\phi >_1 + < \phi\,,\, Z(s\,,\, t)\phi >_1 . \qquad (2.26)$$

Положим

$$\mathcal{D} = P_{ac}(A)\mathbf{Dom}(A) \bigcap \mathbf{Dom}(BJ). \qquad (2.27)$$

По предположению, множество $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}_1$.

Очевидна

Лемма 2.2.7. *Справедливо равенство*

$$\forall(\phi \in \mathcal{D}\,,\, a > 0) :\ < \phi\,,\, Z(t\,,\, s)\phi >_1 =< \phi\,,\, \exp(iaA)Z(t\,,\, s)\exp(-iaA)\phi >_1$$
$$- \int_0^a \frac{d}{db} < \phi\,,\, \exp(i(b+t)A)Z(t\,,\, s)\exp(-i(s+b)A)\phi >_1 db. \qquad (2.28)$$

Лемма 2.2.8. *Справедливо равенство:*

$$\forall(\phi \in \mathcal{D}) :\ \lim_{a\to\infty} \|\exp(iaA)Z(t\,,\, s)\exp(-iaA)\phi\|_1 = 0.$$

Доказательство. Имеем:

$$\|\exp(iaA)Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi\|_1 =$$
$$\|\exp(iaA)W^\star(t)\int_s^t \frac{d}{d\tau}\exp(i\tau B)\exp(-i(\tau+a)A)\phi d\tau\|_1 \le$$
$$\|\int_s^t \exp(i\tau B)(BJ-JA)\exp(-i(\tau+a)A)\phi d\tau\|_2 \le$$
$$\int\limits_s^t \|V\exp(-i(\tau+a)A)\phi\|_2 d\tau.$$

Поэтому в силу леммы 3.2.1

$$\|\exp(iaA)Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi\|_1 \le \int\limits_s^t \|V\exp(-i(\tau+a)A)\phi\|_2 d\tau \to 0\,,\; a\to\infty.$$

Лемма доказана.

Следствие 2.2.2. *Справедлива оценка:*

$$\|(W(t)-W(s))\phi\|_2^2 \le |<\phi\,,\,Z(t\,,\,s)\phi>_1| + |<\phi\,,\,Z(s\,,\,t)\phi>_1| \le$$
$$\sum_{\substack{\alpha=t\,,\,s\\ \beta=t\,,\,s}}\int_0^\infty |<\phi\,,\,\frac{d}{db}\exp(ibA)W^\star(\alpha)W(\beta)\exp(-iAb)\phi>_1|db. \qquad (2.29)$$

Пусть:

$$Y(t\,,\,s)\phi \stackrel{def}{=} \frac{d}{db}\exp(ibA)W^\star(t)W(s)\exp(-iAb)\phi. \qquad (2.30)$$

Лемма 2.2.9. *Справедлива оценка:*

$$\int_0^\infty |<\phi\,,\,Y(t\,,\,s)\phi>_1|\,db \le$$
$$const\|\phi\mid\mathcal{M}(A)\|\left(\sum_j s_j(V)\left(R(e_j\,,\,\phi\,,\,t)^{1/2}+R(e_j\,,\,\phi\,,\,s)^{1/2}\right)\right), \qquad (2.31)$$

где функция $R(e_j\,,\,\phi\,,\,t)$ *определяется формулой*(3.37)

Доказательство. Имеем:

$$
\begin{gathered}
Y(t\,,\,s) = i\exp(i(b+t)A)(AJ^\star\exp(-i(t-s)B)J- \\
J^\star\exp(-i(t-s)B)AJ\exp(-i(s+b)A))\phi.
\end{gathered}
$$

Так как

$$
V = BJ - JA\,,\ JA = BJ - V,\ ,\ AJ^\star = J^\star B - V^\star,
$$

то

$$
\begin{gathered}
Y(t\,,\,s)\phi = \\
i\exp(i(b+t)A)((J^\star B - V^\star)\exp(-i(t-s)B)J- \\
J^\star\exp(-i(t-s)B)(BJ-V))\exp(-i(s+b)A)\phi = \\
i\exp(i(b+t)A)(J^\star\exp(-i(t-s)B)V- \\
V^\star\exp(-i(t-s)B)J)\exp(-i(s+b)A)\phi = \\
i\exp(i(b+t)A)J^\star\exp(-i(t-s)B)V\exp(-i(s+b)A)\phi- \\
i\exp(i(b+t)A)V^\star\exp(-i(t-s)B)J\exp(-i(s+b)A)\phi; \\
<\phi\,,\,Y(t\,,\,s)\phi>_1= \\
i<\exp(i(t-s)B)J\exp(-i(b+t)A)\phi\,,\,V\exp(-i(s+b)A)\phi>_2 - \\
i<V\exp(-i(b+t)A)\phi\,,\,\exp(-i(t-s)B)J\exp(-i(s+b)A)\phi>_2\,. \qquad (2.32)
\end{gathered}
$$

Пусть

$$
V\phi = \sum_j s_j(V) < e_j\,,\,\phi > g_j \qquad (2.33)
$$

-разложение Шмидта оператора V. Учитывая, что оператор V -ядерный, мы поменяем операцию взятия скалярного произведения и суммирования и получим:

$$
\begin{gathered}
<\phi\,,\,Y(t\,,\,s)\phi>_1= \\
i\sum_j s_j(V) < J^\star\exp(-i(t-s)B)g_j\,,\,\exp(-i(b+t)A)\phi>_1^*< e_j\,,\,\exp(-i(s+b)A)\phi>_1 + \\
i\sum_j s_j(V) < e_j\,,\,\exp(-i(b+t)A)\phi>_1^*< J^\star\exp(i(t-s)B)g_j\,,\,\exp(-i(s+b)A)\phi>_1\,. \\
(2.34)
\end{gathered}
$$

Далее имеем:

$$\int_0^\infty |< J^\star \exp(-i(t-s)B)g_j\,,\, \exp(-i(b+t)A)\phi >_1^* < e_j\,,\, \exp(-i(s+b)A)\phi >_1|\,db \leq$$
$$\left(\int_0^\infty |< J^\star \exp(-i(t-s)B)g_j\,,\, \exp(-i(b+t)A)\phi >_1|^2\,db\right)^{1/2} \times$$
$$\left(\int_0^\infty |< e_j\,,\, \exp(-i(s+b)A)\phi >_1|^2\,db\right)^{1/2}.$$

Согласно лемме М.Розенблюма

$$\int_0^\infty |< J^\star \exp(-i(t-s)B)g_j\,,\, \exp(-i(b+t)A)\phi >_1|^2\,db \leq$$
$$\int_{-\infty}^\infty |< J^\star \exp(-i(t-s)B)g_j\,,\, \exp(-ibA)\phi >_1|^2\,db \leq \tag{2.35}$$
$$2\pi\|J^\star g_j\|^2 \cdot \|\phi|\mathcal{M}(A)\|^2 \leq const\|\phi|\mathcal{M}(A)\|^2. \tag{2.36}$$

Положим по определению

$$\forall(e_j \in \mathcal{H}_1\,,\, \|e_j\|_1 = 1\,,\, \phi \in \mathcal{M}(A))\ :$$
$$R(e_j\,,\, \phi\,,\, t) = \int_t^\infty |< e_j\,,\, \exp(-iAb)\phi >_1|^2 db. \tag{2.37}$$

В силу леммы М.Розенблюма

$$\forall(j\,,\, t)\ : R(e_j\,,\, \phi\,,\, t) < 2\pi\|\phi|\mathcal{M}(A)\|^2\,,\, \forall j\ : R(e_j\,,\, \phi\,,\, t) \to 0\,,\, t \to \infty. \tag{2.38}$$

Имеем:

$$\int_0^\infty |< J^\star \exp(-i(t-s)B)e_j\,,\, \exp(-i(b+t)A)\phi >_1^* < e_j\,,\, \exp(-i(s+b)A)\phi >_1|\,db \leq$$
$$const\|\phi|\mathcal{M}(A)\| \sum_j s_j(V) R(e_j\,,\, \phi\,,\, s)^{1/2}. \tag{2.39}$$

Интеграл от второго слагаемого в (3.32) оценивается аналогично. Оценка (3.31) доказана.

Следствие 2.2.3. *Справедлива оценка:*

$$\|(W(t)-W(s))\phi\|_2^2 \leq const\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \left(\sum_j s_j(V)\left(R(e_j\,,\, \phi\,,\, t)^{1/2} + R(e_j\,,\, \phi\,,\, s)^{1/2}\right)\right). \tag{2.40}$$

Из (3.40) и (3.38)следует, что

$$\forall(\phi \in \mathcal{D}) : \|(W(t) - W(s))\phi\|_2 \to 0\,, \min(t\,, s) \to \infty.$$

Так как $\mathcal{D}$ плотно в $P_{ac}\mathcal{H}$, то теорема доказана.

Из теоремы 3.2.1 вытекает часто используемая теорема Като.

Теорема 2.2.2. *Пусть A и B -самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и оператор $V = B - A$ с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $\mathbf{Dom}(V) = \mathbf{Dom}(A) \bigcap \mathbf{Dom}(B)$ продолжается по непрерывности до ядерного оператора в пространстве $\mathcal{H}$. Тода волновые операторы $W_{\pm}(A\,, B\,, \mathsf{id})\,, W_{\pm}(B\,, A\,, \mathsf{id})$ существуют и полны.*

2.3 Принцип инвариантности волновых операторов.

Следующее утверждение называется принципом инвариантности волновых операторов и позволяет существенно расширить область применимости теоремы 3.2.1.

Теорема 2.3.1. *Если выполнены условия теоремы 3.2.1 и $h(\lambda)$ -такая действительная непрерывно дифференцируемая на спектре оператора A функция, что*

$$\forall\lambda \in \sigma(A) : |h'(\lambda)| > 0,$$

то волновые операторы $W_{\pm}(h(B)\,, h(A)\,, J)$ существуют, причем

$$(\forall\lambda \in \sigma(A) : h'(\lambda) > 0) \Rightarrow (W_{\pm}(h(B)\,, h(A)\,, J) = W_{\pm}(B\,, A\,, J),$$
$$(\forall\lambda \in \sigma(A) : h'(\lambda) < 0) \Rightarrow (W_{\pm}(h(B)\,, h(A)\,, J) = W_{\mp}(B\,, A\,, J).$$

Доказательство. Полагая в (3.40) $s = 0\,, t \to \infty$, мы получаем:

$$\|(W_{+}(B\,, A\,, J)\phi - J\phi\|_2^2 \leq const\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \sum_j s_j(V) R(e_j\,, \phi\,, 0)^{1/2}. \tag{2.41}$$

В левой части(3.41) делаем замену

$$\phi \to \exp(-i\tau h(A))\phi.$$

Получим:

$$\|(W_{+}(B\,, A\,, J)\exp(-i\tau h(A))\phi - J\exp(-i\tau h(A))\phi\|_2^2 =$$

(сплетающее свойство волновых операторов)

$$\|\exp(-i\tau h(B))(W_+(B\,,\,A\,,\,J)\phi - \exp(i\tau h(B))J\exp(-i\tau h(A)))\phi\|_2^2 =$$

(унитарность оператора $\exp(-i\tau h(B))$

$$\|W_+(B\,,\,A\,,\,J)\phi - \exp(i\tau h(B))J\exp(-i\tau h(A))\phi\|_2^2 \leq$$
$$\|\phi|\mathcal{M}(A)\|\sum_j s_j(V)R(e_j\,,\,\exp(-i\tau h(A))\phi\,,\,0)^{1/2}. \tag{2.42}$$

Мы учли, что

$$\|\exp(-i\tau h(A))\phi|\mathcal{M}(A)\| = \|\phi|\mathcal{M}(A)\|$$

Если функция

$$\lambda \mapsto \omega(\lambda\,,\,g_j\,,\,\phi)$$

ступенчатая:

$$\omega(\lambda\,,\,g_j\,,\,\phi) = \begin{cases} 1\,,\ \lambda \in [\alpha\,,\,\beta], \\ 0\,,\ \lambda \notin [\alpha\,,\,\beta], \end{cases}$$

то с учетом неравества $h'(\lambda) > 0$ мы имеем оценку:

$$|\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\tau h(\lambda) - ib\lambda)\omega(\lambda\,,\,g_j\,,\,\phi)d\lambda|^2 =$$
$$const.|\int_{\alpha}^{\beta} \exp(-ib\lambda - i\tau h(\lambda))d\lambda|^2 < const'.(\tau+b)^{-2},$$

из которой следует, что в рассматриваемом случае правая часть неравенства (3.42) стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Общий случай получается из рассмотренного применением теоремы Банаха-Штейнгауза к зависящему от параметра τ семейству отображений пространства $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,d\lambda)$ в пространство $L^2((0\,,\,\infty)\,,\,db))$:

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ib\lambda - i\tau h(\lambda))\omega(\cdot\,,\,\lambda)d\lambda,$$

так как множество линейных комбинаций ступенчатых функций плотно в $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,d\lambda)$.

Замечание 2.3.1. Если существуют понимаемые как сильные пределы при $t \to \pm\infty$ волновые операторы $W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)$, то справедливо равенство

$$\forall(\phi \in A_{ac}):$$
$$\lim_{\epsilon\to+0} \|(W_\pm(B\,,\,A\,,\,J)\phi - \epsilon\int_0^\infty \exp(-\epsilon t)\exp(\pm itB)J\exp(\mp itA))\phi dt\| = 0. \tag{2.43}$$

Операторы $W_{\pm}(B\,,\,A\,,\,J)$ мы будем называть нестационарными абелевыми волновыми операторами, если для них выполнено равенство (3.43). В работе [6] дано другое определение абелева волнового оператора.

Пределы (3.3) в слабой операторной топологии называются слабыми волновыми операторами. Если существуют волновые операторы (т.е. пределы в сильной операторной топологии), то слабые волновые операторы существуют. При некоторых условиях из существования слабых волновых операторов вытекает существование сильных волновых операторов.

Пусть $P(\Lambda\,,\,A)$ -спектральный проектор на подмножество Λ абсолютно непрерывного спектра оператора A. $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_2$, отождествление J задано равенством $J=P(\Lambda\,,\,A)$. Волновые операторы $W_{\pm}(B\,,\,A\,,\,J)$ при таком отождествлении называются локальными волновыми опраторами (слабыми или сильными). Отметим, что они часто используются физиками.

2.4 Оператор рассеяния в диагональном представлении невозмущенного оператора .

Пусть $(a\,,\,b)$ -конечный или бесконечный интервал и

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_1=L^2((a\,,\,b)\mapsto h)\;,\;h=L^2(\Omega\,,\,d\omega),\\&\forall(\phi\in C_0((a\,,\,b)\mapsto h))\;:\;A\phi(\lambda\,,\,\omega)=\lambda\phi(\lambda\,,\,\omega).\end{aligned}$$

Оператор рассеяния коммутирует с оператором A, поэтому в диагональном представлении оператора A оператор рассеяния задается функцией, значения которой есть унитарные операторы в пространстве h:

$$S(B\,,\,A\,,\,J)(\lambda)\;:\;(a\,,\,b)\ni\lambda\mapsto S(B\,,\,A\,,\,J)(\lambda)\in\mathcal{L}(L^2(\Omega\,,\,d\omega)\mapsto L^2(\Omega\,,\,d\omega)).$$

Теорема 2.4.1. *Предположим, что в диагональном представлении оператора A заданный формулами* (2.85)-(2.86) *оператор $T_{\pm}(\lambda+i0\,,\,A\,,\,B)$ -интегральный оператор с непрерывно дифференцируемым по переменным $\mu\,,\,\nu$ в окрестности точек $\mu=\lambda\,,\,\nu=\lambda$ и абсолютно интегрируемым по всем переменным ядром:*

$$T_{\pm}(\lambda\,,\,A\,,\,B)\phi(\mu\,,\,\omega)=\int t_{\pm}(\lambda+i0\;|\;\mu\,,\,\omega\,;\,\nu\,,\,\omega')\phi(\nu\,,\,\omega')d\nu d\omega'.\quad(2.44)$$

Предположим, что волновые операторы $W_{\pm}(B\,,\,A\,,\,J)\,,\,W_{\pm}(A\,,\,B\,,\,J^{\star})$ существуют. Тогда оператор рассеяния в пространстве $\mathcal{H}_1$ задается формулой (3.48).

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 2.4.1. *Пусть в диагональном представлении оператора A элементы $\phi \in \mathcal{H}_1$, $\psi \in \mathcal{H}_1$ задаются непрерывно дифференцируемыми функциями со значениями в пространстве h:*

$$\phi = \phi(\lambda\,,\,\omega)\,,\,\psi = \psi(\lambda\,,\,\omega).$$

Тогда

$$\lim_{\epsilon+0} \frac{\epsilon}{\pi} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\phi\,,\,R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\psi > = < \phi(\lambda)\,,\,\psi(\lambda) >_h$$

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{\epsilon+0} \frac{\epsilon}{\pi} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\phi\,,\,R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\psi > =$$
$$\lim_{\epsilon+0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_a^b (((\mu - \lambda - i\epsilon)^{-1}\phi(\mu\,,\,\omega))^*(\mu - \lambda - i\epsilon)^{-1}\psi(\mu\,,\,\omega)d\mu d\omega =$$
$$\lim_{\epsilon+0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_a^b \frac{1}{(\mu - \lambda)^2 + \epsilon^2} \int \phi(\mu\,,\,\omega)^*\psi(\mu\,,\,\omega)d\omega d\mu = < \phi(\lambda)\,,\,\psi(\lambda) >_h .$$

Лемма 2.4.2. *Пусть выполнены условия леммы 3.4.1. Пусть оператор k в диагональном представлении оператора A задается гладким по переменным $\mu\,,\,\nu$ абсолютно интегрируемым ядром:*

$$k\psi(\mu\,,\,\omega) = \int k(\mu\,,\,\omega;\nu\,,\,\omega')\psi(\nu\,,\,\omega')d\omega' d\nu.$$

Тогда в диагональном представлении оператора A

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\lambda)k(\exp(-itA)\psi)(\nu\,,\,\omega)dt = 2\pi \int k(\nu\,,\,\omega;\lambda\,,\,\omega')\psi(\lambda\,,\,\omega')d\omega'. \tag{2.45}$$

Доказательство. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\lambda)k(\exp(-itA)\psi)(\nu\,,\,\omega)dt =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\lambda) \left(\int k(\mu\,,\,\omega;\nu\,,\,\omega') \exp(-it\nu)\psi(\nu\,,\,\omega')d\omega' d\nu \right) dt.$$

При фиксированном μ интеграл по $d\nu$ мы можем рассматривать как преобразование Фурье функции

$$\nu \mapsto \int k(\mu\,,\,\omega;\nu\,,\,\omega')\psi(\nu\,,\,\omega')d\omega',$$

которая продолжена нулем вне интервала $(a\,,\,b)$. Тогда интеграл по dt мы можем рассматривать как обратное преобразование Фурье. Получаем искомую формулу. Лемма доказана.

Лемма 2.4.3. *Если волновые операторы* $W_{\pm}(B\,,\,A\,,\,J)\,,\,W_{\pm}(A\,,\,B\,,\,J^{\star})$, *существуют, то справедливо равенство* (3.46).

Доказательство. Имеем:

$I_{+} - S(B\,,\,A\,,\,J) = W_{+}(B\,,\,A\,,\,J)^{\star}W_{+}(B\,,\,A\,,\,J) - W_{+}(B\,,\,A\,,\,J)^{\star}W_{-}(B\,,\,A\,,\,J) =$
$W_{+}(B\,,\,A\,,\,J)^{\star}(W_{+}(B\,,\,A\,,\,J) - W_{-}(B\,,\,A\,,\,J))$.

$< \phi\,,\,(I_{+} - S(B\,,\,A\,,\,J))\psi >=$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt} < \phi\,,\,W_{+}(B\,,\,A\,,\,J)^{\star}\exp(itB)J\exp(-itA)P_{ac}\psi > dt =$

$\displaystyle i\int_{-\infty}^{+\infty} < \exp(-itB)W_{+}(B\,,\,A\,,\,J)\phi\,,\,\exp(itB)(BJ - JA)\exp(-itA)\psi > dt =$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} < W_{+}(B\,,\,A\,,\,J)\exp(-itA)\phi\,,\,V\exp(-itA)\psi > dt =$

$\displaystyle i\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\lim_{\epsilon+0}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\exp(-iAt)\phi\,,$

$\displaystyle J^{\star}R(\lambda + i\epsilon\,,\,B)V\exp(-itA)\psi > d\lambda\Big)dt =$

$\displaystyle i\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\epsilon+0}\frac{\epsilon}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\exp(-iAt)\phi\,,$

$\displaystyle R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)T_{+}(\lambda + i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\exp(-itA)\psi > \lambda\Big)dt.$

Окончательно получаем:

$$< \phi\,,\,(I_{+} - S(B\,,\,A\,,\,J))\psi >= i\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\epsilon+0}\frac{\epsilon}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\phi\,, \tag{2.46}$$

$$R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\exp(iAt)T_{+}(\lambda + i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\exp(-itA)\psi > d\lambda\Big)dt. \tag{2.47}$$

Заметим, что до сих пор мы не использовали никаких специальных предположений об операторе T (мы использовали только существование и ограниченность оператора T). Теперь предположим, что в диагональном представлении оператора A оператор T -это интегральный оператор с "хорошим" ядром , функции ϕ , ψ по переменной λ имеют компактный носитель и принадлежат C_0^∞. Тогда предел в (3.46) на основании доказанных выше лемм вычисляется тривиально и мы получаем:

$$S(B\,,\,A\,,\,J)\psi(\lambda\,,\,\omega) = I_+(\lambda)\psi(\lambda\,,\,\omega) - 2\pi i \int t_+(\lambda + i0\ |\,,\,\lambda\,,\,\omega\,;\,\lambda\,,\,\omega')\psi(\lambda\,,\,\omega')d\omega' \tag{2.48}$$

Теорема доказана.

Остановимся подробнее на формуле (3.48).

Во-первых,отметим, что функция $t_+(\lambda + i0\ |\,,\,\lambda\,,\,\omega\,;\,\lambda\,,\,\omega')$ зависит от диагонализующего оператор A преобразования (таких преобразований может быть много).

Пусть $\left(e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\right)^* \equiv e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^\dagger$ -функции, которые задают обратное к диагонализирующему преобразованию оператора A:

$$f(x) = \int e^(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^\dagger U_d(f)(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega. \tag{2.49}$$

$T(\lambda + i0)e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2)^\dagger$ -результат действия оператора $T(\lambda + i0)$ на вектор $e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2)^\dagger$,

$$k(\lambda\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) = \int e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_1)T(\lambda + i0)e^(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2)^\dagger dx \tag{2.50}$$

- вектор $T(\lambda + i0)e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^\dagger$ в диагональном представлении оператора A_0.

Формула (3.48) подробнее может быть записана так:

$$S(B\,,\,A\,,\,J)\psi(\lambda\,,\,\omega_1) = I_+(\lambda)\psi(\lambda\,,\,\omega_1) - 2\pi i \int k(\lambda\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2)\psi(\lambda\,,\,\omega_2)d\omega_2 \tag{2.51}$$

Ясно, что выражение (3.51) зависит от выбора диагонализирующего преобразования.

Замечание о существовании оператора рассеяния для оператора Шредингера. Нам будет удобно несколько изменить обозначения. Заменим обозначение A на A_0 , B на A.

Докажем теорему.

Теорема 2.4.2. *Пусть*

$$\begin{aligned}&\mathbf{Dom}(A_0) = \mathbf{Dom}(A) = H^2(\mathbb{R}^n),\\ &A_0 = -\Delta\ ,\ A = -\Delta + V,\end{aligned} \tag{2.52}$$

V *-оператор умножения на такую функцию, что*

$$|V(x)| < C\exp(-d|x|). \tag{2.53}$$

Тогда волновые операторы $W_\pm(A\,,\,A_0)\,,\,W_\pm(A_0\,,\,A\,)$ *существуют и полны. Оператор рассеяния существует и матрица рассеяния дается формулой* (3.48) *(или* (3.51)*).*

Доказательство. Положим

$$g(t) = \exp(-At) - \exp(-A_0 t).$$

Согласно теореме B.0.5 $g(t)$ -ядерный оператор. Поэтому волновые операторы $W_\pm(\exp(-At)\,,\,\exp(-A_0t))\,,\,W_\pm(\exp(-A_0t)\,,\,\exp(-At))$ существуют и полны. В силу принципа инвариантности волновые операторы $W_\pm(A\,,\,A_0)\,,\,W_\pm(A_0\,,\,A\,)$ существуют и полны. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$ оператор $T(\lambda\,,\,\exp(-A_0t)\,,\,\exp(-At))$ -интегральный оператор с бесконечно гладким экспоненциально убывающим по всем переменным ядром. Следовательно, в диагональном представлении оператора $\exp(-A_0t)$ (которое на носителе функции $\psi(\lambda\,,\,\omega)$ с точностью до несущественных множителей совпадает с преобразованием Фурье) интегральное ядро оператора $T(\lambda\,,\,\exp(-A_0t)\,,\,\exp(-At))$ будет удовлетворять условиям теоремы 3.4.1.

Замечание 2.4.1. В теореме E.0.7 мы укажем формулу для вычисления коэффицинта k в (3.51) через решения уравнения Липмана-Швингера.

Комментарии и литературные указания В настоящее время учебное изложение нестационарной теории рассеяния практически приобрело канонический вид: различные способы изложения часто отличаются не больше,чем интерпретацией деталей вычислений. Причины, по которым в некоторых случаях удобно развивать теорию рассеяния для двух пространств, изложены в [61]. Пример, когда введение зависящего от времени оператора отождествления оказывается отвечающим существу задачи (дальнодействующее рассеяние), приведен в [10].В задачах квантовой механики обычно достаточно теории рассеяния для одного пространства. Изложение нестационарной теории рассеяния в объеме, достаточном для рассматриваемых в данной книге приложений, есть в [65],[64].

Глава 3

Элементы стационарной теории рассеяния.

Уравнение Липмана-Швингера [50] -одно из классических уравнений математической физики ([52], [53], [56], [57],подробное обсуждение физики, связанной с уравнением Липмана-Швингера есть в [54]). Уравнение Липмана-Швингера используется при описании рассеяния плоской волны , при построении собственных функций непрерывного спектра оператора Шредингера методами теории возмущений и для оценки резольвенты оператора Шредингера.

3.1 Задача рассеяния в стационарной постановке.

Стационарная задача рассеяния для уравнения Шредингера в трехмерном пространстве. Стационарная задача рассеяния для уравнения Шредингера в трехмерном пространстве приводит к классической форме уравнения Липмана-Швингера . Сформулируем задачу рассеяния.

Предположим, что действительная функция $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, непрерывно дифференцируема и убывает на бесконечности быстрее второй степени $(1/|x|)$:

$$|V(x)| < C(1+|x|^2)^{-(1+\delta)}\,,\ \delta > 0. \tag{3.1}$$

Условие (4.1) обеспечивает абсолютную сходимость интеграла от интегрального ядра основного оператора в интегральном уравнении Липмана-Швингера (4.10). В современных исследованиях условие (4.1) значительно ослаблено .

Определение 3.1.1. Функция

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\;\omega) \in C_b^2(\mathbb{R}^3)\,,\,\lambda > 0,$$

называется решением стационарной задачи рассеяния для уравнения Шредингера, если она есть решение уравнения

$$\forall (x \in \mathbb{R}^3)\;:\; -\Delta_x e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) + V(x) e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \lambda e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,,\,\lambda > 0\,, \tag{3.2}$$

и представима как

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}) + w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,, \tag{3.3}$$

где равномерно по x на компактах и по n на единичной сфере:

$$w(rn + x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = O(1/r)\,,\,(\partial_r - i\sqrt{\lambda}) w(rn + x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = o(1/r)\,,\,r \to \infty. \tag{3.4}$$

Условия (4.4) называются условиями излучения (условиями излучения Зоммерфельда, [47]).

Положим

$$\Lambda w(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \int_{|n|=1} w(rn + x\,,\,\lambda\,,\,\omega) dn.$$

Если функция w удовлетворяет условиям излучения (4.4), то равномерно по x на компактах

$$\Lambda w(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = O(1/r)\,,\,(\partial_r - i\sqrt{\lambda}) \Lambda w(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = o(1/r)\,,\,r \to \infty. \tag{3.5}$$

Условия (4.5) (или в эквивалентной форме (4.4)) мы будем называть условиями излучения Зоммерфельда.

Определим функцию

$$k(r\,,\,\lambda) = \frac{\exp(ir\sqrt{\lambda})}{4\pi r}\,,\,0 \le \arg\sqrt{\lambda} \le \pi\,,\,r > 0. \tag{3.6}$$

Если $\epsilon > 0\,,\,\lambda \in \mathbb{R}^1_+$, то в точке $\lambda + i\epsilon$ резольвента оператора $-\Delta$ на функции $\phi \in \mathcal{H}$ действует как интегральный оператор:

$$R(\lambda + i\epsilon\,,\,-\Delta)\phi(x) = \int k(|x - y|\,,\,\lambda + i\epsilon)\phi(y) dy. \tag{3.7}$$

В дальнейшем под оператором $R(\lambda + i\epsilon\,,\,-\Delta)$ мы будем понимать интегральный оператор, задаваемый формулой (4.7) *на всех функциях из* $C_b(\mathbb{R}^3)$.

Дифференцируя по известным правилам интеграл типа объемного потенциала в (4.7), легко показать, что справедлива

Лемма 3.1.1. *Если* $\phi \in C_b(\mathbb{R}^3)$, $\epsilon > 0$, *то*

$$(\lambda + i\epsilon + \Delta_x) \int k(|x-y| \, , \, \lambda + i\epsilon)\phi(y)dy = \phi(x).$$

$$\forall (\phi \in C_b^2) \, : \, \int k(|x-y| \, , \, \lambda + i\epsilon)(\lambda + i\epsilon + \Delta_y)\phi(y)dy = \phi(x).$$

В дальнейшем удобно иметь условия излучения в несколько другой формулировке.

Лемма 3.1.2. *Если функция* $w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) \in C_b(\mathbb{R}^3)$ *удовлетворяет условиям излучения* (4.5)*, то равномерно по* x *на компактах*

$$\epsilon R(\lambda + i\epsilon \, , \, -\Delta) \cdot w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) \to 0 \, , \, \epsilon \to 0. \tag{3.8}$$

Эта лемма доказана в приложении.

Соотношение (4.8) часто встречается в теории рассеяния (см. [9],14.3-14.5), его можно рассматривать как одну из форм условий излучения: принципа предельного поглощения (термин употреблен в его старом значении) [45].

Лемма 3.1.3. *Если функция*

$$e_d(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) = \exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}) + w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) \tag{3.9}$$

есть решение стационарной задачи рассеяния (4.1.1)*, то функция* $w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega)$ *есть решение интегрального уравнения*

$$w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) = \int k(|x-y| \, , \, \lambda + i0)V(y)\left(\exp(-iy\omega\sqrt{\lambda}) + w(y \, , \, \lambda \, , \, \omega)\right)dy. \tag{3.10}$$

Доказательство. Имеем:

$$-\Delta_x e_d(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) + V(x)e_d(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) = \lambda e_d(x \, , \, \lambda \, , \, \omega).$$

Отсюда следует, что

$$(\Delta_x + \lambda + i\epsilon)w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) - i\epsilon w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) = V(x)(\exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}) + w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega)),$$
$$w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) - i\epsilon R(\lambda + i\epsilon \, , \, -\Delta_x) \cdot w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) =$$

(мы учли (4.1))

$$R(\lambda + i\epsilon \, , \, -\Delta_x) \cdot (V(x)(\exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}) + w(x \, , \, \lambda \, , \, \omega))).$$

Переходя в этом равенстве к пределу $\epsilon \to 0$ и учитывая, что в силу условий излучения справедливо соотношение (4.8), а предел правой части этого равенства существует в силу ограничения (4.1), мы получим утверждение леммы.

Дифференцируя правую часть (4.10) по x, мы получим

Лемма 3.1.4. *Если функция* $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ *есть решение интегрального уравнения* (4.10), *то функция*

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \stackrel{def}{=} \exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}) + w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$$

есть решение уравнения

$$-\Delta_x e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) + V(x)e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \lambda e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega).$$

Вычисляя асимптотику правой части уравнения (4.10), мы получим

Лемма 3.1.5. *Если функция* $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ *есть (ограниченное) решение интегрального уравнения* (4.10), *то справедлива асимптотика*

$$\begin{aligned}
&\forall (n \in \mathbb{R}^3\,,\,|n| = 1):\\
&w(rn\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \frac{\exp(ir\sqrt{\lambda})}{r}a(n\,,\,\omega\,,\,\lambda) + O((1/r)^2)\,,\, r \to \infty\,,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$a(n\,,\,\omega\,,\,\lambda) = \frac{1}{4\pi}\int \exp(-i(n\,,\,y)\sqrt{\lambda})V(y)e_d(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)dy. \tag{3.12}$$

Асимптотику (4.11) *можно дифференцировать по* r, *и поэтому решение интегрального уравнения* (4.10) *удовлетворяет условиям излучения.*

Подробное доказательство этой леммы приведено в приложении.

Из лемм 4.1.3, 4.1.4 и 4.1.5 следует

Теорема 3.1.1. *Для того, чтобы функция* (4.9) *была бы решением стационарной задачи рассеяния* (4.1.1) , *необходимо и достаточно, чтобы функция* $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ *в* (4.9) *была бы решением интегрального уравнения* (4.10).

Отметим, что как видно из доказательства, роль условий излучения сводится к доказательству соотношения (4.8).

Коэффициент a в (4.11) -это измеряемая на опыте величина (диаграмма направленности), слагаемое $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ в (4.9) иногда называется радиационной частью решения задачи рассеяния.

Итак, мы свели стационарную задачу рассеяния (4.1.1) для уравнения Шредингера в трехмерном пространстве к интегральному уравнению (4.10). Это интегральное уравнение и есть уравнение Липмана-Швингера.

Условия (4.4) называются условиями излучения Зоммерфельда ([47]). В такой форме они обычно рассматриваются в теории дифракции.

В экспоненте в формуле (4.3) возможны два знака, в условиях излучения перед производной в формуле (4.4) тоже возможны два знака, если эта зависимость от знаков существенна, мы будем ее указывать: первым указывается знак в экспоненте, вторым -в условиях излучения, в подробных обозначениях выше сформулирована задача для функции $e_d(-\,,\,+\,\mid x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$. В теории потенциального рассеяния в зависимости от задачи условия излучения формулируются по-разному ([45] , [5] , [12] , [9]), но какие-то дополнительные условия для выделения единственного решения при переходе от дифференциального уравнения к интегральному уравнению обычно нужны (в интегральном уравнении нужно выбрать либо запаздывающие функции Грина, либо опережающие).

Уравнение (4.2) сначала рассматривалось в работах по рассеянию в квантовой механике, в работах по теории дифракции функция e_d интерпретировалась как функция, описывающая суперпозицию падающей плоской волны и волны, отраженной от препятствия. Основания для такой интерпретации изложены в [3]. Условия излучения в задаче рассеяния выделяют единственное решение дифференциального уравнения. Можно показать, что первая оценка в (4.4) следует из второй оценки.

Ниже мы выясним, когда интегральное уравнение (4.10) имеет решение и это решение единственно.

В теории дифракции соответствующие интегральные уравнения методами теории потенциала сводятся к интегральным уравнениям на поверхности отражающих тел.

Стационарная задача рассеяния для уравнения Шредингера на прямой. Эта задача аналогична предыдущей.

Мы предположим, что действительная функция $V(x)\,,\,x \in \mathbb{R}^1$, непрерывно дифференцируема и убывает на бесконечности быстрее первой степени x:

$$|V(x)| < C(1 + |x|^2)^{-(1+\delta)/2}\,,\,\delta > 0. \tag{3.13}$$

Определение 3.1.2. Функция

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\;\omega) \in C_b^2(\mathbb{R}^1)\,,\,\lambda > 0\,,\,\omega = \pm 1$$

называется решением стационарной задачи рассеяния для уравнения Шредингера, если она есть решение уравнения

$$\forall (x \in \mathbb{R}^1)\,:\,-\frac{d^2 e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{dx^2} + V(x) e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \lambda e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,,\,\lambda > 0\,, \tag{3.14}$$

и представима как

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \exp(-ix\omega\sqrt{\lambda}) + w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,,\,\omega = \pm 1, \tag{3.15}$$

где функция $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ удовлетворяет условиям излучения для одномерного случая:

$$\frac{dw(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{dx} = \pm i\sqrt{\lambda} w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) + o(1)\,,\,x \to \pm\infty. \tag{3.16}$$

Лемма 3.1.6. *Если функция w удовлетворяет условиям излучения* (4.16), *то равномерно по x на компактах*

$$\epsilon R\Big(\lambda + i\epsilon,\,,\,-\frac{d^2}{d^2x}\Big) w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \to 0\,,\,\epsilon \to 0. \tag{3.17}$$

Теорема 3.1.2. *Функция e_d есть решение задачи рассеяния в том и только том случае, если функция w в* (4.15) *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)}{2i\sqrt{\lambda}} V(y) \Big(\exp(-iy\omega\sqrt{\lambda}) + w(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)\Big) dy. \tag{3.18}$$

Доказательство. Пусть функция e_d есть решение задачи рассеяния. Подставим (4.15) в (4.14), прибавим к обеим частям полученного равенства $i\epsilon w$, перенесем $-\frac{d^2}{d^2x}$ вправо, применим к полученному равенству оператор $R\Big(\lambda + i\epsilon\,,\,-\frac{d^2}{d^2x}\Big)$ и перейдем к пределу $\epsilon \to 0$. Получим (4.18). Если функция w есть решение интегрального уравнения (4.18), то легко проверяется, что она удовлетворяет условиям излучения и уравнению (4.14).

Итак, мы доказали эквивалентность дифференциального уравнения стационарной задачи рассеяния на прямой и условий излучения интегральному уравнению Липмана-Швингера.

Обозначим интегральный оператор в (4.18) (в (4.10)) через $\Gamma_+(\lambda)$. Ниже (стр. 71) мы докажем, что если потенциал $V(x)$ достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$, то оператор $\Gamma_+(\lambda)$ есть оператор Гильберта-Шмидта и поэтому компактен в некотором вспомогательном пространстве $\mathcal{H}_\rho^-$ и

$$\mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) = \mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - A)\,,\ A = -\Delta + V.$$

Если потенциал достаточно быстро (в одномерном случае -быстрее $|x|^{-(1+\delta)}$, в трехмерном - быстрее $|x|^{-2(1+\delta)}$)убывает, то ([9])

Следствие 3.1.1.

$$\forall(\lambda > 0)\ :\ \mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) = 0, \tag{3.19}$$

и поэтому из эквивалентности стационарных задач рассеяния интегральному уравнению следует, что решение стационарных задач рассеяния (4.1.1) *и* (4.1.2) *для быстро убывающего потенциала существует и единственно.*

Общая схема. Обсудим общую схему рассуждений и основные предположения , которые будут сделаны при изучении уравнения Липмана-Швингера .

Мы предполагаем, что рассматриваемое гильбертово пространство $\mathcal{H}$ есть $L^2(\mathbb{R}^n), n = 1\,, 3$, и, если специально не сказано другое, то по умолчанию мы будем считать, что $\mathcal{H}_\rho^+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_\rho^-$ - описанное на стр. 19 оснащение гильбертова пространства $\mathcal{H}$, и $\rho = \exp(b|x|)\,, b > 0$ или $\rho = (1 + x^2)^{\sigma/2}$.

В большинстве случаев при исследовании уравнения Липмана-Швингера мы будем предполагать, что оператор $A_0 = (-\Delta)$ -это оператор Лапласа, а A -оператор Шредингера с потенциалом V (функцию V мы будем называть потенциалом,если она рассматривается как оператор умножения). Но основные наши результаты применимы в более общей ситуации. В частности, в некоторых задачах нам удобно воспользоваться принципом инвариантности волновых операторов и перейти к операторам

$$A_0 = \exp(t\Delta)\,,\ A = \exp(t(\Delta - v)),\ V = A - A_0.$$

Мы хотели бы обратить внимание на то, что значительная часть наших построений опирается не на конкретный вид операторов A и A_0, а на их свойства как операторов в гильбертовом пространстве.

Пример оператора Шредингера в трехмерном пространстве с экспоненциально убывающим потенциалом для нас будет служить универсальным примером, в котором все условия на операторы A_0 , A выполнены .

Определение 3.1.3. Функция $w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\ \mid\ x\,,\,\lambda)$ удовлетворяет обобщенным условиям излучения (со знаком $+$ или со знаком $-$), если

$$w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\ \mid\ x\,,\,\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\,,\,\forall(\epsilon>0)\,:\,w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\ \mid\ x\,,\,\lambda) \in \mathbf{Dom}(R(\lambda\pm i\epsilon\,,\,A_0))$$

(оператор R рассматривается как оператор $\mathcal{L}(\mathcal{H}^-_\sigma \mapsto L^\infty)$) и равномерно по x на компактах

$$\forall(\lambda\in\sigma_{ac}(A_0))\,:\,\epsilon R(\lambda\pm i\epsilon\,,\,A_0)w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\ \mid\ x\,,\,\lambda)\to 0\,,\,\epsilon\to+0. \quad (3.20)$$

(В формуле (4.20) знак перед $i\epsilon$ берется в соответствии с $(\cdot)_1)$. В случае пространства трех измерений и $A_0=(-\Delta)$ это условие фактически эквивалентно выбору знака в $\exp(\pm i|x-y|\sqrt{\lambda})$ в интегральном уравнении (4.10). Аналогичные условия рассматривались в [9].

Определение 3.1.4. Непрерывно дифференцируемая функция e_d называется решением стационарной задачи рассеяния для оператора $A=A_0+V$, если она удовлетворяет уравнению

$$Ae_d=\lambda e_d, \quad (3.21)$$

и представима в виде

$$e_d=e_d^0+w, \quad (3.22)$$

где функция $w\in\mathcal{H}^-_\rho$ и удовлетворяет обобщенным условиям излучения

$$\epsilon R(\lambda\pm i\epsilon\,,\,A_0)w\to 0\,,\,\epsilon\to 0.$$

(со знаком $+$ или со знаком $-$), а функция e_d^0 диагонализует оператор A_0.

В рассматриваемом нами случае собственные функции непрерывного спектра оператора A_0 двукратно вырождены:

$$e_d^0=c(\lambda)\exp(\pm i(\omega\,,\,x)\sqrt{\lambda})$$

Ниже мы докажем, что решение стационарной задачи рассеяния для оператора A диагонализует оператор A.

Если не оговорено другое, то в дальнейшем мы будем нормировать функции e_d^0 (выбирать коэффициент $c(\lambda)$) так, чтобы для разложения в интеграл Фурье по функциям e_d^0 выполнялось равенство Парсеваля. Тогда решения задач рассеяния e_d для оператора A будут нормированы на δ-функцию: для разложения в интеграл Фурье по функциям e_d будет справедливо равенство Парсеваля.

Таким образом, в рассматриваемой нами ситуации решение задачи рассеяния e_d определяется двумя выборами знака: знака в экспоненте у собственной функции e_d^0 непрерывного спектра оператора A_0 и знака в условиях излучения:

$$e_d \equiv e_d((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\,,\mid\,\ldots).$$

Собственные функции e_d^0 непрерывного спектра оператора A_0 диагонализуют оператор A_0:

$$A_0 e_d^0 = \lambda e_d^0,$$

пусть

$$A = A_0 + V.$$

Будем искать решение уравнения

$$A e_d = \lambda e_d$$

в виде

$$e_d = e_d^0 + w.$$

Для функции w получим уравнение:

$$(\lambda - A_0)w = V e_d.$$

Отсюда

$$(\lambda \pm i\epsilon - A_0)w = V e_d \pm i\epsilon w.$$
$$w = R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A_0)V e_d \pm i\epsilon R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A_0)w.$$

Если

$$\epsilon R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A_0)w \to 0\,,\;\epsilon \to 0,$$

то отсюда следует

$$w = R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A_0)V(e_d^0 + w).$$

Мы получили, что функция

$$e_d((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\,\mid\ldots) = e_d^0((\pm)_1) + w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\,\mid\ldots)$$

есть решение обобщенной стационарной задачи рассеяния , если функция $w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\;|\ldots)$ удовлетворяет уравнению

$$w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\;|\ldots) = R(\lambda(\pm)_2 i0\,,\,A_0)V(e_d((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\;|\ldots) = R(\lambda(\pm)2i0\,,\,A_0)V(e_d^0((\pm)_1) \tag{3.23}$$

и условиям излучения (одному из):

$$\epsilon R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A_0)w \to 0\,,\,\epsilon \to 0. \tag{3.24}$$

Отсюда мы получаем уравнение

$$e_d((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\;|\ldots) = e_d^0((\pm)1) + R(\lambda(\pm)_2 i0\,,\,A_0)Ve_d((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\;|\ldots)). \tag{3.25}$$

Определение 3.1.5. Уравнением Липмана-Швингера, связывающим операторы A_0, A в общем случае называется любое из уравнений (4.25), (4.23).

Именно в такой форме уравнение Липмана-Швингера обычно встречается в работах по квантовой механике. Отметим произвол в выборе знаков в условии излучения.

В дальнейшем нам будет удобно взять уравнение Липмана-Швингера в форме

$$w(-\,,\,+\;|\;\lambda) = R(\lambda + i0\,,\,A_0)V(e_d^0(\lambda) + w_+(\lambda))\,,\;A = A_0 + V, \tag{3.26}$$

где e_d^0 -входящая в формулу (2.39) (вообще говоря, не нормированная) собственная функция непрерывного спектра оператора A_0 и мы не будем писать индекс $\pm$ у функции $e_{d,\pm}$. Если e_d^0 выбрано в виде плоской волны (как в рассмотренной выше задаче (4.1.1)), то решение называется нормированным на плоскую волну. Если e_d^0 -диагонализирующие оператор A_0 функции, которые удовлетворяют равенству Парсеваля, то решение называется нормированным на δ-функцию. В дальнейшем (если специально не оговорено другое) мы будем рассматривать решения, нормированные на δ-функцию.

Уравнение Липмана-Швингера обладает рядом специальных свойств, которые не зависят от конкретного вида входящих в это уравнение операторов A_0 и A.

Основные предположения. Обсудим основные предположения, при которых мы будем изучать уравнение Липмана-Швингера. Мы будем, где возможно, налагать требования только на оператор A_0 и возмущение V.

Первая группа предположений касается области определения операторов A, A_0, V. Эти предположения мы будем считать выполненными всегда.

1 **Предположения о областях определения операторов A и A_0**

Мы предполагаем, что операторы A и A_0 самосопряжены и имеют общую плотную в $\mathcal{H}$ область определения:

$$\mathbf{Dom}(A) = \mathbf{Dom}(A_0)\,,\ \mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A)) = \mathcal{H}.$$

Часто делается более общее предположение: предполагается,что область $\mathbf{Dom}(A) \bigcap \mathbf{Dom}(A_0)$ плотна в $\mathcal{H}$. Мы будем придерживаться сформулированного в условии 1 более сильного предположения.

2 **Предположения об области определения оператора V.**

Мы предположим, что *замыкание* первоначально определенного на области $\mathbf{Dom}(A) = \mathbf{Dom}(A_0)$ оператора

$$V \stackrel{def}{=} (A - A_0) \tag{3.27}$$

-самосопряженный оператор. Определенный формулой (4.27) оператор V симметричен на области $\mathbf{Dom}(A) = \mathbf{Dom}(A_0)$ и может иметь самосопряженные расширения. Наше предположение состоит в том, что область $\mathbf{Dom}(A) = \mathbf{Dom}(A_0)$ есть *существенная область определения* оператора V.

Мы *не предполагаем*, что оператор V -оператор умножения на функцию.

В дальнейшем мы будем изучать собственные функции непрерывного спектра оператора A в комплексной плоскости спектрального параметра λ. Мы будем опираться на аналитические свойства собственных функций невозмущенного оператора A_0.

Следующая группа предположений касается невозмущенного оператора A_0.

3 **Предположения о диагонализирующем пространстве оператора A_0 и о собственных функциях непрерывного спектра оператора A_0.**

Мы предположим, что оператор A_0 диагонализуем (см. определение (2.1.6)) преобразованием U_d^0

$$\exists U_d^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}_d^0) \,:\, U_d^0 \phi(A_0) f(\lambda\,,\,\omega) = \phi(\lambda) U_d^0 f(\lambda\,,\,\omega),$$

диагоназующее пространство для оператора A_0 есть $\mathcal{H}_d^0 = L^2((0\,,\,\infty)\otimes\Omega)$, Ω -единичная сфера, и существует такое $b > 0$, что определенные равенством

$$\forall (f \in C_0^\infty) \,:\, (U_d^0 f)(\lambda\,,\,\omega) = \int e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) f(x) dx$$

собственные функции непрерывного спектра $e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ аналитичны как функции

$$\lambda \mapsto \mathcal{H}_\rho^- \otimes L^2(\Omega)\,,\; \rho = \exp(b|x|),$$

в области

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta(\lambda_0)\,,\; Re\,\lambda > 0$$

при любом $\lambda_0 > 0$.

Мы предположим что с некотороми (зависящими от λ_0) константами $C < \infty, c < \infty$ справедлива оценка

$$\forall (|\lambda_0 - \lambda| < \delta\,,\, \omega \in \Omega) \,:\, |e_d^0(x\,,\,\omega\,,\,\lambda)| < C \exp(c|x||Im\,\sqrt{\lambda}|). \tag{3.28}$$

Мы предположим, что коэффициенты Фурье по системе $e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ любой функции f из фундаментального множества $\mathcal{L} = C_0^\infty$ непрерывны и ограничены:

$$\forall (f \in \mathcal{L}) \,:\, \int e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) f(x) dx \in C_b((0\,,\,\infty)\otimes\Omega).$$

Можно доказать([18] , [9]) что собственные функции широкого класса дифференциальных операторов обладают нужными нам свойствами.

Если оператор V -оператор умножения на функцию, то мы рассматриваем два разных случая.

4 **Оператор V -оператор умножения на гладкую функцию $V(x)$, которая убывает на бесконечности быстрее некоторой (уточняемой в каждом случае) степени $(1/|x|)$:**

$$\exists (C > 0)\,,\, \forall (x \in \mathbb{R}^n) \,:\, |V(x)| < C(1 + x^2)^{-\sigma}\,,\, \sigma > 2, \tag{3.29}$$

В этом случае доказывается аналитичность операторов

$$\Gamma_\pm(\lambda)\,,\, \mathrm{B}_\pm(\lambda)\,,\, Q_\pm(\lambda)\,,\, Q_\pm^0(\lambda)$$

по λ в *верхней* полуплоскости $Im\,\lambda > 0$ и *непрерывная дифференцируемость* по λ при $Im\,\lambda \geq 0$.

5 **Оператор V -оператор умножения на гладкую экспоненциально убывающую при $|x| \to \infty$ функцию $V(x)$:**

$$\exists (C > 0\,,\, d > 0)\,,\, \forall (x \in \mathbb{R}^n)\ :\ |V(x)| < C\exp(-d|x|). \tag{3.30}$$

В этом случае

$$V \in \mathcal{B}_{-,+} \tag{3.31}$$

Как следствие этого предположения для случая $A_0 = -\Delta$ доказывается *аналитичность по* λ операторов

$$\Gamma_\pm(\lambda)\,,\, \mathrm{B}_\pm(\lambda)\,,\, Q_\pm(\lambda)\,,\, Q^0_\pm(\lambda)$$

в *комплексной окрестности* действительной оси $\lambda \in (0\,,\,\infty)$. Заметим, что доказательство остается справедливым и для любого оператора, резольвента которого обладает свойствами, аналогичными свойствам резольвенты оператора $A_0 = -\Delta$. Для экспоненциально убывающего потенциала доказывается *аналитичность* по спектральному параметру собственных функций непрерывного спектра *в окрестности* действительной оси.

Ясно, что экспоненциальная оценка является частным случаем степенной. Рассуждения в этих случаях немного различны.

Если выполнены условия 1-3 и оценка (4.29), то мы будем говорить, что выполнены *основные условия и степенная оценка.*

Если выполнены условия 1-3 и оценка (4.30), то мы будем говорить, что выполнены *основные условия и экспоненциальная оценка.*

Ниже речь идет о параметрах $b > 0\,,\, \sigma > 0$ и комплексной окрестности действительной оси. Параметры $b > 0\,,\, \sigma > 0$ и комплексную окрестность мы выбираем так, чтобы в рассматриваемой задаче были выполнены (если это возможно) формулируемые ниже условия. Посуществу, важен только факт существовании комплексной окрестности с нужными свойствами, но в некоторых случаях удается оценить эту окрестность через параметры потенциала.

Может случиться так, что ни оценки (4.29), ни (4.30) не выполнены или вообще возмущение не есть оператор умножения на функцию, но все же рассуждения можно провести по тому же плану.

Перечислим предположения, которые принимаются в общем (если A_0 , A-произвольные операторы) случае. Если $A_0 = -\Delta$, V-оператор умножения на функцию,то эти утверждения мы получаем как следствия оценок (4.30) (или (4.29)).

Напомним (см. стр. 19) обозначение:

$$\mathcal{B}_{\pm,\pm} \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^{\pm} \mapsto \mathcal{H}_b^{\pm}). \tag{3.32}$$

6 **Оператор V продолжается до ограниченного оператора из** $\mathcal{B}_{-,+}$:

$$\exists (b > 0) \,:\, V \in \mathcal{B}_{-,+} \tag{3.33}$$

7 **Предположения о** $R(\lambda\,,\,A_0)$ Для любой внутренней точки λ_0 множества $\sigma(A_0)$ существуют такие $\delta > 0$, что в круге $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$ функция $\lambda \mapsto R(\lambda\,,\,A_0) \in \mathcal{B}_{+,-}$ имеет аналитическое продолжение из верхней полуплоскости в нижнюю (мы обозначим это продолжение символом $R_+(\lambda\,,\,A_0)$) и из нижней полуплоскости в верхнюю (мы обозначаем это продолжение символом $R_-(\lambda\,,\,A_0)$).

Определим операторы

$$\forall (|\lambda - \lambda_0| < \delta) \,:\, \mathrm{B}_{\pm}(\lambda) \stackrel{def}{=} V R_{\pm}(\lambda\,,\,A_0) = \mathsf{id} - Q^0_{\pm}(\lambda)\,,\, \Gamma_{\pm}(\lambda) \stackrel{def}{=} R_{\pm}(\lambda\,,\,A_0)V. \tag{3.34}$$

8 Мы предположим, что оператор

$$\Gamma_{\pm}(\lambda) = R(\lambda\,,\,A_0)V\,,\, \pm Im\,\lambda > 0 \tag{3.35}$$

продолжается по непрерывности до оператора из $\mathcal{B}_{-,-}$ и функция $\Gamma_{\pm}(\lambda)$ как функция от λ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{B}_{-,-}$ имеет аналитическое продолжение в круг $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$, а ее значения -компактные операторы:

$$\Gamma_{\pm}(\lambda) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_b^{-} \mapsto \mathcal{H}_b^{-})\,,\, \mathrm{B}_{\pm}(\lambda) \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_b^{+} \mapsto \mathcal{H}_b^{+}).$$

Сделанные предположения об операторах

$$\Gamma_{\pm}(\lambda)\,,\, \mathrm{B}_{\pm}(\lambda)$$

фактически являются ограничениями на оператор $V = A - A_0$.

По определению резольвенты

$$\mathbf{Im}(R(\lambda\,,\,A_0)) \subset \mathbf{Dom}(A_0) \subset \mathbf{Dom}(V).$$

Поэтому оператор $VR(\lambda\,,\,A_0)$ корректно определен как произведение операторов на резольвентном множестве оператора A_0. Оператор $R(\lambda\,,\,A_0)V$ определен как произведение операторов на $\mathbf{Dom}(V)$,где он банахово сопряжен определенному на резольвентном множестве оператора A_0 оператору $VR(\lambda\,,\,A_0)$. Может быть так, что оператор V неограничен, но операторы $R(\lambda\,,\,A_0)V$ и $VR(\lambda\,,\,A_0)$ -"хорошие".

Если оценка (4.30) справедлива, то можно доказать (мы сделаем это позже), что операторы (4.34) удовлетворяют условиям 6-9, но условия 6-9 могут быть выполнены и в других случаях.

9 **Мы предположим, что оператор $A = -\Delta + V$ не имеет собственных значений на положительной дейсвительной оси.** (см. ниже предположение (4.45)). Это предположение можно доказать на основе уже сделанных предположений о потенциале, но известные автору доказательства данного факта выходят за рамки применяемых в лекциях элементарных методов.

В формуле (4.35) мы полагаем:

$$\begin{aligned}&\text{для функции } \Gamma_+ \ : -\pi/2 < \arg\lambda < \pi/2\\ &\text{для функции } \Gamma_- \ : 3\pi/2 < \arg\lambda < 5\pi/2.\end{aligned}$$

Можно считать, что функции $\Gamma_\pm(\lambda)$ (как и функции $e_\pm(\lambda)\,,\,Q_\pm(\lambda)\,,\,Q^0_\pm(\lambda)$) заданы на двух разных листах римановой поверхности функции $\sqrt{\lambda}$, которые накрывают одну и ту же окрестность действительной оси.

Напомним ([1, 4]) определение.

Замечание 3.1.1. Оператор V называется *компактным относительно оператора* A_0, если оператор $VR(\lambda\,,\,A_0)$ компактен. Достаточные условия относительной компактности приведены в [1, 4]. Близкие к условиям относительной компактности условия для дифференциальных операторов $A_0\,,\,V$ рассмотрены в [9].

Условиям 6-9, вообще говоря, может удовлетворять неограниченный оператор V. Приведем пример. Пусть

$$A_0 = -\Delta\,,\, \overrightarrow{a(x)} \in C_0^\infty,$$

тогда оператор

$$V(x) = i(\overrightarrow{a(x)}\cdot\nabla_x - \nabla_x\cdot\overrightarrow{a(x)})$$

удовлетворяет условиям 6-9.

Уравнение с функцией $\Gamma_+(\lambda)$ соответствует условиям излучения $\epsilon R(\lambda + i\epsilon\,,\,A_0)w_+ \to 0\,,\,\epsilon \to +0$, уравнение с функцией $\Gamma_-(\lambda)$ соответствует условиям излучения $\epsilon R(\lambda - i\epsilon\,,\,A_0)w_- \to 0\,,\,\epsilon \to +0$.

3.2 Существование и единственность решения уравнения Липмана-Швингера .

При условии 8 существование и единственность решния уранения Липмана-Швингера (4.26) есть следствие теоремы Фредгольма, причем

$$w(\lambda) = (\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda))^{-1}\Gamma_+(\lambda)e_d^0(\lambda) \tag{3.36}$$

Докажем, что условия теоремы Фредгольма выполнены и в том случае, если потенциал есть оператор умножения на функцию.

Потенциалы, убывающие на бесконечности как степень $1/|x|$**.** Сначала мы рассмотрим потенциалы, которые могут убывать на бесконечности как степень $(1/|x|)$.

Теорема 3.2.1. *1. Если*

$$x \in \mathbb{R}^1\,,\, |V(x)| < C(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\,,\, \mathcal{H}_\rho^- = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,(1+|x|^2)^{-\sigma/2}dx), \tag{3.37}$$

и

$$(((2\alpha - \sigma) > 1) \wedge (\sigma > 1)), \tag{3.38}$$

то оператор

$$\Gamma_+(\lambda) = R(\lambda\,,\,-\Delta)V$$

при $Re\,\lambda > 0\,,\, Im\sqrt{\lambda} \geq 0$ *есть оператор Гильберта=Шмидта в пространстве* $\mathcal{H}_\rho^-$ *причем справедлива равномерная по* λ *на компактах в области* $Re\,\lambda > 0\,,\, Im\sqrt{\lambda} \geq 0$ *оценка:*

$$\|\Gamma_+(\lambda)|\mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)\| \leq const$$

Оператор $\Gamma_+(\lambda)$*,рассматриваемый как функция* $\lambda \mapsto \mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)$ *аналитичен по* λ *при* $Im\sqrt{\lambda} > 0$ *и при достаточно больших* α *непрерывно дифференцируем как функция* $\lambda \mapsto \mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)$ *в области* $Im\sqrt{\lambda} \geq 0$.

2. Если

$$x \in \mathbb{R}^3\,,\, |V(x)| < C(1+|x|^2)^{-\alpha/2}\,,\, \mathcal{H}_\rho^- = L^2(\mathbb{R}^3\,,\,(1+|x|^2)^{-\sigma/2}dx), \tag{3.39}$$

и

$$((((2\alpha - \sigma) > 1) \wedge (\sigma > 3)) \vee ((2\alpha - \sigma) > 3)) \wedge (\sigma > 1), \tag{3.40}$$

то оператор

$$\Gamma_+(\lambda) = R(\lambda\,,\,-\Delta)V$$

при $Re\,\lambda > 0\,,\; Im\sqrt{\lambda} \geq 0$ *есть оператор Гильберта=Шмидта в пространстве* $\mathcal{H}_\rho^-$ *причем справедлива равномерная по* λ *на компактах в области* $Re\,\lambda > 0\,,\; Im\sqrt{\lambda} \geq 0$ *оценка:*

$$\|\Gamma_+(\lambda)|\mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)\| \leq const$$

Оператор $\Gamma_+(\lambda)$*,рассматриваемый как функция* $\lambda \mapsto \mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)$ *аналитичен по* λ *при* $Im\sqrt{\lambda} > 0$ *, непрерывен как функция* $\lambda \mapsto \mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)$ *в области* $Im\sqrt{\lambda} \geq 0$*. и непрерывно дифференцируем в этой области при достаточно большом* α*.*

Доказательство. Докажем теорему для $n = 3$. Представим оператор $R(\lambda\,,\,-\Delta)V$ как интегральный оператор в пространстве

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_\rho^- = L^2(\mathbb{R}^3\,,\,(1+x^2)^{-\sigma/2}dx)\,:\\
&R(\lambda\,,\,-\Delta)Vf(x) =\\
&\int \frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)}{4\pi|x-y|}V(y)(1+y^2)^{\sigma/2}\frac{f(y)}{(1+y^2)^{\sigma/2}}dy.
\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
&\forall(Im\sqrt{\lambda} \geq 0\,,\; Re\sqrt{\lambda} \geq 0)\,:\|R(\lambda\,,\,-\Delta)V|\mathcal{HS}\|^2 \leq\\
&C\int |x-y|^{-2}\Big|V(y)\Big|^2(1+y^2)^{\sigma/2}(1+x^2)^{-\sigma/2}dydx \leq\\
&C\int |x-y|^{-2}(1+y^2)^{-(2\alpha-\sigma)/2}(1+x^2)^{-\sigma/2}dydx = I.
\end{aligned}$$

Здесь символом C мы обозначили не интересующую нас константу.

Условия (4.40) достаточны для сходимости интеграла I.

Теперь рассмотрим функцию $\phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda)$, которая в уравнении (4.26) трактуется как известная функция.

$$\phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda) = R(\lambda + i0\,,\,A_0)V(e_d^0(x\,,\,\omega\,,\,\lambda)), \tag{3.41}$$

для $x \in \mathbb{R}^3$ и $A_0 = -\Delta$:

$$\phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda) = \int \frac{\exp(i(|x-y| - (\omega\,,\,y))\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|}V(y)dy, \tag{3.42}$$

Вспоминая (4.12), мы получаем:

$$\phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda) = \frac{\exp(i|x|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x|}\int \exp(-i((\omega + x/|x|)\,,\,y)\sqrt{\lambda})V(y)dy + O(1/|x|^2), \tag{3.43}$$

Отсюда следует, что заданная формулой (4.42) функция $\phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda)$ как функция со значениями в $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,(1+|x|^2)^{-\sigma/2}dx)$ непрерывна по $\lambda \in (0\,,\,\infty)\,,\,\omega \in \Omega$:

$$(0\,,\,\infty)\otimes\Omega \ni (\lambda\otimes\omega) \mapsto \phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda) \in C(L^2(\mathbb{R}^3\,,\,(1+|x|^2)^{-\sigma/2}dx)).$$

Если $\mathcal{H}_\rho^- = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,(1+|x|^2)^{-\sigma/2}dx)$, то рассуждения абсолютно аналогичны.

В силу теоремы Фредгольма отсюда вытекает

Следствие 3.2.1. *Если потенциал V удовлетворяет условиям теоремы 4.1 и параметр λ удовлетворяет условию:*

$$\mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) = 0, \tag{3.44}$$

то интегральное уравнение (4.26) *в пространстве $\mathcal{H}_\rho^-$ имеет решение, это решение единственно, в достаточно малой окрестности точки λ непрерывно по $\lambda\,,\,\omega\in\Omega$ в метрике $\mathcal{H}_\rho^-$)и непрерывно дифференцируемо по λ при $\lambda > 0$.*

Заметим, что несмотря на то, что оператор $\Gamma_+(\lambda)$,рассматриваемый как функция $\lambda \mapsto \mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-)$ аналитичен по λ при $Im\sqrt{\lambda} > 0$, мы не можем гарантировать аналитичность решения уравнения Липмана -Швингера по спектральному параметру λ, так как мы не можем утверждать, что функция $\phi(x\,,\,\omega\,,\,\lambda)$ аналитична даже в верхней полуплоскости, мы можем только доказать, что решение непрерывно по λ при $\lambda\in\mathbb{R}^1_+$.

Множество

$$E' = \{\lambda|\mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) \neq 0\} \tag{3.45}$$

описано в приложении. Оказывается, в рассматриваемых случаях множество E' совпадает с множеством (отрицательных) собственных значений оператора A:

$$E' = \{\lambda|\exists\psi\,:\,(-\Delta+V)\psi = \lambda\psi, \|\psi|\mathcal{H}\| = 1\}, \tag{3.46}$$

и состоит из конечного числа точек на отрицательной действительной оси или пусто.

Экспоненциально убывающие потенциалы. Теперь рассмотрим случай экспоненциально убывающего потенциала: пусть

$$\forall(x) \, : \, |V(x)| < C \exp(-d|x|). \tag{3.47}$$

Лемма 3.2.1. *Если выполнено условие* (4.47)*и* $d > b$, $Im \sqrt{\lambda} > -b/2$, *то оператор* $\Gamma_+(\lambda)$ *есть оператор Гильберта-Шмидта:*

$$\Gamma_+(\lambda) \in \mathcal{HS}(\mathcal{H}_b^- \mapsto \mathcal{H}_b^-), \tag{3.48}$$

рассматриваемый как функция $\lambda \mapsto \mathcal{HS}(\mathcal{H}_b^- \mapsto \mathcal{H}_b^-)$ *оператор* $\Gamma_+(\lambda)$ *аналитичен по* λ *при* $Im \sqrt{\lambda} > -b/2$.

Доказательство. Получим простые достаточные условия выполнения включения (4.48). Достаточным условием выполнения неравенства (2.23) является неравенство

$$\forall(x \, , \, y) \, : \, -2Im \sqrt{\lambda}|x-y| - 2d|y| + b|y| - b|x| < 0. \tag{3.49}$$

Это условие выполнено, если

$$(d > b) \wedge (Im \sqrt{\lambda} > -b/2.) \tag{3.50}$$

Мы доказали, что при условии (4.50), оператор $\Gamma_+(\lambda)$-оператор Гильберта-Шмидта в пространстве $\mathcal{H}_b^-$. Аналитичность следует из аналитичности его значений на финитных функциях.

Рассмотрим функцию $\phi(x \, , \, \omega \, , \, \lambda)$, которая в уравнении (4.26) является известной функцией.

Лемма 3.2.2. *Если выполнено условие* (4.47), *то в области*

$$|Im \sqrt{\lambda}| < \min(d/2 \, , \, b(1-\epsilon)/2). \tag{3.51}$$

функция

$$\lambda \mapsto \phi(x \, , \, \omega \, , \, \lambda)$$

аналитична по λ *как функция со значениями в пространстве* $\mathcal{H}_b^-$.

Доказательство. Легко видеть. что достаточным условием включения

$$\phi(x \, , \, \lambda \, , \, \omega) \in \mathcal{H}_b^-$$

является неравенство

$$\exists(\epsilon > 0) \, : \, \sup_x |\phi(x \, , \, \omega \, , \, \lambda) \exp(-b(1-\epsilon)/2)| < \infty.$$

Достаточным условием выполнения этого неравенства является неравенство

$$\forall(x\,,\,y)\;:\;-Im\sqrt{\lambda}|x-y|-d|y|-b(1-\epsilon)|x|/2+|Im\sqrt{\lambda}||y|<0.$$

Достаточным условием выполнения этого неравенства является неравенство (4.51).

Объединяя условия (4.51) и (4.50), мы получаем условие:

$$|Im\sqrt{\lambda}|<((b(1-\epsilon)/2)\wedge(d>b)) \tag{3.52}$$

Следствие 3.2.2. *Если потенциал V удовлетворяет условию* (4.47) *и параметр λ удовлетворяет условиям* (4.52),(4.44) *то интегральное уравнение* (4.26) *в пространстве $\mathcal{H}_b^-$ имеет решение, это решение единственно, в достаточно малой окрестности точки λ аналитично по λ как функция со значениями в $\mathcal{H}_b^-$ и непрерывно зависит от параметра $\omega\in\Omega$.*

Итак, мы доказали существование, единственность и аналитичность по спектральному параметру решения уравнения Липмана-Швингера для экспоненциально убывающих потенциалов .

Отсюда следует существование и единственность решения стационарной задачи рассеяния.

Формула, связывающая решение уравнения Липмана-Швингера и резольвенту оператора A. Рассмотрим уравнение Липмана-Швингера:

$$w=R(\lambda+i0\,,\,A_0)V(e_d^0+w_+)\,,\,A=A_0+V, \tag{3.53}$$

где e_d^0 -входящая в формулу (4.53) (вообще говоря, не нормированная) собственная функция непрерывного спектра оператора A_0. Пусть выполнено условие (4.47) и

$$\lambda_0\in\mathbb{R}_+^1\,,\,\lambda_0\notin E'.$$

Резольвента $R(\lambda\,,\,A)$ оператора A как оператор в $\mathcal{H}$ не существует при $\lambda\in(0\,,\,\infty)$. Ниже мы докажем, что если выполнено условие (4.47) (соответственно (4.37)или (4.39)) то $\forall(\lambda\in(0\,,\,\infty))$ рассматриваемый как предел в метрике $\mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^-\mapsto\mathcal{H}_\rho^-)$ при $\epsilon+0$ оператор $R(\lambda\,,\,A)V$ существует и есть оператор Гильберта-Шмидта:

$$R(\lambda\,,\,A)V\overset{def}{=}\lim_{\epsilon\to+0}R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)V\in\mathcal{HS}(\mathcal{H}_\rho^-\mapsto\mathcal{H}_\rho^-),$$

где для экспоненциально убывающего потенциала можно положить

$$\rho=\exp(b|x|),$$

а для потенциала, убывающего как степень, можно взять

$$\rho = (1 + x^2)^{\sigma/2}$$

при соответствующих значениях параметров b и σ.

Лемма 3.2.3. *Пусть $e_d^0(\lambda) \equiv e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ -функция, которая диагонализует оператор A_0 и $\lambda_0 \notin E'$. В достаточно малой окрестности точки λ_0 решение уравнения* (4.53) *дается формулой*

$$w(\lambda) = R(\lambda\,,\,A)Ve_d^0(\lambda). \tag{3.54}$$

В случае экспоненциально убывающего потенциала формула (4.54) справедлива в комплексной окрестности точки λ_0, для убывающего не бысртее степени потенциала формула (4.54) справедлива по крайней мере на действительной оси.

Точнее, справедлива

Лемма 3.2.4. *1. Если потенциал V удовлетворяет условию* (4.47) *и параметр λ удовлетворяет условиям* (4.52),(4.44) *то интегральное уравнение* (4.26) *в пространстве $\mathcal{H}_b^-$ имеет решение, это решение единственно, аналитично по λ и в достаточно малой окрестности точки λ_0 дается формулой* (4.54).

2. Если $x \in \mathbb{R}^1$ или $x \in \mathbb{R}^3$, потенциал V удовлетворяет оценкам (4.37) *или* (4.39) *и выполнены условия теоремы 4.1,то в достаточно малой окрестности точки λ_0 на действительной оси решение уравнения Липмана-Швингера непрерывно по $\lambda \in \mathbb{R}_+^1$, $\omega \in \Omega$ как функция со значениями в пространстве $\mathcal{H}_\rho^-$, $\rho = (1 + x^2)^{\sigma/2}$*

Доказательство. Сначала разберем случай экспоненциально убывающего потенциала. Функция

$$(\lambda\,,\,\omega) \mapsto e_d^0(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega) \in \mathcal{H}_b^-$$

аналитична по λ и непрерывна по ω. Оператор

$$R(\lambda\,,\,A)V \in \mathcal{B}_{-,-}$$

аналитичен по λ. Следовательно, функция

$$(\lambda\,,\,\omega) \mapsto R(\lambda\,,\,A)Ve_d^0(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)) \in \mathcal{H}_b^-$$

аналитична по λ и непрерывна по ω. Обозначим правую часть (4.54) через $\widetilde{w(\lambda)}$. При $Im\sqrt{\lambda} > 0$ имеем

$$\Gamma_+(\lambda)(e_d^0(\lambda) + \widetilde{w(\lambda)}) = R(\lambda\,,\,A_0)Ve_d^0(\lambda) + R(\lambda\,,\,A_0)VR(\lambda\,,\,A)Ve_d^0(\lambda) = \tag{3.55}$$

$$(R(\lambda\,,\,A_0) + R(\lambda\,,\,A_0)VR(\lambda\,,\,A))Ve_d^0(\lambda) = R(\lambda\,,\,A)Ve_d^0(\lambda) = \widetilde{w(\lambda)}. \tag{3.56}$$

Так как решение уравнения (4.53) единственно, для экспоненциально убывающего потенциала формула (4.54) доказана.

В (4.55)-(4.56) входят только произведения $R(\lambda\,,\,A_0)V$, $R(\lambda\,,\,A)V$, и при выводе равенств (4.55)-(4.56) использовалось только резольвентное тождество, поэтому эти равенства остаются справедливыми и на действительной оси (см. теорему 4.1).

Связь между решением уравнения Липмана-Швингера и оператором $T(\lambda)$. Напомним, что $e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ -функция, которая диагонализует оператор A_0. По условию такая функция существует, аналитична по λ и непрерывна по ω как функция со значениями в $\mathcal{H}_b^-$, $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$)-решение уравнения (4.53).

Проведем рассуждения при предположении (4.47) и предположении:

$$V \in \mathcal{B}_{-,+}. \tag{3.57}$$

Для этого достаточно, чтобы было выполнено неравенство: $d > b$.

При $Im\,\lambda > 0$ резольвенты самосопряженных операторов A_0 , A существуют. Следовательно, для пары операторов A_0 , A при $Im\,\lambda > 0$ и при условии, что параметр λ удовлетворяет условиям (4.52), равенством (2.91) корректно определен оператор

$$T(\lambda\,,\,A_0\,,\,A) \equiv T(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H})$$

Лемма 3.2.5. *Если выполнено условие* (4.47), (4.44)*, то оператор* $T(\lambda)$, $Im\,\lambda > 0$, *имеет аналитическое продолжение по* λ *в круг* $\{\lambda \mid |\lambda_0 - \lambda| < \delta\}$ *и в этом круге*

$$T(\lambda) \in \mathcal{B}_{-,+}. \tag{3.58}$$

Доказательство. Оператор $T(\lambda)$ при $Im\,\lambda > 0$ удовлетворяет уравнению (см. (2.93)):

$$T(\lambda) = V + VR(\lambda\,,\,A_0)T(\lambda). \tag{3.59}$$

По предположению (4.57),

$$V \in \mathcal{B}_{-,+}).$$

Оператор $VR(\lambda\,,\,A_0)$, рассматриваемый как оператор

$$VR(\lambda\,,\,A_0)\in\mathcal{B}_{+,+}\,,\;Im\sqrt{\lambda}>0\,,$$

банахово сопряжен (см. лемму 2.1.5, стр. 21) оператору

$$\Gamma_+(\lambda)\in\mathcal{B}_{-,-}.$$

Следовательно, операторная функция

$$\lambda\mapsto VR(\lambda\,,\,A_0)$$

имеет аналитическое продолжение по λ из области $Im\,\lambda>0$ в круг $\{\lambda\mid |\lambda_0-\lambda|<\delta\}$, ее значения -компактные операторы и

$$\mathbf{Ker}(\mathsf{id}-VR(\lambda_0\,,\,A_0))=0.$$

Следовательно, оператор $T(\lambda)\in\mathcal{B}_{-,+}$ и аналитичен по λ . Из уравнения (4.59) следует

$$T(\lambda)=(\mathsf{id}-VR(\lambda\,,\,A_0))^{-1}V. \tag{3.60}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

При $Im\,\lambda<0$ рассуждения абсолютно аналогичны.

Следствие 3.2.3. *Если при $\lambda=\lambda_0$ выполнено условие* (4.44)*, выполнены условия* (4.52) *и условие* (4.47)*, то операторные функции*

$$\lambda\mapsto R(\lambda\,,\,A)V\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_b^-\mapsto\mathcal{H}_b^-) \tag{3.61}$$

$$\lambda\mapsto VR(\lambda\,,\,A)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_b^+\mapsto\mathcal{H}_b^+) \tag{3.62}$$

при $\{\lambda\mid|\lambda_0-\lambda|<\delta\}$ имеют аналитическое продолжение из верхней полуплоскости в нижнюю их значения -банахово сопряженные операторы (см. лемму 2.1.5, стр. 21).

Замечание 3.2.1. На действительной оси и в нижней полуплоскости операторы $R(\lambda\,,\,A_0)V$ и $VR(\lambda\,,\,A_0)$ уже нельзя рассматривать как произведения операторов: их нужно рассматривать как аналитические продолжения соответствующих операторов из верхней полуплоскости.

Напомним, что эти аналитические продолжения мы обозначили символами $\Gamma+(\lambda)$, $\mathrm{B}_+(\lambda)$

Лемма 3.2.6. *Если справедливо условие* (4.52)*и условие* (4.47)*, то справедливы равенства*

$$T(\lambda)e_d^0(\lambda)=(\lambda-A_0)w(\lambda). \tag{3.63}$$

$$T(\lambda)e_d^0(\lambda)=V(e_d^0(\lambda)+w(\lambda)). \tag{3.64}$$

Для доказательства первого утверждения леммы вспомним определение оператора $T(\lambda)$ (см. (2.91), стр. 39). Получим

$$T(\lambda)e_d^0(\lambda) = (V + VR(\lambda\,,\,A)V)e_d^0(\lambda) =$$

(см. (4.54))

$$= Ve_d^0(\lambda) + Vw(\lambda) = (A - A_0)(e_d^0(\lambda) + w(\lambda)) = \\ (\lambda - A_0)w(\lambda). \tag{3.65}$$

Второе утверждение доказано по ходу вычислений в (4.65).

3.3 Спектральное разложение возмущенного оператора -оператора A.

Основной результат этого раздела изложен в теоремах 4.3.1 и 4.3.2.

Поясним последующие выкладки на неформальном уровне. Имеем:

$$\lambda\mathsf{id} - A = \lambda\mathsf{id} - A_0 - V = (\mathsf{id} - VR(\lambda + i0\,,\,A_0))(\lambda\mathsf{id} - A_0);$$
$$(\mathsf{id} - VR(\lambda + i0\,,\,A_0))^{-1}(\lambda\mathsf{id} - A) = \lambda\mathsf{id} - A_0,$$

Диагонализуем A_0:

$$\forall f\ :\ U_d^0((\mathsf{id} - VR(\lambda + i0\,,\,A_0))^{-1}(\lambda\mathsf{id} - A))f(\mu\,,\,\cdot) =$$
$$(\lambda\mathsf{id} - \mu)U_d^0 f(\mu\,,\,\cdot),\ \text{положим } \lambda = \mu.$$

Получим:

$$U_d^0((\mathsf{id} - VR(\lambda + i0\,,\,A_0))^{-1}(\lambda\mathsf{id} - A))(\lambda\,,\,\cdot) = 0$$
$$U_d^0((\mathsf{id} - VR(\lambda + i0\,,\,A_0))^{-1}A)f)(\lambda\,,\,\cdot) = \lambda U_d^0((\mathsf{id} - VR(\lambda + i0\,,\,A_0))^{-1}f)(\lambda\,,\,\cdot),$$
$$U_d^+(Af)(\lambda\,,\,\cdot) = \lambda U_d^+ f(\lambda\,,\,\cdot).$$

Приступим к обоснованию приведенных выше утверждений.

Оценки операторов $Q(\lambda)$ и резольвенты оператора A. Нам понадобятся оценки резольвенты оператора A. Эти оценки позволяют контролировать поведение резольвенты оператора A вблизи действительной оси и играют центральную роль в дальнейшем (принцип предельного поглощеня): обычно оснащение гильбертова пространства и требования на потенциал подбираются так, чтобы эти оценки (или аналогичные им) были бы верны. Нужные оценки можно получить либо с помощью оператора $T(\lambda)$ для "хороших" возмущений V, (это частично сделано выше), либо с помощью операторов $Q(\lambda)$. Мы укажем оба способа, так что результаты лемм 4.2.5 и 4.3.4 частично перекрываются.

Мы проведем рассуждения для экспоненциально убывающих потенциалов, когда функции рассматриваются в комплексной окрестности действительной оси. Для медленно убывающих потенциалов формально выкладки остаются теми же, нужно только учесть, что область изменения параметра λ -множество $Im\sqrt{\lambda} \geq 0$.

Напомним, что символом $B^{\star}$ мы обозначаем оператор, сопряженный опратору B относительно билинейной формы $< \quad | \quad >$, которая задана на $\mathcal{H}_b^{\pm} \otimes \mathcal{H}_b^{\mp}$. Нижний индекс $\pm$ у операторов $Q(\lambda)$ и резольвент означает аналитическое продолжение из верхней (нижней) полуплоскости. Предположим, что выполнено условие (4.44). Это эквивалентно предположению, что точка λ_0 не есть собственное значение оператора A.

Сначала мы напомним одно утверждение общего характера.

Лемма 3.3.1. *Пусть оператор $B(\lambda)$ аналитичен (непрерывен в сильной топологии) по λ в окрестности точки λ_0 и компактен в каждой точке этой окрестности, пусть в точке $\mu = 1$ существует резольвента $R(1\,,\,B(\lambda_0))$. Тогда операторы $R(1\,,\,B(\lambda)) - \mathsf{id}$, $R(1\,,\,B^{\star}(\lambda)) - \mathsf{id}$ аналитичны (непрерывны в сильной топологии) по λ в окрестности точки λ_0 и компактны.*

Это утверждение основано на двух замечаниях.

Лемма 3.3.2. *Если оператор $B(\lambda)$ компактен и в точке μ существует его резольвента $R(\mu\,,\,B)$, то оператор $\mu R(\mu\,,\,B) - \mathsf{id}$ компактен .*

Имеем тождества:

$$
\begin{aligned}
&R(\mu\,,\,B)(\mu\mathsf{id} - B) = \mathsf{id},\\
&\mu R(\mu\,,\,B) - \mathsf{id} = R(\mu\,,\,B)B.
\end{aligned}
$$

Оператор $R(\mu\,,\,B)B$ компактен как произведение компактного и ограниченного.

Лемма 3.3.3. *Если оператор $B(\lambda)$ аналитичен (непрерывен в равномерной топологии) по λ в окрестности точки λ_0 и в точке λ_0 обратим: $\exists(B(\lambda_0)^{-1})$, то оператор $B(\lambda)^{-1}$ аналитичен (непрерывен в равномерной топологии) по λ в окрестности точки λ_0 .*

Это утверждение основано на равенствах:

$$
\begin{aligned}
&B(\lambda) = B(\lambda_0)(B(\lambda_0)^{-1}(B(\lambda) - B(\lambda_0)) + \mathsf{id}),\\
&B(\lambda)^{-1} = (B(\lambda_0)^{-1}(B(\lambda) - B(\lambda_0)) + \mathsf{id})^{-1}B(\lambda_0)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Дале следует заметить, что в силу теоремы Шаудера из компактности оператора $B(\lambda)$ следует компактность оператора $B^\star(\lambda)$, из аналитичности (непрерывности в слабой или равномерной операторной топологии, но не в сильной) оператора $B(\lambda)$ следует аналитичность (непрерывность) оператора $B^\star(\lambda)$ (тривиально), из существования оператора $R(1\,,\,B(\lambda_0))$ следует существование оператора $R(1\,,\,B^\star(\lambda_0))$ (теорема Фредгольма). Напомним, что операторы $Q(\lambda)\,,\,Q^0(\lambda)$ заданы формулой (2.97), которая в обозначиниях этого параграфа записывается так:

$$
Q(\lambda) = \mathsf{id} + VR(\lambda\,,\,A)\,,\,Q^0(\lambda) = \mathsf{id} - VR(\lambda\,,\,A_0),
$$

причем

$$
Q(\lambda)Q^0(\lambda) = Q^0(\lambda)Q(\lambda) = \mathsf{id}.
$$

Пусть потенциал удовлетворяет экспоненциальной оценке:

$$
|V(x)| < C\exp(-d|x|). \tag{3.66}
$$

Справедлива

Лемма 3.3.4. *Если справедлива оценка* (4.66)*и выполнено условие* (4.44), *то в достаточно малой окрестности точки* λ_0 *при* $Im\,\lambda_0 \geq 0$

$$
\forall(|\lambda - \lambda_0| < \delta)\,:\,Q(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^+ \mapsto \mathcal{H}_b^+)\,,\,(Q)^\star(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^- \mapsto \mathcal{H}_b^-) \tag{3.67}
$$

$$
\forall(|\lambda - \lambda_0| < \delta)\,:\,Q^0(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^+ \mapsto \mathcal{H}_b^+)\,,\,(Q^0)^\star(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^- \mapsto \mathcal{H}_b^-) \tag{3.68}
$$

$$
\forall(|\lambda - \lambda_0| < \delta):\ \textit{функции}\quad Q(\lambda)\,,\,Q^0(\lambda)\,,\,(Q)^\star(\lambda)\,,\,(Q^0)^\star(\lambda) \tag{3.69}
$$

$$
\textit{аналитичны по } \lambda \textit{ и}\quad Q(\lambda)Q^0(\lambda) = Q^0(\lambda)Q(\lambda) = \mathsf{id}. \tag{3.70}
$$

Доказательство. Лемма, по-существу, есть следствие леммы 4.3.1, стр.93 и леммы 2.1.6, стр.22. Оператор $VR(\lambda\,,\,A_0)$, рассматриваемый как оператор

$$
VR(\lambda\,,\,A_0) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^+ \mapsto \mathcal{H}_b^+)\,,\,Im\,\lambda > 0\,,
$$

банахово сопряжен оператору

$$
\Gamma_+(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^- \mapsto \mathcal{H}_b^-).
$$

Следовательно, операторная функция

$$\lambda \mapsto VR(\lambda\,,\,A_0)$$

имеет аналитическое продолжение $VR_+(\lambda\,,\,A_0)$ по λ в круг $\{\lambda \mid |\lambda_0 - \lambda| < \delta\}$, значения функции $VR_+(\lambda\,,\,A_0)$-компактные в $\mathcal{L}(\mathcal{H}_b^+ \mapsto \mathcal{H}_b^+)$ (теорема Шаудера и леммы 2.1.6, 4.3.1) операторы и в силу альтернативы Фредгольма и предположения (4.44)

$$\mathbf{Ker}(\mathsf{id} - VR(\lambda_0\,,\,A_0)) = 0.$$

Следовательно, существует $Q(\lambda_0 + i0) = Q^0(\lambda_0 + i0)^{-1}$ и оператор $Q(\lambda)$ аналитичен по λ ,а оператор $(Q(\lambda) - \mathsf{id})$ *компактен и аналитичен по* λ в некоторой окрестности точки λ_0. Равенство (4.69) проверяется прямым вычислением.

Замечание 3.3.1. Легко видеть, что достаточно потребовать аналитичность одного из операторов $Q(\lambda)\,,\,Q^0(\lambda)$ и компактость одного из операторов $\mathsf{id} - Q(\lambda)\,,\,\mathsf{id} - Q^0(\lambda)$.

Замечание 3.3.2. Если справедливы условия теоремы 4.1 и выполнено условие (4.44), то в достаточно малой окрестности точки λ_0 операторы

$$Q(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho^+ \mapsto \mathcal{H}_\rho^+)\,,\,(Q)^\star(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-) \tag{3.71}$$
$$Q^0(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho^+ \mapsto \mathcal{H}_\rho^+)\,,\,(Q^0)^\star(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho^- \mapsto \mathcal{H}_\rho^-) \tag{3.72}$$

аналитичны по λ при $Re\,\lambda > 0\,,\,Im\,\sqrt{\lambda} > 0$ и непрерывны при $Re\,\lambda > 0\,,\,Im\,\sqrt{\lambda} \geq 0$.

Построение спектральной функции. Положим по определению

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \stackrel{def}{=} e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) + w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = Q^\star(\lambda)e_d^0(\lambda\,,\,\omega). \tag{3.73}$$

В силу теоремы 4.1.1 функция $e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ есть решение стационарной задачи рассеяния (4.1.1).

Положим по определению

$$U_d(f)(\lambda\,,\,\omega) \stackrel{def}{=} < e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)|f(\cdot) >= \tag{3.74}$$
$$< Q^\star(\lambda)e_d^0(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)|f(\cdot) > . \tag{3.75}$$

Позже мы докажем, что преобразование U_d диагонализующее преобразование для оператора A.

Обратим внимание на то, что функции $e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ пока определены нами только локально: в достаточно малой окрестности точки $\lambda_0 \notin E'$.

Поэтому преобразование U_d определено тоже пока только локально. Ниже для оператора Шредингера мы докажем, что условие (4.44) выполено *при всех* $\lambda > 0$, поэтому функции $e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ определены *при всех* $\lambda > 0$ и справедливо

Замечание 3.3.3. Формулы (4.73) -(4.74) определяет преобразование U_d глобально (для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$) , в окрестности каждой точки $\lambda > 0$ преобразование U_d вычисляется по формулам (4.73)-(4.74).

Символом Λ (с индексами или без индексов) мы будем обозначать полуинтервал:

$$\Lambda = (a\,,\,b].$$

Пусть Λ_0 -полуинтервал, на которм справедливы оценки леммы (4.3.4), и

$$\Lambda \Subset \Lambda_0\,,\,\mathbf{C}(\Lambda_0) = \mathbb{R}^1 \setminus \Lambda_0\,,\,dist(\Lambda\,,\,\mathbf{C}(\Lambda_0)) > 0.$$

Пусть $E(\lambda\,,\,A)$ -спектральная функция оператора A,

$$E(\Lambda\,,\,A) = E(b\,,\,A) - E(a\,,\,A)$$

-спектральный проектор на полуинтервал Λ.

Пусть

$$\mathcal{H}^0_d = L^2((0\,,\,\infty) \otimes \Omega\,,\,d\lambda d\omega)$$

-диагонализующее пространство для оператора A_0.

Теорема 3.3.1. *Если выполнены основные условия, степенная оценка и условие* (4.45)*, то*

1. Пространство $\mathcal{H}^0_d$ *-диагонализующее пространство для оператора* A.

2. Преобразование (4.73) -(4.74) *диагонализует оператор* A.

3. Если справедлива оценка (4.66)*, то диагонализующие возмущенный оператор (оператор* A*) собственные функции непрерывного спектра -функции* $e_d(x\,,\,\omega\,,\,\lambda)$*, рассматриваемые как функции параметра* λ *со значениями в пространстве* $\mathcal{H}^-_b$*, аналитичны по* λ *в некоторой окрестности действительной оси.*

4. Спектральная функция оператора A *может быть вычислена по* *любой из формул:*

$$\forall (f \in C_0^\infty) \,:\, < f \,,\, E(\Lambda \,,\, A))f >= \int\limits_{\Lambda} \| U_d^{\pm} f(\lambda \,,\, \cdot) \|_{\Omega}^2 d\lambda. \tag{3.76}$$

$$< g \,,\, (E(\Lambda \,,\, A)f >= \int\limits_{\Lambda} < U_d g(\lambda \,,\, \cdot) \,,\, U_d f(\lambda \,,\, \cdot) >_{\Omega} d\lambda \tag{3.77}$$

$$E(\Lambda \,,\, A)f(x) = \int\limits_{\Lambda \otimes \Omega} e_d^{\star}(x \,,\, \lambda \,,\, \omega)) U_d f(\lambda \,,\, \omega) d\lambda d\omega. \tag{3.78}$$

Ясно, что эти формулы эквивалентны. Мы привели их разные формы для удобства ссылок.

Доказательство. Будем исходить из формулы Стоуна. Пусть $f \in C_0^\infty$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} &< f \,,\, E(\Lambda \,,\, A)f >= \\ &\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda} < f \,,\, [R(\lambda - i\epsilon \,,\, A) - R(\lambda + i\epsilon \,,\, A)]f > d\lambda. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} &\forall (\lambda \in \Lambda) \,:\, \frac{1}{2\pi i} < f \,,\, [R(\lambda - i\epsilon \,,\, A) - R(\lambda + i\epsilon \,,\, A)]f >= \\ &\frac{1}{2\pi i} < f \,,\, 2i\epsilon [R(\lambda - i\epsilon \,,\, A) R(\lambda + i\epsilon \,,\, A)]f >= \\ &\frac{\epsilon}{\pi} < R(\lambda + i\epsilon \,,\, A)f \,,\, R(\lambda + i\epsilon \,,\, A)f >= \end{aligned}$$

(можно и так:

$$= \frac{\epsilon}{\pi} < R(\lambda - i\epsilon \,,\, A)f \,,\, R(\lambda - i\epsilon \,,\, A)f >= \ldots) \tag{3.79}$$

$$= \frac{\epsilon}{\pi} < R(\lambda + i\epsilon \,,\, A_0) Q(\lambda + i\epsilon) f \,,\, R(\lambda + i\epsilon \,,\, A_0) Q(\lambda + i\epsilon) f > . \tag{3.80}$$

Переходя к диагональному представлению оператора A_0 (т.е. переходя к преобразованию Фурье), мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda} < f\,,\,[R(\lambda - i\epsilon\,,\,A) - R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)]f > d\lambda =$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda}\Big(\int\limits_{\sigma(A_0)}\frac{\epsilon}{(\lambda-\mu)^2+\epsilon^2}\|U_d^0(Q(\lambda+i\epsilon)f)(\mu\,,\,\cdot)\|_{\Omega}^2 d\mu\Big)d\lambda = \tag{3.81}$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda}\Big(\int\limits_{\Lambda_0}(\cdots)d\mu\Big)d\lambda + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda}\Big(\int\limits_{\mathbf{C}(\Lambda_0)}(\cdots)d\mu\Big)d\lambda = I_1 + I_2.$$

Интеграл по $d\mu d\lambda$ в (4.81) мы представили как сумму двух интегралов: интеграла I_1 по области $\Lambda\otimes\Lambda_0$ и интеграла I_2 по области $\Lambda\otimes\mathbf{C}(\Lambda_0)$. В интеграле I_2 выполнено неравенство

$$\forall(\lambda\,,\,\mu)\,:\,\frac{\epsilon}{(\lambda-\mu)^2+\epsilon^2}\le C\epsilon$$

Интеграл I_2 на основе леммы 4.3.4 оценим так:

$$|I_2| = |\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda}\Big(\int_{\mathbf{C}(\Lambda_0)}(\cdots)d\mu\Big)d\lambda| < C\epsilon|\Lambda|\sup_{\lambda\in\Lambda}\int\limits_{\sigma(A_0)}\|U_d^0(Q(\lambda+i\epsilon)f)(\mu\,,\,\cdot)\|_{\Omega}^2 d\mu <$$
$$\epsilon C\sup_{\lambda\in\Lambda}\|Q(\lambda+i\epsilon)f\|^2.$$

Здесь мы обозначили символом $|\Lambda|$ лебегову меру полуинтервала Λ, учли лемму 4.3.4, равенство Парсеваля для преобразования U_d^0 и очевидное неравенство

$$\forall(\lambda\in\Lambda\,,\,f\in C_0^\infty)\,:\,\|Q(\lambda)f|\mathcal{H}\|\le\|Q(\lambda)f|\mathcal{H}_b^+\|\le C(f)$$

Лемма 3.3.5. *Функция*

$$(\lambda\,,\,\mu)\mapsto(U_d^0Q(\lambda)f)(\mu\,,\,\cdot)$$

как функция со значениями в $L^2(\Omega)$ *непрерывна по* $\lambda\,,\,\mu$ *на множестве*

$$Re\,\lambda>0\,,\,Im\,\lambda\ge0\,,\,\mu\in\mathbb{R}^1.$$

Доказательство. Имеем:

$$(U_d^0Q(\lambda)f)(\mu\,,\,\omega) = (4\pi^{3/2})^{-1}(\mu)^{1/4}\int\exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\mu})Q(\lambda)f(x)dx =$$
$$(4\pi^{3/2})^{-1}(\mu)^{1/4}\int\exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\mu})\rho^{-1/2}(x)\cdot\rho^{1/2}(x)Q(\lambda)f(x)dx =$$
$$\int g_1(x\,,\,\mu\,,\,\omega)g_2(x\,,\,\lambda)dxd\omega,$$

где

$$g_1(x\,,\,\mu\,,\,\omega) = (4\pi^{3/2})^{-1}(\mu)^{1/4}\exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\mu})\rho^{-1/2}(x),$$
$$g_2(x\,,\,\lambda) = \rho^{1/2}(x)Q(\lambda)f(x).$$

Следовательно,

$$\Big|(U_d^0 Q(\lambda_1)f)(\mu_1\,,\,\omega) - U_d^0 Q(\lambda_2)f)(\mu_2\,,\,\omega)\Big| \leq$$
$$C\Big[\Big(\int |g_1(x\,,\,\mu_1\,,\,\omega) - g_1(x\,,\,\mu_2\,,\,\omega)|^2 dxd\omega\Big)^{1/2} +$$
$$\Big(\int |g_2(x\,,\,\lambda_1) - g_2(x\,,\,\lambda_1)|^2 dxd\omega\Big)^{1/2}\Big] \leq$$
$$C\Big[\Big(\int \|((\mu_1)^{1/4}\exp(-i(\cdot\,,\,\omega)\sqrt{\mu_1}) - (\mu_2)^{1/4}\exp(-i(\cdot\,,\,\omega)\sqrt{\mu_2}))|\mathcal{H}_\rho^-\|^2 d\omega\Big)^{1/2} +$$
$$\|(Q(\lambda_1)f - Q(\lambda_2)f)|\mathcal{H}_\rho^+\|\Big] \to 0,$$

если

$$|\mu_1 - \mu_2| + |\lambda_1 - \lambda_2| \to 0\,,\; \rho = (1 + x^2)^{\sigma/2}\,,\; \sigma > 3.$$

Лемма доказана.

В интеграле I_1 по области $\Lambda \otimes \Lambda_0$ мы преобразуем подынтегральное выражение.

Лемма 3.3.6. *Справедливы равенства* (4.104) *и* (4.84)

Имеем:

$$U_d^0(Q(\lambda + i\epsilon)f)(\mu\,,\,\omega) =< e_d^0(\cdot\,,\,\mu\,,\,\omega)|(\mathsf{id} + VR(\lambda + i\epsilon\,,\,A))f(\cdot) >=$$
$$< e_d^0(\cdot\,,\,\mu\,,\,\omega)|Q(\lambda + i\epsilon)f(\cdot) >=< e_d^0(\cdot\,,\,\mu\,,\,\omega)|(Q^0(\lambda + i\epsilon))^{-1}f(\cdot) >; \quad (3.82)$$
$$U_d^0(Q(\lambda + i\epsilon)f)(\mu\,,\,\omega) =< Q^\star(\lambda + i\epsilon)^\star e_d^0(\cdot\,,\,\mu\,,\,\omega) \mid f(\cdot) > \quad (3.83)$$

Переходя к пределу $\epsilon \to 0$ в (4.81) и учитывая (4.79), получим:

$$U_d^+(f)(\lambda\,,\,\omega) = U_d^0(((Q(\lambda + i0)))f(\lambda\,,\,\omega) = U_d^0(((Q^0(\lambda + i0))^{-1})f(\lambda\,,\,\omega) \quad (3.84)$$

$$U_d^+(f)(\lambda\,,\,\omega) =< e_d^0(\cdot\,,\,\omega\,,\,\lambda)|Q(\lambda + i0)f(\cdot) >=$$
$$< Q(\lambda + i0)^\star e_d^0(\cdot\,,\,\omega\,,\,\lambda)|f(\cdot) >=$$
$$< e_d^0(\cdot\,,\,\omega\,,\,\lambda) + R(\lambda + i0\,,\,A)Ve_d^0(\cdot\,,\,\omega\,,\,\lambda)|f(\cdot) > . \quad (3.85)$$

Замечание 3.3.4. В [9] равенство (4.84) принято за определение преобразования U_d и преобразование U_d названо *искаженным* преобразованием Фурье.

В (4.81) учтем (4.104), формулу (4.54) и перейдем к пределу $\epsilon \to 0$. Получим:

$$< f\,,\, (E(\Lambda\,,\, A))f >= \int\limits_{\Lambda\otimes\Omega} | < e_d^0 + (\cdot\,,\, \lambda\,,\, \omega) \mid f(\cdot) > |^2 d\lambda d\omega, \qquad (3.86)$$

$$\text{где} \quad e_d(x\,,\, \lambda\,,\, \omega) = e_d^0(x\,,\, \lambda\,,\, \omega) + w(x\,,\, \lambda\,,\, \omega). \qquad (3.87)$$

Эквивалентность (4.77) и (4.76) есть следствие поляризационного тождества.

Утверждение 3 доказано в лемме 4.2.3.

Поведение спектральной функции в окрестности порогового значения $\lambda = 0$ в рассматриваемой ситуации проанализировано в работах [16, 40, 39, 42]. Доказано, что точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением конечной кратности.

Мы доказали утверждение, содержащееся в замечании 4.3.3

Полученные результаты сформулируем как

Теорема 3.3.2. *1. Пространство $\mathcal{H}$, в котором действует оператор A, можно представить как ортогонльную сумму двух пространств:*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s.$$

Пространство $\mathcal{H}_{ac}$ приводит любую ограниченную борелевскую функцию оператора A, сужение оператора A на пространство $\mathcal{H}_{ac}$ -оператор A_{ac} -имеет абсолютно непрерывный спектр, $\sigma(A_{ac}) = [0\,,\, \infty)$, пространство $\mathcal{H}_s$ конечномерно и есть линейная оболочка конечного числа собственных функций оператора A, соответствующие собственные значения отрицательны. Пространство $\mathcal{H}_s$ может быть пустым множеством, точка $\lambda = 0$ может быть собственным значением.

2. Спектральная функция оператора A при $\lambda > 0$ дается формулой

$$E(\lambda\,,\, A) = \sum_{\lambda_j \le 0} (E(\lambda_j + 0\,,\, A) - E(\lambda_j - 0\,,\, A)) + E(\lambda\,,\, A_{ac}), \qquad (3.88)$$

где $E(\lambda\,,\,A_{ac})$ может быть вычислена по формулам:

$$\forall(f\in C_0^\infty)\;:<f\,,\,E(\lambda_0\,,\,A_{ac})f>=\int\limits_{0<\lambda<\lambda_0}\|U_df(\lambda\,,\,\cdot)\|^2_\Omega d\lambda. \tag{3.89}$$

$$<g\,,\,E(\lambda_0\,,\,A_{ac})f>=\int\limits_{0<\lambda<\lambda_0}<U_dg(\lambda\,,\,\cdot)\,,\,U_df(\lambda\,,\,\cdot)>_\Omega d\lambda \tag{3.90}$$

$$E(\lambda_0\,,\,A_{ac})f(x)=\int\limits_{(0<\lambda<\lambda_0)\otimes\Omega}e_d^\star(x\,,\,\lambda\,,\,\omega))U_df(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega \tag{3.91}$$

где $e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ -(нормированная на δ-функцию) функция, которая диагонализует оператор A_0 (по условию 2 такая функция существует), $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$-решение уравнения (4.53) *(и уравнения с $\Gamma_-(\lambda)$ для знака $-$).*

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)=e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)+w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega), \tag{3.92}$$

$$\forall(f\in C_0^\infty)\;:\;U_df(\lambda\,,\,\omega)\stackrel{def}{=}<e_d(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega)|f(\cdot)>. \tag{3.93}$$

Перейдем в (4.89) к пределу $\lambda_0\to\infty$. Получим:

$$\forall(f\in C_0^\infty)\;:\;\|P_{ac}f\|^2=\int\limits_0^\infty\|U_d^\pm f(\lambda\,,\,\cdot)\|^2_\Omega d\lambda, \tag{3.94}$$

где

$$P_{ac}f=\lim_{\lambda\to\infty}E(\lambda\,,\,A_{ac})f.$$

Из (4.94) следует корректность следующего определения.

Определение 3.3.1. Положим

$$\begin{aligned}&\forall(f\in\mathcal{H}\,,\,f_n\in C_0^\infty\,,\,\|f-f_n\|\to0\,,\,n\to\infty)\;:\\&U_d^\pm f(\lambda\,,\,\omega)\stackrel{def}{=}\lim_{n\to\infty}U_d^\pm f_n(\lambda\,,\,\omega),\end{aligned} \tag{3.95}$$

на финитных функциях $U_d^\pm f_n$ вычисляется по (4.93), предел вычисляется в метрике $L^2([0\,,\,\infty)\otimes\Omega\,,\,d\lambda d\omega)$.

Ниже мы докажем, что преобразование $U_d^\pm f$ -диагонализующее преобразование для оператора A_{ac}.

Лемма 3.3.7. *Формулы* (4.73)-(4.74) *задают диагонализующее преобразование для оператора A.*

Доказательство. Из (4.90) (сначала для ступенчатых функций, потом для любых ограниченных борелевских) следует:

$$\forall (f\,,\,g \in C_0^\infty\,,\,\phi \in \mathcal{B}or):$$

$$< g\,,\,\phi(A_{ac})f >= \int\limits_0^\infty < U_d(g)(\lambda)\,,\,U_d(\phi(A_{ac})f)(\lambda) >_\Omega d\lambda \tag{3.96}$$

$$= \int\limits_0^\infty \phi(\lambda) < U_d(g)(\lambda)\,,\,U_d(f)(\lambda) >_\Omega d\lambda. \tag{3.97}$$

Из (4.94) следует, что пространство $\mathbf{Im}(U_d)$ замкнуто и потому есть гильбертово пространство. Поэтому из (4.96)-(4.97) следует, что

$$U_d(\phi(A)f)(\lambda\,,\,\omega) = \phi(\lambda)U_d(f)(\lambda\,,\,\omega). \tag{3.98}$$

Из (4.94) и (4.98) следует утверждение леммы.

Фиксируем внимание на следующем важном утверждении, которое, по-существу, есть следствие утверждения 3 теоремы 4.3.1 (или следствия (4.2.2), или леммы (4.2.4)).

Лемма 3.3.8. *Если $f \in \mathcal{H}_b^+$, то в некоторой окрестности каждой точки $\lambda_0 \in (0\,,\,\infty)$ функция $U_d f(\lambda\,,\,\omega)$ аналитична по λ и непрерывна по $\omega \in \Omega$.*

3.4 Связь между решениями уравнения Липмана-Швингера и волновыми операторами.

Предположим, что волновые операторы существуют и основные условия выполнены.

Для $n = 1\,,\,3$ рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx) & \xrightarrow{F} & L^2(\mathbb{R}^n\,,\,(2\pi)^{-n}d\xi) \\ {\scriptstyle W_\pm}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z} \\ L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx) & \xrightarrow[U_d]{} & L^2([0\,,\,\infty)\otimes\Omega\,,\,d\lambda d\omega) \end{array} \tag{3.99}$$

На этой диаграмме:

F -преобразование Фурье,

Z -преобразование, порожденнное заменой переменных (2.48), так что композиция ZF -диагонализирующее преобразование (см. 28) для оператора Лапласа,

$W_\pm$ -волновые операторы. Напомним, что волновые операторы $W_\pm(A\,,\,A_0)$ сплетают операторы A и A_0:

$$\phi(A)W_\pm(A\,,\,A_0) = W_\pm(A\,,\,A_0)\phi(A_0).$$

U_d -определенное равенством (4.95) преобразование.

Докажем ([9]) теорему.

Теорема 3.4.1. *Диаграмма* (4.99) *коммутативна (на диаграмме берутся одновременно либо верхние знаки, либо нижние).*

Проведем доказательство для оператора W_+. Имеем:

$$\forall (f \in P_{ac}(A_0)\mathbf{Dom}(A_0))\ : W_+ f = \lim_{t\to\infty} \exp(itA)\exp(-itA_0)f =$$

$$f + \lim_{a\to\infty} \int\limits_0^a \frac{d}{dt}\exp(itA)\exp(-itA_0)f dt =$$

$$f + i\lim_{\epsilon\to+0} \int\limits_0^\infty \exp(-\epsilon t + itA)V\exp(-itA_0)f dt. \tag{3.100}$$

$$U_d W_+ f = U_d(f) + iU_d \lim_{\epsilon\to+0} \int\limits_0^\infty \exp(-\epsilon t + itA)V\exp(-itA_0)f dt = \tag{3.101}$$

(в силу непрерывности U_d)

$$U_d(f) + i\lim_{\epsilon\to+0} \int\limits_0^\infty U_d(\exp(-\epsilon t + itA)V\exp(-itA_0)f)dt = \tag{3.102}$$

в силу (4.98)

$$U_d(f) + i\lim_{\epsilon\to+0} \int\limits_0^\infty (\exp(-\epsilon t + it\lambda)U_d V\exp(-itA_0)f)dt = \tag{3.103}$$

$$\lim_{\epsilon\to+0} U_d([\mathsf{id} - VR(\lambda + i\epsilon\,,\,A_0]f) = \lim_{\epsilon\to+0} U_d(Q^0(\lambda + i\epsilon)f). \tag{3.104}$$

Из (4.84) имеем:

$$U_d W_+ f = \lim_{\epsilon\to+0} U_d^0(Q(\lambda + i\epsilon)W_+ f). \tag{3.105}$$

Учтем (4.104). Получим:

$$\forall(f \in \mathbf{Dom}(A_0))\ :\ U_d^0 W_+(f) = \lim_{\epsilon\to+0} U_d^0((Q(\lambda+i\epsilon)Q^0(\lambda+i\epsilon))^*)(f)) = U_d^0(f). \tag{3.106}$$

Так как $\mathbf{Dom}(A_0)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, теорема доказана.

Следствие 3.4.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{Im}(U_d) = L^2(\mathbb{R}^n),$$

и поэтому оператор

$$U_d\ :\ \mathcal{H}_{ac} \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$$

обратим.

Следствие 3.4.2.

$$W_\pm f = (U_d)^{-1}U_d^0 f. \tag{3.107}$$

В приложении Е установлена связь между решениями уравнения Липмана-Швингера и оператором рассеяния.

Фиксируем внимание на следующем. Решающим в предлагаемом подходе оказалось то, что уравнение, в некотором смысле эквивалентное второму резольвентному уравнению (уравнение Липмана-Швингера), мы рассматривали не в основном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а в некотором вспомогательном пространстве $\mathcal{H}_\sigma$ или $\mathcal{H}_b$. Условия на потенциал подбирались так, чтобы это уравнение и его решение во вспомогательном пространстве оставались бы "хорошими" при выходе спектрального параметра λ на действительную ось (спектр). В исходном пространстве $\mathcal{H}$ решение не могло оставаться "хорошим" по определению спектра. Этот прием (введение вспомогательного пространства) называется принципом предельного поглощения.

Некоторые дополнительные свойства преобразования U_d. Положим

$$\mathcal{W}(f)(\lambda\,,\,\omega) = \int w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)f(x)dx \tag{3.108}$$

Лемма 3.4.1. *Если функция f имеет моменты достаточно высокого порядка:*

$$\exists(m<\infty) : \int(1+x^2)^m|f(x)|dx < \infty, \tag{3.109}$$

то функция $\mathcal{W}(f)(\lambda\,,\,\omega)$ непрерывна по $\lambda\,,\,\omega$ при $\omega\in\Omega\,,\,\lambda>0$.

Доказательство. На основе (4.10) имеем:

$$\mathcal{W}(f)(\lambda\,,\,\omega)=\int\frac{\exp(i(\sqrt{\lambda}(|x-y|-(\omega\,,\,y)))}{4\pi|x-y|}V(y)f(x)dxdy+$$
$$\int\frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)}{4\pi|x-y|}V(y)w(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)f(x)dxdy.$$

Первое слагаемое -непрерывная функция $\lambda\,,\,\omega$. Займемся вторым слагаемым. Имеем:

$$\Big|\int\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_1}|x-y|)}{4\pi|x-y|}V(y)w(y\,,\,\lambda_1\,,\,\omega_1)f(x)dxdy-$$
$$\int\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_2}|x-y|)}{4\pi|x-y|}V(y)w(y\,,\,\lambda_2\,,\,\omega_2)f(x)dxdy\Big|\leq$$
$$\int\Big|\Big(\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_1}|x-y|)}{4\pi|x-y|}-\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_2}|x-y|)}{4\pi|x-y|}\Big)f(x)\Big|\Big|V(y)\Big||w(y\,,\,\lambda_1\,,\,\omega_1)|dxdy+$$
$$\int\Big|\Big(\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_2}|x-y|)}{4\pi|x-y|}\Big)f(x)\Big|\Big|V(y)\Big||w(y\,,\,\lambda_1\,,\,\omega_1)-w(y\,,\,\lambda_2\,,\,\omega_2)|dxdy\leq$$
$$\int\Big[\int\Big|\Big(\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_1}|x-y|)}{4\pi|x-y|}-\frac{\exp(i\sqrt{\lambda_2}|x-y|)}{4\pi|x-y|}\Big)f(x)\Big|dx\Big]\Big|V(y)\Big||w(y\,,\,\lambda_1\,,\,\omega_1)|dy$$
$$+\int\Big[\int\Big|\frac{f(x)}{4\pi|x-y|}\Big|dx\Big]\Big|V(y)\Big||w(y\,,\,\lambda_1\,,\,\omega_1)-w(y\,,\,\lambda_2\,,\,\omega_2)|dy\leq$$
$$C(|\lambda_1-\lambda_2|+\|w(y\,,\,\lambda_1\,,\,\omega_1)-w(y\,,\,\lambda_2\,,\,\omega_2)|\mathcal{H}_\rho^-\|)$$
$$\to 0\,,\ \text{если}\quad |\lambda_1-\lambda_2|\to 0\,,\,\omega_1\to\omega_2.$$

Вычислим обратное преобразование U_d^{-1} (см. стр. 27)

Очевидна

Теорема 3.4.2. *Предположим, что существует такое плотное в $P_{ac}(A)\mathcal{H}$ множество $\mathcal{M}$, что*

$$\forall(f\,,\,g\in\mathcal{M}:\int U_d(f)^*(\lambda\,,\,\omega)U_d(g)(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega=$$
$$\int f(x)^*[\int e_+(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^*U_d(g)(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega]dx,$$

(т.е. для функций из $\mathcal{M}$ возможна перемена порядка интегрирования в равенстве Парсеваля),то

$$\forall(f\in P_{ac}(A)\mathcal{H}):f=\lim_{n\to\infty}\int U_d(f_n)e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^*d\lambda d\omega, f_n\to f\,,\,f_n\in\mathcal{M}.$$

Если потенциал V -финитная функция, то при любых $x\,,\ |x| > 0\,,\ \omega \in \Omega$ функция $e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ аналитична по λ в плоскости с рарезом $\arg\lambda = 2\pi - i0$ (см. [24]), и

$$e_d(x\,,\,|\lambda|\exp(+i0)\,,\,\omega)^* = e_d(x\,,\,|\lambda|\exp(2\pi - i0)\,,\,\omega)$$

В общем случае при действительных $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^* = e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^\dagger, \tag{3.110}$$

где

$$e(\pm,\pm\mid x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^\dagger = e(\mp,\mp\mid x\,,\,\lambda\,,\,\omega). \tag{3.111}$$

3.5 Построение волновых операторов стационарным методом.

Выше мы доказали, что волновые операторы, определенные формулами (3.3)-(3.4) как пределы при $t \to \pm\infty$, могут быть вычислены по формуле (4.107). Существование оператора в правой части равенства (4.107) вытекало из существования предела при $t \to \pm\infty$ в (3.3)-(3.4). Теперь мы независимо от построения пределов при $t \to \pm\infty$ и при других условиях на потенциал докажем, что правая часть равенства (4.107) существует и равна волновым операторам в смысле определения (3.3)-(3.4).

Предварительные сведения. Символом $\mathcal{B}or$ мы обозначаем множество всех ограниченных борелевских функций на $\mathbb{R}^1$. Пусть A -произвольный самосопряженный оператор, $E(\lambda\,,\,A)$ -спектральная функция оператора A и

$$\Lambda = (a\,,\,b]\,,\; E(\Lambda\,,\,A) = E(b\,,\,A) - E(a\,,\,A) \qquad (3.112)$$

-спектральный проектор на конечный полуинтервал Λ.

Пусть $P_{ac}(A)$ проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора A.

Положим по определению[1]

$$P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i}(R(\lambda - i\epsilon\,,\,A_{ac}) - R(\lambda + i\epsilon\,,\,A_{ac})). \qquad (3.113)$$

Заметим, что близкое по смыслу определение дано на стр. 36: на функциях из $\phi \in C_0^\infty$ квадратичные формы $\omega(\lambda\,,\,P_{ac}(A)\phi\,,\,P_{ac}(A)\phi)$ и $< P_{ac}(A)\phi\,,\,P_{ap}(\lambda\,,\,+0\,,\,A)P_{ac}(A)\phi >$ совпадают при почти всех λ .

Пусть U_d -диагонализирующее преобразование для оператора A, U_d^0 -диагонализирующее преобразование для оператора A_0 (см. стр. 25).

Лемма 3.5.1. *1.Оператор $P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A)$ неотрицателен:*

$$P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A) \geq 0 \qquad (3.114)$$

и

$$\forall(u \in \mathcal{H}\,,\,\epsilon > 0) : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} < u\,,\,P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A)P_{ac}(A)u > d\lambda =< u\,,\,P_{ac}(A)u > . \qquad (3.115)$$

[1] в физике твердого тела эта величина называется сглаженной плотностью состояний

2. Справедливо равенство:

$$\forall(u\,,\,v \in \mathcal{H}_{ac}\,,\,\phi \in \mathcal{B}or):$$
$$< u\,,\,\phi(A)E(\Lambda\,,\,A)v >= \int\limits_{\Lambda} < u\,,\,\phi(\lambda)P_{ap}(\lambda\,,\,+0\,,\,A)v > d\lambda. \qquad (3.116)$$

Здесь -$E(\Lambda\,,\,A_{ac})$ -спектральный проектор на $\Lambda \subset \sigma(A_{ac})$.

3. Билинейная форма

$$B(u\,,\,v\,,\,\Lambda) \stackrel{def}{=} \int\limits_{\Lambda} < u\,,\,P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A)v > d\lambda$$

удовлетворят неравенству:

$$\Big|B(u\,,\,v\,,\,\Lambda)\Big| \leq \Big|B(u\,,\,u\,,\,\Lambda)\Big|^{1/2}\Big|B(v\,,\,v\,,\,\Lambda)\Big|^{1/2} \qquad (3.117)$$

4. Справедливо равество:

$$\lim_{\epsilon \to 0} < f\,,\,P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A)g >= (U(f)(\lambda\,,\,\cdot)\,,\,U(g)(\lambda\,,\,\cdot))_{\Omega}. \qquad (3.118)$$

Доказательство. Неотрицательность:

$$< \phi\,,\,[\frac{1}{2\pi i}(R(\lambda - i\epsilon\,,\,A) - R(\lambda + i\epsilon\,,\,A))]\phi >=$$
$$\frac{\epsilon}{\pi} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\phi\,,\,R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\phi > \geq 0.$$

Нормировка:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} < u\,,\,P_{ap}(\lambda\,,\,\epsilon\,,\,A)u > d\lambda =$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int\limits_{\sigma(A_{ac})} \frac{\epsilon}{((\lambda-\mu)^2+\epsilon^2)} d_{\mu} < u\,,\,E(\mu\,,\,A_{ac})u >\Big)d\lambda =< u\,,\,P_{ac}(A)u > .$$

Здесь $E(\mu\,,\,A_{ac})$ -спектральная функция абсолютно непрерывной части оператора A.

Неравенство (4.117) -это неравенство Коши-Буняковского для неотрицательной квадратичной формы $B(u\,,\,u\,,\,\Lambda)$.

Последнее утверждение леммы -очевидное следствие определения 2.1.6.

Преобразование Фурье функций со значениями в гильбертовом пространстве. Напомним определение обобщения преобразования Фурье-Планшереля функций со значениями в гильбертовом пространстве (гильбертова преобразования Фурье).

Пусть $L^2(C(\mathbb{R}^1 \mapsto \mathcal{H})\,,\,dt)$ -множество тех непрерывных функций от $t \in \mathbb{R}^1$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, которые удовлетворяют условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt < \infty.$$

В пространстве $L^2(C(\mathbb{R}^1 \mapsto \mathcal{H})\,,\,dt)$ введем скалярное произведение

$$< f\,,\,g >_H := \int_{-\infty}^{\infty} < f(t)\,,\,g(t) > dt$$

и норму

$$\|f \mid L^2(C(\mathbb{R}^1 \mapsto \mathcal{H})\,,\,dt)\|^2 :=< f\,,\,f >_H .$$

Далее тем же символом мы будем обозначать пополнение пространства $L^2(C(\mathbb{R}^1 \mapsto \mathcal{H})\,,\,dt)$ по введенной норме.

На множестве функций $f(t) \in L^2(C(\mathbb{R}^1 \mapsto \mathcal{H})\,,\,dt)$ с компактным по t носителем определим преобразование Фурье:

$$F(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-it\xi) dt. \tag{3.119}$$

Интеграл по dt здесь понимается как интеграл Бохнера, т. е. как интеграл Римана от функции со значениями в гильбертовом пространстве.

Справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f)(\xi) \exp(it\xi) d\xi \tag{3.120}$$

и равенство Парсеваля

$$< f\,,\,g >_H = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{+\infty} < F(f)(\xi)\,,\,F(g)(\xi) > d\xi. \tag{3.121}$$

Для доказательства этих формул вычислим скалярное произведение

$$\forall (g \in \mathcal{H})\ :< g\,,\,F(f)(\xi) >_H = \int_{-\infty}^{\infty} < g\,,\,f(t) > \exp(-i\xi t) dt.$$

По формуле обращения для скалярного преобразования Фурье

$$< g\,,\, f(t) >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} < g\,,\, F(f)(\xi) > \exp(i\xi t)d\xi.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} < f(t)\,,\, f(t) > dt =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} < F^*(\xi)\,,\, \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\xi t)dt\Big) > d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(f)(\xi)\|^2.d\xi$$

Эти вычисления справедливы для функций $f(t)$ с компактным по t носителем. С помощью равенства Парсеваля они переносятся на общий случай.

Определение и свойства предабелевых волновых операторов. Положим по определению

$$W(+\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)u \overset{def}{=} \epsilon \int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-\epsilon t)\exp(itA)\exp(-itA_0)P_{ac}(A_0)u\, dt, \quad (3.122)$$

$$W(-\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)u \overset{def}{=} \epsilon \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(+\epsilon t)\exp(itA)\exp(-itA_0)P_{ac}(A_0)u\, dt. \quad (3.123)$$

Аналогично определяются операторы $W(\pm\epsilon\,,\, A_0\,,\, A_{ac})$ с областью определения $\mathbf{Dom}(A_{ac})$.

Замечание 3.5.1. Обратим внимание на то, что в в определении (4.122) входит проектор $P_{ac}(A_0)$.

Определенные формулами (4.122)-(4.123) операторы мы будем называть *предабелевыми* волновыми операторами.

Замечание 3.5.2. Для корректности определений 4.122-4.123 нужна *только* самосопряженность операторов A , A_0.

Замечание 3.5.3. Если непрерывная функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a < \infty, \quad (3.124)$$

то

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\epsilon\to+0} \epsilon \int_0^\infty \exp(-\epsilon t) f(t) dt, \tag{3.125}$$

причем из существования предела в (4.124) вытекает существование предела в правой части (4.125) и его равенство пределу в (4.124), но из существования предела (4.125) *не следует* существование предела в (4.124)

Поэтому из существования волновых операторов как пределов при $t \to \infty$ в слабой операторной топологии следует существование пределов предабелевых волновых операторов в слабой операторной топологии :

$$\lim_{\epsilon+0} W(\pm\epsilon\,,\, A\,,\, A_0), \tag{3.126}$$

но из существования пределов (4.126) *не следует* существование пределов в (3.3)-(3.4).

Лемма 3.5.2. *1. Справедлива оценка:*

$$\|W(\pm\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)\| \leq 1 \tag{3.127}$$

2. Для $\forall(u\,,\, v \in \mathcal{H})$ *справедливы равенства:*

$$< u\,,\, W(\pm 2\epsilon\,,\, A\,,\, A_0) v >= \frac{\epsilon}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} < R(\lambda \pm i\epsilon\,,\, A) u\,,\, R(\lambda \pm \epsilon\,,\, A_0) P_{ac}(A_0) v > d\lambda \tag{3.128}$$

Доказательство. Оценка (4.127) тривиальна, так как

$$\|\epsilon \int\limits_0^\infty \exp(-\epsilon t) \exp(itA) \exp(-itA_0) P_{ac}(A_0) u\, dt\| \leq$$
$$\epsilon \int\limits_0^\infty \exp(-\epsilon t) \| \exp(itA) \exp(-itA_0) P_{ac}(A_0) u\|\, dt \leq \|u\,\|^2.$$

Найдем преобразование Фурье функции

$$g(t) = \theta(t) \exp(-\epsilon t) \exp(-itA_0) v,$$
$$f(t) = \theta(t) \exp(-\epsilon t) \exp(-itA) u.$$

Имеем:

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\exp(-it\xi)dt =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\exp(-it\xi - \epsilon t - i\lambda t)dt\right)d_\lambda E(\lambda\,,\,A_0)v =$$
$$i\int_{-\infty}^{+\infty}(i\epsilon - \xi - \lambda)^{-1}d_\lambda E(\lambda\,,\,A_0)v = iR(i\epsilon - \xi\,,\,A_0)v. \tag{3.129}$$

Аналогично,

$$\widehat{f}(\xi) = iR(i\epsilon - \xi\,,\,A)u. \tag{3.130}$$

Используя (4.130), (4.129) и равенство Парсеваля (мы сделали замену $\epsilon \to 2\epsilon\,,\ -\xi \to \lambda$), получаем:

$$< u\,,\,W(+2\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)v >= 2\epsilon\int\limits_0^\infty < \exp(-itA - \epsilon t)u\,,\,\exp(-itA_0 - \epsilon t)v > dt =$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} < R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)u\,,\,R(\lambda + i\epsilon\,,\,A_0)P_{ac}(A_0)v > d\lambda. \tag{3.131}$$

Аналогично,

$$< u\,,\,W(-2\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)v >=$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} < R(\lambda - i\epsilon\,,\,A)u\,,\,R(\lambda - i\epsilon\,,\,A_0)P_{ac}(A_0)v > d\lambda. \tag{3.132}$$
$$< u\,,\,W(\pm 2\epsilon\,,\,A_0\,,\,A)v >=$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} < R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A_0)u\,,\,R(\lambda \pm i\epsilon\,,\,A)P_{ac}(A)v > d\lambda \tag{3.133}$$

Замечание 3.5.4. Для любого самосопряженного оператора A и любого $\epsilon > 0$ справедливо равенство

$$\epsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)u\|^2 d\lambda = \pi\|u\|^2 < \infty, \tag{3.134}$$

поэтому интеграл по $d\lambda$ в (4.131) сходится абсолютно.

Доказательство. Согласно спектральной теореме,имеем:

$$\epsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)u\|^2 d\lambda =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{\sigma(A)} \frac{\epsilon}{(\lambda-\mu)^2+\epsilon^2} d_\mu < u\,,\,E(\mu\,,\,A)u > \Big) d\lambda =$$

$$\pi \int\limits_{\sigma(A)} d_\mu < u\,,\,E(\mu\,,\,A)u >= \pi\|u\|^2.$$

Оценки предабелевых волновых операторов. Следующая серия оценок справедлива для любых самосопряженных операторов и основана на известной оценке резольвенты самосопряженного оператора через расстояние до спектра.

Лемма 3.5.3. *Если A-произвольный самосопряженный оператор, Λ^0-произвольное борелевское множество,$E(\Lambda^0\,,\,A)$ -спектральный проектор на Λ^0, то справедлива оценка:*

$$\|R(\lambda\,,\,A)E(\Lambda^0\,,\,A)u\| \le (dist(\lambda\,,\,\Lambda^0))^{-1}\|E(\Lambda^0\,,\,A)u\|. \tag{3.135}$$

Доказательство. Согласно спектральной теореме, имеем:

$$\|R(\lambda\,,\,A)E(\Lambda^0\,,\,A)u\|^2 = \int\limits_{\Lambda^0} |\lambda-\mu|^{-2} d_\mu < u\,,\,E(\mu\,,\,A)u > \le$$

$$(dist(\lambda\,,\,\Lambda^0))^{-2} \int\limits_{\Lambda^0} d_\mu < u\,,\,E(\mu\,,\,A)u >$$

Пусть $\Lambda_1\,,\,\Lambda_2$ непересекающиеся конечные (или бесконечные) полуинтервалы на $\mathbb{R}^1$,

$$dist(\Lambda_1\,,\,\Lambda_2) = 2\delta > 0, \tag{3.136}$$

Мы будем считать, что

$$\Lambda_1 \Subset (-\infty\,,\,c-\delta]\,,\,\Lambda_2 \Subset [c+\delta\,,\,\infty) \tag{3.137}$$

Очевидна

Лемма 3.5.4. *С не зависящими от ϵ константами справедливы неравенства:*

$$\forall(\lambda < c); \|R\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)u\| < C(1+|\lambda|)^{-1}\|u\|;$$
$$\forall(\lambda > c); \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\| < C(1+|\lambda|)^{-1}\|u\|,$$

Аналогичные неравенства справедливы с заменой $A \to A_0$.

Из оценки (4.135) и леммы 4.5.3 следует

Лемма 3.5.5. *Пусть $\Lambda\,,\, \Lambda_1\,,\, \Lambda_2$ -конечные полуинтервалы,*

$$\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2 \Subset \Lambda\,,\, dist(\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2\,,\, \mathbf{C}(\Lambda)) = \delta > 0, \tag{3.138}$$
$$u = E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, v = E(\Lambda_2\,,\, A_0)v. \tag{3.139}$$

Тогда

$$\Big| \int\limits_{\mathbf{C}(\Lambda)} < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)v > d\lambda \Big| = \tag{3.140}$$
$$O(1)\,,\, \epsilon \to 0. \tag{3.141}$$

Доказательство. Имеем:

$$\Big| \int\limits_{\mathbf{C}(\Lambda)} < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)v > d\lambda \Big| \le$$
$$\int\limits_{\mathbf{C}(\Lambda)} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\| \cdot \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_1\,,\, A_0)v\| d\lambda \le$$
$$C \int (|\lambda| + 1)^{-2} d\lambda < \infty.$$

Из леммы 4.5.4 вытекает

Лемма 3.5.6. *Если*

$$\Lambda_1 \Subset (-\infty\,,\, c - \delta]\,,\, \Lambda_2 \Subset [c + \delta\,,\, \infty),$$

то

$$\int\limits_{\lambda > c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\|^2 d\lambda \le C\|u\|^2$$
$$\int\limits_{\lambda < c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)u\|^2 d\lambda \le C\|u\|^2.$$

Аналогичные неравества справедливы с заменой $A \to A_0$.

Лемма 3.5.7. *Пусть полуинтервалы* Λ_1 *и* Λ_2 *не пересекаются:*

$$\Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 = \emptyset.$$

Тогда справедливо равенство:

$$E(\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2\,,\, A)\mathcal{H} =$$
$$(E(\Lambda_1\,,\, A) + E(\Lambda_2\,,\, A))\mathcal{H} = E(\Lambda_1\,,\, A)\mathcal{H} \oplus E(\Lambda_2\,,\, A)\mathcal{H},$$

поэтому

$$R(\lambda\,,\, A)(E(\Lambda_1\,,\, A) \bigcup E(\Lambda_2\,,\, A))u = R(\lambda\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u + R(\lambda\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)u$$
$$\|R(\lambda\,,\, A)(E(\Lambda_1 \bigcup E(\Lambda_2\,,\, A))u\|^2 = \|R(\lambda\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\|^2 + \|R(\lambda\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)u\|^2$$

Лемма 3.5.8. *Если выполнено условие* (4.136) *то*

$$\epsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big| < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u > \Big| d\lambda = O(\epsilon^{1/2})\,,\, \epsilon \to 0. \tag{3.142}$$

Доказательство.

Из леммы 4.5.4 следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big| < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u > \Big| d\lambda \le$$
$$\int\limits_{\lambda < c} \Big| < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u > \Big| d\lambda +$$
$$\int\limits_{\lambda > c} \Big| < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u > \Big| d\lambda \le$$
$$\Big(\int\limits_{\lambda < c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\|^2 d\lambda) \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\lambda < c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u\|^2 d\lambda) \Big)^{1/2} +$$
$$\Big(\int\limits_{\lambda > c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\|^2 d\lambda) \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\lambda > c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u\|^2 d\lambda) \Big)^{1/2}$$

Поэтому

$$\epsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big| < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_2\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_1\,,\, A_0)u > \Big| d\lambda \leq$$

$$\epsilon^{1/2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \epsilon \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)u\|^2 d\lambda)\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\lambda < c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u\|^2 d\lambda)\Big)^{1/2} +$$

$$\epsilon^{1/2}\Big(\int\limits_{\lambda > c} \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)E(\Lambda_1\,,\, A)u\|^2 d\lambda)\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \epsilon \|R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)u\|^2 d\lambda)\Big)^{1/2} \leq C\epsilon^{1/2}.$$

Определение 3.5.1. Положим

$$\Lambda_\delta(a\,,\, b) = \begin{cases} (a + \delta\,,\, b - \delta], & \text{если } \Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 = (a\,,\, b], \\ \emptyset & \text{если } \Lambda_1 \bigcap \Lambda_2 = \emptyset. \end{cases}$$

Пусть Λ_1 и Λ_2 -произвольные полуинтервалы.
Из лемм 4.5.8 и 4.5.7 вытекает

Лемма 3.5.9. *Справедливо равенство:*

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\epsilon \to 0} [< E(\Lambda_1\,,\, A)u\,,\, W_\pm(\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)E(\Lambda_2\,,\, A_0)u > - \tag{3.143}$$

$$< E(\Lambda_\delta(a\,,\, b)\,,\, A)u\,,\, W_\pm(\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)E(\Lambda_\delta(a\,,\, b)\,,\, A_0)u >] = 0. \tag{3.144}$$

Абелевы волновые операторы.

Определение 3.5.2. *Сильным (слабым) абелевым волновым оператором* $W_\pm^{ab}(A\,,\, A_0)v$ мы будем называть сильный (слабый) предел при $\epsilon \to 0$ предабелева волнового оператора (4.122)-(4.123):

$$W_\pm^{ab}(A\,,\, A_0) \stackrel{def}{=} \lim_{\epsilon \to 0} W_\pm(\epsilon\,,\, A\,,\, A_0). \tag{3.145}$$

Это определение согласуется с данным ранее на стр. 66. Ясно, что

$$\forall (a \in \mathbb{R}^1) \,:\, W_+^{ab}(A\,,\, A_0)v = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \int\limits_a^\infty \exp(-\epsilon t)\exp(iAt)\exp(-iA_0 t)P_{ac}(A_0)v dt. \tag{3.146}$$

Аналогично для знака $-$.

Получим простейшие условия существования абелевых волновых операторов. Мы рассмотрим случай

$$A_0 = -\Delta\,,\; A = -\Delta + V,$$

Заметим, что оператор V при рассматриваемых нами условиях может быть неограниченным. Возможны обобщения на случай, когда оператор A_0 -матричный дифференциальный оператор.

Теорема 3.5.1. *Если выполнены основные условия и степенная оценка* (4.29) *(или требования 5-9), то в слабой операторной топологии пространства* $\mathcal{H}$ *существуют пределы*

$$W^{ab}_{\pm}(A\,,\,A_0) = \lim_{\epsilon\to 0} W_{\pm}(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0). \tag{3.147}$$

Потом мы докажем, что при рассматриваемых ограничениях пределы (4.147) существуют в сильной операторной топологии.

Доказательство. Доказательство проведем для знака $+$. Согласно лемме (4.127) для доказательства существования предела (4.147) в слабой операторной топологии достаточно доказать существование предела

$$\lim_{\epsilon\to 0} < u\,,\, W_{\pm}(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0) P_{ac} v > \tag{3.148}$$

(4.148) для плотного в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ множества функций $\{u\otimes v\}$.

Пусть

$$M = C_0^{\infty}(0\;\infty)\otimes\Omega$$

-множество бесконечно дифференцируемых функций $(0\,,\,\infty)\mapsto H_{\Omega}$ с компактыми носителями и значениями в H_{Ω},

$$\Phi(A) = (U_d)^{-1}(M)\,,\; \Phi(A_0) = (U_d^0)^{-1}(M)\,,\; \Phi = \Phi(A)\otimes\Phi(A_0).$$

Множество Φ удовлетворяет условию:

$$\Phi = \{u\times v \mid u = E(\Lambda_1\,,\,A)u\,,\; v = E(\Lambda_2\,,\,A_0)v\,,\; \left(\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2\right) \Subset \Lambda\,,\; \Lambda\ \text{компактно}\}. \tag{3.149}$$

На удовлетворяющих условию (4.149) функциях $\{u\otimes v\}$ определим оператор

$$J(\epsilon\,,\,\Lambda)\,:< u\,,\, J(\epsilon\,,\,\Lambda) v >= \frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_{\Lambda} < R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)u\,,\, R(\lambda+i\epsilon\,,\,A_0)v > d\lambda. \tag{3.150}$$

Учтем, что в рассматриваемом нами случае

$$P_{ac}(A_0)\mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

Согласно формуле (4.131) имеем:

$$\lim_{\epsilon\to 0} < u\,,\, W_+(2\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)v >= \lim_{\epsilon\to 0} < u\,,\, J(\epsilon\,,\, \Lambda)v >=$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_{\Lambda} < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)Q^0(\lambda + i\epsilon)v > d\lambda. \tag{3.151}$$

Справедливы равенства:

$$\frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_{\Lambda} < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0)v > d\lambda =$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_{\Lambda} < R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)u\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)Q^0(\lambda + i\epsilon)v > d\lambda =$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int\limits_{\Lambda} < R(\lambda - i\epsilon\,,\, A)R(\lambda + i\epsilon\,,\, A)u\,,\, Q^0(\lambda + i\epsilon)v > d\lambda.$$

В диагональном представлении оператора A имеем:

$$< u\,,\, W(2\epsilon\,,\, A\,,\, A_0)v >= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\dots\Big), \quad \text{где}$$
$$\Big(\dots\Big) = \tag{3.152}$$
$$\int\limits_{\Lambda}\Big(\int \frac{\epsilon}{\pi((\mu-\lambda)^2+\epsilon^2)}(U_d(u)(\nu\,,\,\omega)\,,\, U_d(Q^0 v)(\nu\,,\,\omega))_{\Omega} d\nu\Big)d\lambda \tag{3.153}$$
$$\int\limits_{\Lambda}\Big(\int\limits_{\Lambda} \frac{\epsilon}{\pi((\nu-\lambda)^2+\epsilon^2)}(U_d(u)(\nu\,,\,\omega)\,,\, U_d(Q^0)v)(\nu\,,\,\omega))_{\Omega} d\nu\Big)d\lambda +$$
$$\int\limits_{\Lambda}\Big(\int\limits_{\mathbf{C}(\Lambda)} \frac{\epsilon}{\pi((\nu-\lambda)^2+\epsilon^2)}(U_d(u)(\nu\,,\,\omega)\,,\, U_d(Q^0(\lambda+i\epsilon)v)(\nu\,,\,\omega))_{\Omega} d\mu\Big)d\lambda =$$
$$I_1 + I_2.$$

Как и при доказательстве теоремы 4.3.1 выберем множество Λ так, чтобы

$$dist(\mathbf{C}(\Lambda)\,,\, (\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2)) > \delta > 0.$$

Тогда

$$|I_2| < C\epsilon \to 0\,,\, \epsilon \to 0.$$

Согласно лемме 4.4.1 (см. стр. 103) функция

$$(\lambda\,,\,\nu)\mapsto (U_d(u)(\nu\,,\,\omega)\,,\,U_d(Q(\lambda)^0 v)(\nu\,,\,\omega))_\Omega$$

непрерывна по $\lambda\,,\,\nu$ при

$$\nu\in\mathbb{R}^1\,,\;Re\,\lambda>0\,,\;Im\lambda\geq 0.$$

Поэтому в (4.153) существует предел при $\epsilon\to 0$:

$$< u\,,\,W_+^{ab}(A\,,\,A_0)v >= \lim_{\epsilon\to 0} < u\,,\,W_+(2\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)v >=$$
$$\int ((U_d u)(\lambda\,,\,\omega)\,,\,U_d(Q^0(\lambda+i0)v)(\lambda\,,\,\omega))_\Omega d\lambda. \tag{3.154}$$

Теорема доказана.

Замечание 3.5.5. В (4.153) мы перешли в диагональное представление оператора A. Можно было перейти в диагональное представление оператора A_0.

Интересно проследить, где и как для доказательства существования волновых операторов мы использовали предположения о потенциале. Нам нужно перейти к пределу $\epsilon\to 0$ в интеграле (4.153). Для этого мы требуем, чтобы функции $U_d(Q^0(\lambda+i\epsilon)v)(\nu\,,\,\omega))$ и $U_d(u)(\nu\,,\,\omega)$ были бы непрерывны по λ вплоть до действительной оси и по $\nu\in\Lambda$. Все это будет в том случае, если оператор $Q^0(\lambda)$ будет "хорошим" при λ действительных, т.е. если будет "хорошим" потенциал.

Легко видеть, что доказательство теоремы не изменится при заменее

$$A\to A_0\,,\;A_0\to A\,,\;P_{ac}(A_0)\to P_{ac}(A)$$

поэтому справедливо

Следствие 3.5.1. *Если выполнены основные условия и степенная оценка* (4.29)*, то в слабой операторной топологии пространства $\mathcal{H}$ существуют пределы*

$$W_\pm^{ab}(A_0\,,\,A)=\lim_{\epsilon\to 0} W_\pm(\epsilon\,,\,A_0\,,\,A). \tag{3.155}$$

Следствие 3.5.2. *Справедливо равенство:*

$$\forall (u\,,\,v\in\mathcal{H}\,,\,\Lambda(a)=(-a\,,\,a])\;:$$
$$\exists < u\,,\,W_\pm^{ab}(A\,,\,A_0)v >= \lim_{a\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0} < u\,,\,J(\epsilon\,,\,\Lambda(a))v >\,. \tag{3.156}$$

Сплетающее свойство и полнота абелевых волновых операторов.

Теорема 3.5.2. *Если абелев волновой оператор $W^{ab}(A\,,\,A_0)$ существует, то для любой ограниченной борелевской функции f справедливо равенство:*

$$f(A_{ac})W^{ab}(A\,,\,A_0) = W^{ab}(A\,,\,A_0)f(A_0). \tag{3.157}$$

Доказательство. Справедливы равенства:

$$\forall(\tau \in \mathbb{R}^1)\,:\,\Big[W^{ab}(A\,,\,A_0)\Big]\exp(i\tau A_0) = \Big[\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\int_0^\infty \exp(itA)\exp(-itA_0)dt\Big]\exp(i\tau A_0) =$$

$$\exp(i\tau A)\Big[\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\int_\tau^\infty \exp(itA)\exp(-itA_0)dt\Big] = \exp(i\tau A)W^{ab}(A\,,\,A_0).$$

Дальше рассуждаем, как и при доказательстве теоремы 3.1.1 на стр. 49. Теорема доказана.

Лемма 3.5.10. *Область значений оператора $W^{ab}(A\,,\,A_0)$ принадлежит абсолютно непрерывному подпространству оператора A:*

$$\mathbf{Im}(W^{ab}(A\,,\,A_0) \subset P_{ac}(A)\mathcal{H}.$$

Доказательство. Пусть

$$u \in \mathbf{Im}(W^{ab}(A\,A_0)).$$

Тогда

$$\exists(v \in P_{ac}(A_0)\mathcal{H})\,:\,|< u\,,\,E(\Lambda\,,\,A_{ac})u >| = |< u\,,\,E(\Lambda\,,\,A_{ac})W^{ab}(A\,,\,A_0)v >| =$$
$$|< u\,,\,W^{ab}(A\,,\,A_0)E(\Lambda\,,\,A_0)v >| \le |\|u\| \cdot |< v\,,\,E(\Lambda\,,\,A_0)v >|^{1/2} \to 0\,,\,|\Lambda| \to 0.$$

Унитарность абелевых волновых операторов

Теорема 3.5.3. *Если выполнены условия теоремы 4.5.1, то абелевы волновые операторы унитарны:*

$$W^{ab}(A\,,\,A_0)^* = W^{ab}(A\,,\,A_0)^{-1}. \tag{3.158}$$

Доказательство. Преобразуем интеграл J. Имеем:

$$J(\epsilon\,,\,\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)^{\star}R(\lambda+i\epsilon\,,\,A_0)d\lambda,$$

$$J(\epsilon\,,\,\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}Q(\lambda+i\epsilon)^{\star}R(\lambda-i\epsilon\,,\,A_0)R(\lambda+i\epsilon\,,\,A_0)d\lambda,$$

$$J(\epsilon\,,\,\Lambda)^{\star}=\int\limits_{\Lambda}R(\lambda-i\epsilon\,,\,A_0)R(\lambda+i\epsilon\,,\,A_0)Q(\lambda+i\epsilon)d\lambda.$$

Учтем, что

$$\mathbf{Im}(W^{ab}(A\,,\,A_0))\subset P_{ac}(A).$$

Поэтому в диагональном представлении оператора A_0 имеем:

$$\begin{aligned}
&< W^{ab}(A\,,\,A_0)u\,,\,W^{ab}(A\,,\,A_0)v >=\\
&\lim_{a2\to\infty}\lim_{\epsilon_2\to 0}\lim_{a1\to\infty}\lim_{\epsilon_1\to 0} < J(\epsilon_2\,,\,\Lambda(a2))u\,,\,J(\epsilon_1\,,\,\Lambda(a1))v >=\\
&\lim_{a1\to\infty}\lim_{\epsilon_1\to 0} < u\,,\,J(\epsilon_2\,,\,\Lambda(a2))^{*}J(\epsilon_1\,,\,\Lambda(a1))v >=\\
&\lim_{a2\to\infty}\lim_{\epsilon_2\to 0}\lim_{a1\to\infty}\lim_{\epsilon_1\to 0}\int\limits_{\Lambda(a2)}\int\limits_{\Lambda(a1)}\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(\frac{\epsilon_1}{(\lambda 1-\mu)^2+\epsilon_1^2}\cdot\frac{\epsilon_2}{(\lambda 2-\mu)^2+\epsilon_2^2}\Big)\otimes\\
&(U_d^0(Q(\lambda_2+i\epsilon_2)u)(\mu)\,,\,U_d^0(Q(\lambda_1+i\epsilon_1)v)(\mu))_{\Omega}d\mu d\lambda_1 d\lambda_2.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались известным равенством:

$$\begin{aligned}
&\Big(\int f(\mu)d_{\mu}E(\mu\,,\,A)\Big)\cdot\Big(\int g(\mu)d_{\mu}E(\mu\,,\,A)\Big)=\\
&\Big(\int f(\mu)g(\mu)d_{\mu}E(\mu\,,\,A)\Big),
\end{aligned}$$

которое справедливо для любого самосопряженного оператора A и любых ограниченных борелевских функций $f\,,\,g$.

Интеграл по $d\mu$ мы представляем как сумму двух интегралов: по ограниченной области

$$\{\mu|dist(\mu\,,\,\Lambda(a))<\delta\}$$

и ее дополнению. Интеграл по дополнению оценивается на основе неравенства Бесселя, а в первом интеграле переходим к пределу $\epsilon_1\to 0\,,\,\epsilon_2\to 0$, что можно сделать, так как функция

$$(\lambda\,,\,\mu)\mapsto(U_d^0(Q(\lambda_2+i\epsilon_2)u)(\mu)\,,\,U_d^0(Q(\lambda_1+i\epsilon_1)v)(\mu))_{\Omega}\qquad(3.159)$$

в силу леммы 4.3.5 непрерывна при

$$Re\,\lambda > 0\,,\; Im\,\lambda \geq 0\,,\; \mu \in \Lambda. \tag{3.160}$$

Получаем:

$$< W^{ab}(A\,,\,A_0)u\,,\,W^{ab}(A\,,\,A_0)v> = < U_d(u)\,,\,U_d(v)> = < u\,,\,v>,$$

(последнее равенство -на основе теоремы 4.3.1). Теорема доказана.

Следствие 3.5.3. *В условиях теоремы 4.5.1 операторы $W(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)$ при $\epsilon \to 0$ сходятся к оператору $W^{ab}(A\,,\,A_0)$ в сильной операторной топологии:*

$$\forall (u \in P_{ac}(A_0))\;:\;\lim_{\epsilon\to 0}\|(W^{ab}(A\,,\,A_0) - W(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0))u\| = 0. \tag{3.161}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{gathered}\lim_{\epsilon\to 0}\|(W^{ab}(A\,,\,A_0) - W(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0))u\|^2 = \\ \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\|W^{ab}(A\,,\,A_0)u\|^2 + \|W(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)u\|^2 - \\ 2Re\,< W^{ab}(A\,,\,A_0)u\,,\,W(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)u>\Big) \leq \\ \limsup_{\epsilon\to 0}(\|W(\epsilon\,,\,A\,,\,A_0)u\|^2 - \|u\|^2) = 0.\end{gathered}$$

Комментарии и литературные указания. Мы следовали классическим работам [24, 27, 28, 35, 36].Применяемые нами методы не выходят за традиционые рамки теории Рисса-Шаудера. По-существу, наше изложение построено как развернутое упражнение на изложенную в [22] теорию Рисса-Шаудера и аналитическую теорию Фредгольма, оно расчитанно на читателя с минимальной математической подготовкой. В общем случае рассуждения, как правило, строятся по приведенному выше классическому плану, но используется более изощренная техника. Полученные нами условия существования и полноты волновых операторов совпадают с условиями [24]. С точки зрения физика, потенциал в уравнении Шредингера -это подгоночная функция, и требования на нее довольно произвольны. В настоящее время разработаны специальные методы [25], которые позволяет доказать существование и полноту волновых операторов (но не развить теорию уравнения Липмана-Швингера!)для потенциалов, убывающих как $O(|x|^{-(1+\epsilon)})$. Рассматриваемая как глава теории дифференциальных уравнений, стационарная теории рассеяния подробно изложена в главах 12 и 30 книг [9, 10].

Часть II

Резонансы.

Обычно физики называют резонансом резкое изменение (bump) измеряемых величин при незначительном изменении условий эксперимента. Поиск и интерпретация резонансов часто являются наиболее интересной и информативной частью эксперимента. В рассматриваемых нами задачах квантовой механики явление резонанса связано с теорией квазистационарных состояний и теорией туннелирования (связь между теорией туннелирования и теорией квазистационарных состояний установлена Г.А.Гамовым). Одна из первых математических моделей резонансов и туннелирования была предложена Г.А.Гамовым [71, 72], с математической точки зрения эта модель изучалась К.Фридрихсом [73, 68].Интересные примеры явно решаемых задач теории резонансов приведены в [82].

Современная математическая теория резонансов обычно рассматривает резонансы как возмущенные (до возмущения -“погруженные” (embedded) в непрерывный спектр) собственные значения. В иной трактовке резонансы -это расположенные близко к действительной оси полюсы “взвешенной” функции Грина т.е. функции

$$\psi(\lambda) : \lambda \to < \phi , (\lambda - H)^{-1}\phi > \ \phi \in C_0^\infty , H = H_0 + V , \|V\| \ll 1.$$

на втором листе римановой поверхности функции $\psi(\lambda)$ Если λ -такой полюс, то величина $Re\,\lambda$ интерпретируется как энергия резонанса, величина $Im\,\lambda$ интерпретируется как ширина резонанса (обратное время жизни). Однако теория резонансов не сводится только к теории возмущения “погруженных” собственных значений.

Поясним это на примере. Рассмотрим одномерную стационарную задачу рассеяния на потенциале вида

$$V(x) = V_0(\exp(-(x-a)^2/l) + \exp(-(x+a)^2/l))$$

(двойной барьер). Если параметры потенциала подобраны так, что $V_0 \gg 1$, $l \ll 1$, то у решения задачи рассеяния будет четко выраженный резонанс: аналитическое продолжение матрицы рассеяния будет иметь расположенный близко от действительной оси полюс и коэффициент прохождения в резонансе будет почти равен единице. Изменим потенциал. Пусть

$$max_{x>0}V(x) = V(x_{max}),$$
$$\widetilde{V}(x) = \begin{cases} V(x) \, , \, x < x_{max} \\ V(x_{max}) \, , \, x_{max} < x < 10x_{max} \\ V(x - 9x_{max}) \, , \, x > 10x_{max}. \end{cases}$$

Решение задачи рассеяния на потенциале $\widetilde{V}(x)$ будет иметь полюс матрицы рассеяния почти в той же точке, однако оказывается, что рассеяние на потенциале $\widetilde{V}(x)$ качественно отличаться от рассеяния на потенциале $V(x)$: коэффициент прохождения в подбарьерной области для потенциала $\widetilde{V}(x)$ будет всюду почти ноль, и теории резонансов нужно как-то объяснить это различие.

Рассматриваемая ниже математическая модель резонансов опирается на изучение аналитического продолжения матрицы рассеяния в комплексную плоскость спектрального параметра и в этом смысле она является вариантом предложенной Г.Гамовым теории.

Мы постараемся выяснить, как из полюса матрицы рассеяния получается скачок амплитуды рассеяния, и чему равен скачок амплитуды рассеяния при прохождении системы через резонанс. Мы докажем, что при определенных условиях скачок амплитуды рассеяния при прохождении системы через резонанс не зависит от деталей взаимодействия и имеет универсальный характер.

3.6 Модель резонансного рассеяния.

Описание модели Предлагаемая модель описывает резонансы открытого акустического резонатора (резонатора Гельмгольца), резонансы в системе квантовый волновод и резонатор (квантовая точка), резонансы при квантовомеханическом рассеянии на ловушечном потенциале. Во всех этих случаях резонансы описываются в рамках одной и той же математической модели.

Сначала мы в общем виде изложим схему рассуждений, а потом применим эту схему к конкретным задачам. Приведем наиболее существенные предположения, на которые мы будем опираться.

В приложениях часто приходиться рассматривать возмущение неограниченного оператора A_0 неограниченным оператором V и рассматривать неограниченный оператор $A = A_0 + V$. Часто это связано с громоздким исследованием областей определения соответствующих операторов. Удобно отделить это исследование областей определения от задачи собственно теории возмущений, рассмотрев операторы $\phi(A_0)$, $\phi(A_0 + V)$, $\phi(A_0 + V) - \phi(A_0)$, где $\phi(\lambda)$ соответствующим образом подобранная функция, и свести задачу к задаче возмущения для ограниченных операторов. Мы будем предполагать, что такое сведение уже сделано.

Основные предположения

1. Основным гильбертовым пространством в рассматриваемых нами

задачах будет пространство

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n\,,\, dx)\,,\; n = 1\,,\, 3.$$

2. Пространство $\mathcal{H}$ мы будем рассматривать как оснащенное пространство (см. 19):

$$\mathcal{H}_b^+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_b^-,$$

где

$$\|f \mid \mathcal{H}_b^{\pm}\|^2 = \int |f(x)|^2 \exp(\pm b|x|)dx. \tag{3.162}$$

3. Мы будем предполагать, что A_0 -*ограниченный* самосопряженный оператор.

4. Мы будем предполагать, что V -самосопряженный *ядерный* в $\mathcal{H}$ оператор, который удовлетворяет условию:

$$V \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_b^- \to \mathcal{H}_b^+).$$

5. Мы будем предполагать, что диагонализующим пространством для операторов $A = A_0 + V$ и A_0 является пространство

$$\mathcal{H}_0 = [0\,,\, a) \times \Omega\,,\; \omega \in \Omega\,,\; |\omega| = 1,$$

где Ω -единичная сфера.

6. Мы будем предполагать, что в некотором круге $\{\lambda||\lambda - \lambda_\infty| < \delta\}$ функция

$$\lambda \to R(\lambda\,,\, A_0)$$

аналитична по λ как функция со значениям в пространстве

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_b^+ \to \mathcal{H}_b^-)$$

(см. стр. 83, предположение 7) Выбор точки λ_∞ пояснен ниже.

7. Пусть потенциал

$$V = V_\infty$$

и оператор

$$A = A_\infty$$

удовлетворяют перечисленным выше условиям и множество

$$(\lambda_\infty - \delta\,,\,\lambda_\infty)\bigcup(\lambda_\infty\,,\,\lambda_\infty + \delta)$$

принадлежит абсолютно непрерывному спектру оператора A_∞, а точка λ_∞ принадлежит точечному спектру оператора A_∞:

$$\exists(\psi_\infty \neq 0)\;:\;A_\infty\psi_\infty = \lambda_\infty\psi_\infty,$$

причем $\psi_\infty \in \mathcal{H}_b^+$.

8. Мы будем предполагать, что λ_∞ -простое собственное значение:

$$dim\mathbf{Ker}(\lambda_\infty \mathsf{id} - A_\infty) = 1.$$

Пусть U_d^0 , U_d -диагонализующие преобразования для операторов A_0 , A.

9. Мы будем предполагать что диагонализующие преобразования U_d^0 , U_d и обратные к ним задаются интегральными ядрами:

$$\begin{aligned}
&\widehat{f}_0(\lambda\,,\,\omega) \equiv U_d^0 f(\lambda\,,\,\omega) = \int U_d^0(x|\lambda\,,\,\omega)f(x)dx,\\
&\widehat{f}(\lambda\,,\,\omega) \equiv U_d f(\lambda\,,\,\omega) = \int U_d(x|\lambda\,,\,\omega)f(x)dx,\\
&f(x) = \int (U_d^0)^{-1}(x|\lambda\,,\,\omega)\widehat{f}_0(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega,\\
&f(x) = \int U_d^{-1}(x|\lambda\,,\,\omega)\widehat{f}(\lambda\,,\,\omega)d\lambda d\omega
\end{aligned}$$

и для любых $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в круге $\{\lambda||\lambda - \lambda_\infty| < \delta\}$ функции

$$U_d^0 f(\lambda\,,\,\omega)\,,\,U_d f(\lambda\,,\,\omega)$$

аналитичны по λ как функция со значениями в пространстве $L^2(\Omega)$.

10. Пусть ψ_∞ , V_∞ -введенные выше величины. Мы будем предполагать, что

$$<\psi_\infty\,,\,V_\infty\psi_\infty> \neq 0. \tag{3.163}$$

Условие 10 связано с “золотым правилом” Ферми. На важность правила Ферми для теории резонансов указано в [66].

11. Мы будем предполагать, что существует последовательность $\{V_n\}$ потенциалов, для которой операторы

$$A_n = A_0 + V_n \qquad (3.164)$$

на интервале $(\lambda_\infty - \delta\,,\, \lambda_\infty + \delta)$ имеют только абсолютно непрерывный спектр и

$$\|(V_\infty - V_n)|Ncl\| \to 0\,,\; \|(V_\infty - V_n)|\mathcal{K}\| \to 0\,,\; n \to \infty.$$

Напомним, что инволюцией l гильбертова пространства $\mathcal{H}$ мы называем такое вещественно-линейное отображение

$$l\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

которое удовлетворяет условиям

$$l(\lambda\psi) = \lambda^* l(\psi)\,,\; l^2 = \mathsf{id}.$$

12. Мы предположим, что инволюция l удовлетворяет условию:

$$l(\Gamma_{\pm,n}(\lambda)\psi) = \Gamma_{\mp,n}(\lambda^*)l(\psi). \qquad (3.165)$$

(обозначения пояснены ниже). Для выполнения условия (4.165) достаточно, чтобы были выполнены условия

$$l(-\Delta) = (-\Delta)l\,,\; lV = Vl. \qquad (3.166)$$

13. Мы будем предполагать, что матрица рассеяния $S(\lambda\,,\, A\,,\, A_0)$ дается формулой:

$$S(\lambda\,,\, A\,,\, A_0)\phi(\lambda\,,\, \omega_1) = \phi(\lambda\,,\, \omega_1) - 2\pi i \int t(\lambda + i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2)\phi(\lambda\,,\, \omega_2)d\omega_2, \qquad (3.167)$$

где

$$t(\lambda + i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2) = U_d^0(T(\lambda + i0)(U_d^0)_d^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2))(\lambda\,,\, \omega_1). \qquad (3.168)$$

См. стр. 69.

Правило Ферми В математической теории рассеяния правилом Ферми (" золотым правилом Ферми") называется приближенная формула для мнимой части полюса возмущенной матрицы рассеяния, если до возмущения этот полюс был "погруженным" в непрерывный спектр собственным значением. Это понимание несколько отличается от того, что понимают физики под правилом Ферми. Правило Ферми -один из классических результатов квантовой механики. Мы будем существенно опираться на этот результат. Выведем равенство, эквивалентное правилу Ферми.

Напомним некоторые обозначения(см. стр. 83) и определение операторов $\Gamma_{\pm,n}(\lambda)$. Символом $\mathcal{A}_\delta$ мы обозначаем множество функций, аналитических в круге $\{\lambda||\lambda-\lambda_\infty|<\delta\}$ и принимающих значения в пространстве

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_b^- \to \mathcal{H}_b^-) \ : \Gamma_{\pm,n}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_b^- \to \mathcal{H}_b^-)\,,\, |\lambda-\lambda_\infty|<\delta,$$

$$\Gamma_{+,n}(\lambda) = \begin{cases} R(\lambda\,,\, A_0)V_n\,,\, Im\,\lambda>0, \\ \in \mathcal{A}_\delta\,,\, \forall(|\lambda-\lambda_\infty|<\delta). \end{cases}$$

$$\Gamma_{-,n}(\lambda) = \begin{cases} R(\lambda\,,\, A_0)V_n\,,\, Im\,\lambda<0, \\ \in \mathcal{A}_\delta\,,\, \forall(|\lambda-\lambda_\infty|<\delta). \end{cases}$$

К обозначению оператора $\Gamma_\pm(\lambda)$ мы добавили индекс n, чтобы проследить зависимость от потенциала.

Символом $<\ |\ >$ мы обозначали (см. стр.20) билинейную форму:

$$< f \ | \ g >= \int f(x)g(x)dx$$

Форму $< \quad | \quad >$ мы будем рассматривать как спаривание пространств $\mathcal{H}_b^\pm$ и $\mathcal{H}_b^\mp$.

Поясним на неформальном уровне смысл дальнейших оценок.

Число $\lambda=\lambda_\infty$ есть "погруженное" (embedded) в непрерывный спектр собственное значение оператора $A_\infty = A_0 + V_\infty$. В соответствии с идеологией принципа предельного поглощения, мы рассматриваем точку λ_∞ как *изолированную* особую точку (полюс) аналитической функции

$$\lambda \mapsto (\mathsf{id} - \Gamma_{+,\infty}(\lambda))^{-1}.$$

Существенно, что оператор $\Gamma_{+,\infty}(\lambda)$ рассматривается не как оператор в исходном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а как оператор во вспомогательном пространстве $\mathcal{H}_b^-$. Исходя из этого мы докажем, что малое по норме пространства $\mathcal{H}_b^-$ возмущение потенциала приведет к малому сдвигу полюса λ_∞ на второй лист римановой поверхности функции $R(\lambda\,,\, A)$.

Мы начнем с доказательства

Лемма 3.6.1. *Если выполнено условие 10, то число $\mu = 1$ есть полупростое собственное значение оператора $\Gamma_{+,\infty}(\lambda_\infty)$, рассматриваемого как оператор в пространстве $\mathcal{H}_b^-$.*

Доказательство. Если $\phi \in \mathcal{H}_b^-$, то функция

$$\lambda \to < (\lambda \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty \,|\, R(\lambda\,,\, A_0)V_\infty\phi >$$

аналитична в окрестности λ_∞, а так как

$$< (\lambda \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty \,|\, R(\lambda\,,\, A_0)V_\infty\phi > \equiv < \psi_\infty \,|\, V_\infty\phi >\,,\, Im\,\lambda > 0,$$

то

$$< (\lambda_\infty \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty \,|\, R(\lambda_\infty\,,\, A_0)V_\infty\phi > = < \psi_\infty \,|\, V_\infty\phi > .$$

Если ϕ есть решение уравнения

$$(\mathsf{id} - \Gamma_{+,\infty}(\lambda_\infty))\phi = \psi_\infty,$$

то

$$\begin{aligned}&< (\lambda_\infty \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty \,|\, (\mathsf{id} - \Gamma_{+,\infty}(\lambda_\infty))\phi > = \\ &< \psi_\infty\,,\, V_\infty\psi_\infty > = < V_\infty\psi_\infty \,|\, \phi > - < \psi_\infty \,|\, V_\infty\phi > = 0,\end{aligned}$$

а это противоречит условию 10. Следовательно, уравнение для ϕ решений не имеет, поэтому все нильпотенты оператора $\Gamma_{+,\infty}(\lambda_\infty)$ равны нулю и точка $\mu = 1$ есть полюс первого порядка для функции

$$\mu \to (\mu \mathsf{id} - \Gamma_{+,\infty}(\lambda_\infty))^{-1}.$$

Из леммы 4.6.1 следует, что при $n = \infty$ размерность области значений проектора

$$P_{+,n}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|1-\mu|=\epsilon} R(\mu\,,\, \Gamma_{+,n}(\lambda))d\mu \tag{3.169}$$

равна единице. Так как по условию

$$V_n \to V_\infty\,,\, n \to \infty\,, \text{ то равномерно по } \lambda\,:\, P_{+,n}(\lambda) \to P_{+,\infty}(\lambda)\,,\, n \to \infty,$$

и существуют такие числа $\epsilon > 0\,,\, N < \infty$ что при $n > N\,,\, |\lambda_\infty - \lambda| < \delta$ размерность области значений проектора $P_{+,n}(\lambda)$ равна единице.

Оператор $P_{+,n}(\lambda)$ коммутирует с $\Gamma_{+,n}(\lambda)$ и справедливо равенство $P^2_{+,n}(\lambda) = P_{+,n}(\lambda)$, поэтому

$$P_{+,n}(\lambda)\Gamma_{+,n}(\lambda) = \Gamma_{+,n}(\lambda)P_{+,n}(\lambda) = \mu_n(\lambda)P_{+,n}(\lambda). \tag{3.170}$$

Равенство (4.170) служит определением функции $\mu_n(\lambda)$.

В дальнейшем мы не будем писать индекс n, если он может принимать любое значение $N \leq n \leq \infty$.

Лемма 3.6.2. *Для проектора* (4.170)*справедлива формула*

$$P_{+}(\lambda)f = c(\lambda) < l(\psi(\lambda))\,,\,Vf > \psi(\lambda), \tag{3.171}$$

где

$$\mu(\lambda)\psi(\lambda) = \Gamma_{+}(\lambda)\psi(\lambda) \quad , \quad \psi(\lambda) \in \mathcal{H}_b^{-}. \tag{3.172}$$

$$c(\lambda) =< l(\psi(\lambda))\,,\,V\psi(\lambda) >^{-1}, \tag{3.173}$$

$$\forall(|\lambda - \lambda_\infty| < \delta)\,:\,|1 - \mu_n(\lambda)| < \epsilon\,,\,\|\psi_n(\lambda) - \psi_\infty(\lambda) \mid \mathcal{H}_b^{-}\| \to 0\,,\,n \to \infty. \tag{3.174}$$

В (4.174) *сходимость равномерна по* λ *и в* (4.171) l *-любая инволюция, которая удовлетворяет условию* (4.165).

Доказательство. Область значений проектора $P_{+,\infty}(\lambda_\infty)$ есть линейное пространство, натянутое на ψ_∞. Поэтому существует такой вектор $f_0 \in \mathcal{H}_b^{-}$, что

$$P_{+,\infty}(\lambda_\infty)f_0 = \psi_\infty.$$

Положим по определению

$$\psi_n(\lambda) = P_{+,n}(\lambda)f_0.$$

В метрике пространства $\mathcal{H}_b^{-}$ функция $\psi_n(\lambda)$ аналитична по λ в окрестности точки λ_∞ и условие (4.174) выполнено, из (4.170) следует, что функция $\psi_n(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu_n(\lambda)\psi_n(\lambda) = \Gamma_{+,n}(\lambda)\psi_n(\lambda).$$

Так как область значений проектора $P_{+,n}(\lambda)$ натянута на вектор $\psi_n(\lambda)$, справедливо равенство

$$P_{+,n}(\lambda)f = \alpha(f)\psi_n(\lambda),$$

где

$$f \to \alpha(f)$$

-линейный функционал. В гильбертовом пространстве существует (см. замечание и лемму 2.1.5 на стр. 21) такой вектор $\phi_n(\lambda) \in \mathcal{H}_b^{+}$, что

$$\forall(f \in \mathcal{H}_b^{-})\,:\,P_{+,n}(\lambda)f =< \phi_n(\lambda)\,,\,f > \psi_n(\lambda). \tag{3.175}$$

Из уравнения (4.170) следует, что функция $\phi_n(\lambda)$ есть решение уравнения:

$$V_nR_{-}(\lambda^*\,,\,A_0)\phi_n(\lambda) = \mu_n^*(\lambda)\phi_n(\lambda). \tag{3.176}$$

Выразим $\phi_n(\lambda)$ через $\psi_n(\lambda)$. В дальнейшем индекс n писать не будем. Пусть

$$\eta(\lambda) = R_-(\lambda^*\,,\,A_0)\phi(\lambda).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mu(\lambda)^*\eta(\lambda) = \Gamma_-(\lambda^*)\eta(\lambda), \\ &\mu(\lambda)l(\eta(\lambda)) = \Gamma_+(\lambda)l(\eta(\lambda)) \end{aligned} \tag{3.177}$$

Мы учли, что

$$\Gamma_+(\lambda)^* = \Gamma_-(\lambda^*)\,,\,\forall(\lambda = \alpha + i\epsilon\,,\,\epsilon > 0).$$

Но пространство решений уравнения (4.177) одномерно, поэтому

$$l(\eta(\lambda)) = \alpha\psi(\lambda)\,,\,\eta(\lambda) = \alpha^* l(\psi(\lambda)).$$

Теперь заметим что

$$\begin{aligned} &V\phi(\lambda) = (\lambda^*\mathsf{id} - A_0)\eta(\lambda), \\ &V\eta(\lambda) = \mu(\lambda)(\lambda^* - A_0)\eta(\lambda) = \alpha^* V l(\psi(\lambda)) = \mu(\lambda)\phi(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда $\phi(\lambda)$ определяется с точностью до константы. Константа определяется из условия нормировки:

$$P_+^2(\lambda) = P_+(\lambda).$$

Лемма доказана.

Напомним, что функция $\mu_n(\lambda)\,,\,n \leq \infty$ определена равенством (4.170).

Лемма 3.6.3. *Справедливо равенство*

$$\left.\frac{d\mu_\infty(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_\infty} = -\frac{1}{<\psi_\infty\,,\,V_\infty\psi_\infty>} \tag{3.178}$$

Доказательство. Пусть $Im\,\lambda > 0$. Исходим из уравнения (4.170):

$\mu_\infty(\lambda)\psi_\infty(\lambda) = \Gamma_{+,\infty}\psi_\infty(\lambda)$
Умножаем на $(\lambda \mathsf{id} - A_0) : \mu_\infty(\lambda)(\lambda \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty(\lambda) = V_\infty\psi_\infty(\lambda)$.
Умножаем на $\psi_\infty(\lambda_\infty) : \mu_\infty(\lambda) < \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,(\lambda \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty(\lambda) >=$
$< \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,V_\infty\psi_\infty(\lambda) >$. Дифференцируем:
$\dfrac{d\mu_\infty(\lambda)}{d\lambda} < \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,(\lambda \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty(\lambda) > +$
$\mu_\infty(\lambda) < \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,\psi_\infty(\lambda) > +\mu_\infty(\lambda) < \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,(\lambda \mathsf{id} - A_0)\dfrac{d\psi_\infty(\lambda)}{d\lambda} >=$
$< \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,V_\infty\dfrac{d\psi_\infty(\lambda)}{d\lambda} >$. Учтем, что
$\mu_\infty(\lambda_\infty)(\lambda_\infty) = 1\,,\,< \psi_\infty(\lambda_\infty)\,,\,(\lambda_\infty \mathsf{id} - A_0)\psi_\infty(\lambda_\infty) >=< \psi_\infty\,,\,V_\infty\psi_\infty >$.

Полагая в этом равенстве

$$\lambda = \lambda_\infty + i\epsilon\,,\,\epsilon \to 0,$$

получим нужную формулу. Лемма доказана.

Из леммы 10 следует, что функция

$$\lambda \mapsto (1 - \mu_\infty(\lambda))$$

в точке $\lambda = \lambda_\infty$ имеет ноль точно первого порядка. Так как

$$\mu_n(\lambda) \rightrightarrows \mu_\infty(\lambda)\,,\,|\lambda - \lambda_\infty| < \delta\,,\,n \to \infty$$

при достаточно большом n функция

$$\lambda \mapsto (1 - \mu_n(\lambda))$$

в некоторой точке $\lambda = \lambda_n$, будет иметь ноль точно первого порядка:

$$\mu_n(\lambda_n) = 1, \tag{3.179}$$

причем

$$\lambda_n \to \lambda_\infty\,,\,n \to \infty$$

Если корень уравнения (4.179) удовлетворяет условию $Im\,\lambda_n > 0$, то λ_n - комплексное собственное значение самосопряженного оператора A_n, чего быть не может, равенство $Im\,\lambda_n = 0\,,\,\lambda_\infty - \delta < \lambda_n < \lambda_\infty + \delta$ невозможно по предположению, следовательно $Im\,\lambda_n < 0$ и в точке λ_n функция $\Gamma_{+,n}\psi_n(\lambda)$ вычисляется как аналитическое продолжение из верхней полуплоскости.

Точка λ_n есть полюс аналитического продолжения функции

$$\lambda \mapsto R_+(\lambda\,,\,A) \in \mathcal{H}_b^+$$

(см. доказываемую ниже формулу (4.187)) в нижнюю полуплоскость.

Лемма 3.6.4. *Точка $\lambda = \lambda_\infty$ есть полюс первого порядка для функции*

$$\lambda \mapsto (\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda))^{-1} \tag{3.180}$$

Доказательство.Оператор $\Gamma_+(\lambda)$ компактен в $\mathcal{H}_b^-$ и аналитичен по λ, поэтому оператор (4.180) конечно-мероморфен, но

$$\forall x \in \mathbf{Dom}(A))\,,\, \lambda \in \mathbb{R}_+) : \|(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda + i\epsilon))x\| =$$
$$\|(\lambda + i\epsilon - A_0)^{-1}(\lambda + i\epsilon - A)x\| \leq C/\epsilon,$$

следовательно, полюс функции (4.180) не может быть выше первого порядка. Напомним, что на стр. 207 мы доказали

Лемма 3.6.5. *Если выполнено равенство*

$$\mu(\lambda)\psi(\lambda) = \Gamma_+(\lambda)(\psi(\lambda))\,,\, \psi(\lambda) \in \mathcal{H}_b^-\,,\, Im\,\lambda \geq 0\,,\, |\lambda - \lambda_\infty| < \delta, \tag{3.181}$$

то

$$\forall (Im\,\lambda = 0\,,\, |\lambda - \lambda_\infty| < \delta) :< \psi^*(\lambda) \ \ | \, V\psi(\lambda) > Im\,\mu(\lambda) = -\pi \|U_d^0(V\psi(\lambda))(\lambda\,,\,\cdot)\|_\Omega^2 \tag{3.182}$$

В правой части уравнения (4.182) функция $U_d^0(V\psi(\lambda))(\lambda\,,\,\cdot)$ -это значение диагонализуещего преобразования U_d^0 функции $V\psi(\lambda) \in \mathcal{H}_b^+$ в точке $(\lambda\,,\,\cdot)$.

Теорема 3.6.1. *Если выполнены основные условия и условия, перечисленные в начале этого параграфа, то*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{Im\,\lambda_n}{\pi \|U_d^0(V_n\psi_n(Re\,\lambda_n))\|_\Omega^2} \right| = 1. \tag{3.183}$$

Доказательство. Имеем:

$$1 - \mu_n(Re\,\lambda_n) = \mu_n(\lambda_n) - \mu_n(Re\,\lambda_n) =$$
$$i\frac{d\mu_n(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda = Re\,\lambda_n} \cdot Im\,\lambda_n + O(|Im\,\lambda_n|^2);$$
$$Im\,\mu_n(Re\,\lambda_n) = -Im\left(i\frac{d\mu_n(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda = Re\,\lambda_n}\right) Im\,\lambda_n + O(|Im\,\lambda_n|^2).$$

Теперь учтем (4.182) и лемму 4.6.3. Теорема доказана.

Заметим, что функция $\psi_n(Re\,\lambda_n)$ есть решение уравнения (4.181).

Свойства непрерывности матрицы рассеяния и ее зависимость от потенциала. Докажем, что при наложенных нами условиях матрица рассеяния - непрерывная функция своих аргументов ω_1, ω_2 и в определенном смысле непрерывно зависит от потенциала.

Мы считаем, что сделанные на стр. 126 предположения выполнены.

Напомним, что оператор $T_n(\lambda)$ при $Im\,\lambda > 0$ определен равенством

$$T_n(\lambda) = V_n + V_n R(\lambda\,,\, A_n) V_n.$$

Лемма 3.6.6. *Оператор $T_n(\lambda)$ представим в виде*

$$T_n(\lambda) = Res_n(\lambda) + T_n(\lambda)_{reg}, \tag{3.184}$$

где оператор $T_n(\lambda)_{reg}$ в круге $|\lambda - \lambda_\infty| < \delta$ аналитичен по λ как функция со значениями в пространстве $B_{-,+}$ и равномерно по λ в метрике пространства $B_{-,+}$:

$$T_n(\lambda)_{reg} \to T_\infty(\lambda)_{reg} \in B_{-,+}\,,\; n \to \infty. \tag{3.185}$$

Оператор $Res_n(\lambda)$ вычисляется по формуле:

$$Res_n(\lambda) f = c_n(\lambda)\mu_n(\lambda)(1 - \mu_n(\lambda))^{-1} < l(\psi_n(\lambda))\,,\, V_n f > V_n \psi_n(\lambda). \tag{3.186}$$

Доказательство. Из резольвентного тождества следует

$$R_+(\lambda\,,\, A_n) = (\mathsf{id} - \Gamma_{+,n}(\lambda))^{-1} R_+(\lambda\,,\, A_0).$$

Так как точка $\mu_n(\lambda)$ -полюс первого порядка,то

$$(\mathsf{id} - \Gamma_{+,n}(\lambda))^{-1} = (1 - \mu_n(\lambda))^{-1} P_{+,n}(\lambda) + S_n(\lambda)_{reg}, \tag{3.187}$$

где $S_n(\lambda)_{reg}$ -регулярная часть ряда Лорана для резольвенты $(\mu\mathsf{id} - \Gamma_{+,n}(\lambda))^{-1}$. Разложение ведется по степеням $(\mu - \mu_n)$, сумма ряда вычисляется в точке $\mu = 1$.

Отсюда

$$T_n(\lambda) = Res_n(\lambda) + T_n(\lambda)_{reg},$$

где

$$\begin{aligned}&T_n(\lambda)_{reg} = V_n + V_n S_n(\lambda)_{reg} R_+(\lambda\,,\, A_0) V_n,\\ &Res_n(\lambda) = (1 - \mu_{+,n}(\lambda))^{-1} V_n P_{+,n}(\lambda) R_+(\lambda\,,\, A_0) V_n =\\ &(1 - \mu_n(\lambda))^{-1} V_n P_{+,n}(\lambda)\Gamma_{+,n}(\lambda).\end{aligned} \tag{3.188}$$

Преобразуем числитель в (4.188) Имеем:

$$V_nP_{+,n}(\lambda)\Gamma_{+,n}(\lambda)f = c_n(\lambda) < V_nl(\psi_n(\lambda))\,,\, R_+(\lambda\,,\, A_0)V_nf > V_n\psi(\lambda) =$$
$$c_n(\lambda) < R_-(\lambda^*\,,\, A_0)V_nl(\psi_n(\lambda))\,,\, V_nf > V_n\psi(\lambda) =$$
$$c_n(\lambda) < l(\Gamma_+(\lambda)\psi_n(\lambda))\,,\, V_nf > V_n\psi(\lambda) =$$
$$c_n(\lambda)\mu_n(\lambda) < l(\psi_n(\lambda))\,,\, V_nf > V_n\psi(\lambda).$$

Лемма доказана.

Напомним, что

$$t_n(\lambda + i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2) = U_d^0(T_n(\lambda + i0)(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2))(\lambda\,,\, \omega_1)$$

Подставим (4.186) в (4.167)-(4.168). Получим:

$$t_n(\lambda + i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2) =$$
$$U_d^0(T_n(\lambda + i0)(U_d^0)_d^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2))(\lambda\,,\, \omega_1) =$$
$$U_d^0(Res_n(\lambda)(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2))(\lambda\,,\, \omega_1) + U_d^0(T_n(\lambda + i0)_{reg}(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2))(\lambda\,,\, \omega_1) =$$
$$c_n(\lambda)\mu_{+,n}(\lambda)(1 - \mu_{+,n}(\lambda))^{-1} < l(\psi_n(\lambda)), V_n(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2) > U_d^0(V_n\psi_n(\lambda))(\lambda\,,\, \omega_1)+$$
$$t_n(\lambda + i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2)_{reg},$$

где

$$t_n(\lambda + i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2)_{reg} = U_d^0(T_n(\lambda)_{reg}(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2))(\lambda\,,\, \omega_1).$$

Пусть

$$t_n(\lambda\,,\, \omega1\,,\, \omega_2\,,\, n)_{reson} \stackrel{def}{=}$$
$$c_n(\lambda)\mu_{+,n}(\lambda)(1 - \mu_{+,n}(\lambda))^{-1} < l(\psi_n(\lambda)), V_n(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, \omega_2) > U_d^0(V_n\psi_n(\lambda))(\lambda\,,\, \omega_1) \tag{3.189}$$

Для матрицы рассеяния мы получаем представление в виде:

$$t_n(\lambda+i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2) = t_n(\lambda+i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2\,,\, n)_{reson}+t_n(\lambda+i0\,,\, \omega_1\,,\, \omega_2)_{reg} \tag{3.190}$$

$t_n(\cdots)_{reson}$ -слагаемое в матрице рассеяния, происходящее от полюса резольвенты и имеющее полюс в точке $\lambda = \lambda_n$

$t_n(\cdots)_{reg}$ -слагаемое в матрице рассеяния, происходящее от регулярной части резольвенты и аналитичное по λ в круге $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_\infty| < \delta\}$.

Теорема 3.6.2. *1.При любом фиксированном $\lambda \neq \lambda_\infty$ функция*

$$t_n(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\, \omega_2) = U_d^0((\lambda)T_n(\lambda + i0)U_d^0(\lambda)^{-1}(\omega_2)).$$

непрерывна по $\omega_1\,,\,\omega_2$.

2. Если

$$\|(V_n - V_\infty) \mid \mathcal{B}_{-,+}\| \to 0\,,\, n \to \infty\,,\, \lambda \neq \lambda_\infty,$$

то при фиксированном $\lambda \neq \lambda_\infty$ *равномерно по* $\omega_1\,,\,\omega_2$.

$$t_n(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2) \rightrightarrows t_\infty(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2)\,,\, n \to \infty.$$

3.Равномерно по $\lambda \in \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_\infty| < \delta\}$*:*

$$t_n(\lambda\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2)_{reg} \to t_\infty(\lambda\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2)_{reg}\,,\, n \to \infty.$$

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 3.6.7. *При фиксированном* $\lambda \neq \lambda_\infty$ *равномерно по* $\omega_1\,,\,\omega_2$.

$$t_n(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2) \rightrightarrows t_\infty(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2)\,,\, n \to \infty.$$

Доказательство. Положим

$$q_n(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2\,,\,) = T_n(\lambda)[\exp(i(\cdot\,,\,\omega_2)\sqrt{\lambda})].$$

Напомним уравнение

$$T_n(\lambda) = V_n + V_n R(\lambda\,,\,A_0)T_n(\lambda),$$

Отсюда

$$\|(T_n(\lambda) - T_\infty(\lambda)) \mid \mathcal{B}_{-,+}\| < const\|(V_n - V_\infty) \mid \mathcal{B}_{-,+}\|,$$

и

$$\begin{aligned}
&|t_n(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2) - t_\infty(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2)| \leq \\
&c(\lambda)\int |\exp(-i(x\,,\,\omega_1)\sqrt{\lambda})(q_n(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2) - q_\infty(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2))|dx \leq \\
&const.\|(q_n - q_\infty) \mid \mathcal{H}_b^+\| \leq const.\|(V_n - V_\infty) \mid \mathcal{B}_{-,+}\|.
\end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы доказано.

Третье утверждение доказывается аналогично, достаточно заметить, что функции $t_n(\lambda\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2)_{reg}$ аналитичны по λ в круге $\lambda \in \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_\infty| < \delta\}$ и из сходимости последовательности t_n на границе круга следует равномерная по λ сходимость в любом внутренном круге.

Сходимость

$$t_n(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2) \to t_\infty(\lambda + i0\,,\ \,,\omega_1\,,\,\omega_2)\,,\, n \to \infty.$$

равномерна по λ на любом компакте,не содержащем точку λ_∞ и *не равномерна* по λ в окрестности точки λ_∞.

Лемма 3.6.8. *Отображение*

$$\Omega \mapsto H_b^- : \omega \mapsto \exp(\pm i(\omega\,,\,x)\sqrt{\lambda})$$

при любом $b > 0$ *непрерывно как функция* ω *равномерно по* λ *на любом компакте .*

Доказательство.Имеем:

$$\|\exp(\pm i(\omega_1\,,\,x)\sqrt{\lambda}) - \exp(\pm i(\omega_2\,,\,x)\sqrt{\lambda}) \mid H_b^- \| =$$
$$\int \exp(-b|x|)|1 - \exp(\pm i(\omega_1 - \omega_2\,,\,x)\sqrt{\lambda})|dx \to 0\,,\, |\omega_1 - \omega_2| \to 0.$$

Следствие 3.6.1. *Если* $V \in \mathcal{B}_{-,+}$, *то отображение*

$$\Omega \mapsto H_b^- : \omega \mapsto R(\lambda\,,\,A_0)V[\exp(\pm i(\omega\,,\,\cdot)\sqrt{\lambda})]$$

непрерывно как функция ω *равномерно по* λ *на любом компакте.*

Отсюда очевидно следует

Лемма 3.6.9. *Отображение*

$$\Omega \mapsto \mathcal{H}_b^+ : \omega \to q_n(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega\,,\,)$$

непрерывно.

Теперь докажем непрерывность по $\omega_1\,,\,\omega_2$ матрицы рассеяния. Имеем:

$$t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) = c(\lambda)\int \exp(-i(\omega_1\,,\,x)\sqrt{\lambda})q_n(x\,,\,\lambda\,,\,\omega_2)dx,$$
$$|t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) - t_n(\lambda + i0\,,\,\widetilde{\omega_1}\,,\,\widetilde{\omega_2})| \le$$
$$|t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) - t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\widetilde{\omega_2})| +$$
$$|t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\widetilde{\omega_2}) - t_n(\lambda + i0\,,\,\widetilde{\omega_1}\,,\,\widetilde{\omega_2})|,$$
$$|t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) - t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\widetilde{\omega_2})| \le$$
$$const.\|\exp(i(\omega_1\,,\,\cdot\sqrt{\lambda}) \mid \mathcal{H}_b^-\| \times \|(q_n(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\omega_2) - q_n(\cdot\,,\,\lambda\,,\,\widetilde{\omega_2})) \mid \mathcal{H}_b^+\|,$$
$$|t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\widetilde{\omega_2}) - t_n(\lambda + i0\,,\,\widetilde{\omega_1}\,,\,\widetilde{\omega_2})| \le$$
$$const.\|\exp(i(\omega_1\,,\,x)\sqrt{\lambda}) - \exp(i(\widetilde{\omega_1}\,,\,x)\sqrt{\lambda}) \mid \mathcal{H}_b^-\|.$$

Положим

$$W_n(\lambda\,,\,\omega) \stackrel{def}{=} U_d^0(V_n\psi_n(\lambda))(\lambda\,,\,\omega), \tag{3.191}$$

где $\psi_n(\lambda)$ определено через (4.181)и при $\lambda = \lambda_n$ удовлетворяет уравнению

$$A\psi_n(\lambda_n) = \lambda_n\psi_n(\lambda_n)\,,\,\psi_n(\lambda_n) \in \mathcal{H}_b^-. \tag{3.192}$$

которое в рассматриваемых нами приложениях сводится к уравнению

$$-\Delta\psi_n(\lambda_n) + V_n\psi_n(\lambda_n) = \lambda_n\psi_n(\lambda_n)\,,\,\psi_n(\lambda_n) \in \mathcal{H}_b^-. \tag{3.193}$$

Условия резонанса. Предположим, что существует такое отображение

$$\exists p\colon \Omega \mapsto \Omega\,, \quad p \quad \text{непрерывно}, \forall(\omega \in \Omega\,,\, n > n_0\,,\, |\lambda - \lambda_\infty| < \delta):$$
$$| < l(\psi_n(\lambda))\,,\, V_n(U_d^0)^{-1}(\lambda\,,\, p(\omega)) > | = |U_d^0(V_n\psi_n(\lambda))(\lambda\,,\, \omega)|. \qquad (3.194)$$

Лемма 3.6.10. *Если выполнено условие* (4.194), *то*

$$\lim_{|\lambda-\lambda_\infty|\to+0} \lim_{n\to\infty} \sup_{\omega} |t_n(\lambda+i0\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_n(\lambda+i0\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg}| = 0. \quad (3.195)$$

Доказательство. Существование предела по n при фиксированном ω следует из теоремы 4.6.2. Из (4.189) и (4.194) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\omega} |t_n(\lambda + i0\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_n(\lambda + i0\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg}| =$$
$$|c_\infty(\lambda)\mu_\infty(\lambda)(1 - \mu_\infty(\lambda))^{-1}| \sup_{\omega} |W_\infty(\lambda\,,\,\omega)|^2. \qquad (3.196)$$

Функция

$$(\lambda\,,\,\omega) \mapsto W_\infty(\lambda\,,\,\omega) = U_d^0(V_\infty\psi)(\lambda\,,\,\omega)$$

аналитична по λ при фиксированном ω и непрерывна по ω при фиксированном λ. В силу леммы 4.181 (см.стр. 134) имеем:

$$\int |W_\infty(\lambda_\infty\,,\,\omega)|^2 d\omega = 0,$$

поэтому

$$W_\infty(\lambda_\infty\,,\,\omega) \equiv 0.$$

Следовательно, функция

$$\lambda \mapsto \sup_{\omega} |W_\infty(\lambda\,,\,\omega)|^2$$

имеет в точке $\lambda = \lambda_\infty$ нуль не ниже второго порядка. Функция $\lambda \mapsto (1-\mu_\infty(\lambda))$ имеет в точке $\lambda = \lambda_\infty$ нуль первого порядка. Лемма доказана.

Положим по определению

$$t(\lambda_\infty\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2)_{lim} = \lim_{|\lambda-\lambda_\infty|\to+0} \lim_{n\to\infty} t_n(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2), \qquad (3.197)$$

$$\beta = \frac{| < V_\infty\psi_\infty\,,\,\psi_\infty > |}{| < V_\infty l(\psi_\infty)\,,\,\psi_\infty > |}. \qquad (3.198)$$

Существование предела по n при каждом фиксированном $\lambda \neq \lambda_\infty$ следует из теоремы 4.6.2.

Учтем, что

$$dim\mathbf{Ker}(\lambda_\infty \mathsf{id} - A) = 1\,;\; \psi_\infty\,,\, l(\psi_\infty) \in \mathbf{Ker}(\lambda_\infty \mathsf{id} - A)$$

Очевидно, $t(\cdots)_{lim}$ есть матрица рассеяния в случае,если возмущения нет и полюс -"утопленное" собственное значение.

Теорема 3.6.3. *Если последовательность действительных чисел* ν_n *удовлетворяет условию*

$$|\nu_n - Re\,\lambda_n| = O(|Im\lambda_n|^{1+\epsilon}), \tag{3.199}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int |t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_{lim}(\lambda_\infty\,,\,\omega\,,\,p(\omega))|d\omega = \beta/\pi; \tag{3.200}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int |t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_\infty(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))|d\omega = \beta/\pi. \tag{3.201}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
&t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_{lim}(\lambda_\infty\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) = \\
&t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg} + && (3.202)\\
&t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg} - t_\infty(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg} + && (3.203)\\
&t_\infty(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg} - t_{lim}(\lambda_\infty\,,\,\omega\,,\,p(\omega)). && (3.204)
\end{aligned}$$

Согласно равенству (4.190) и определению (4.194) отображения $p(\omega)$ имеем:

$$\int |t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg}|d\omega = \tag{3.205}$$

$$c_n(\nu_n)|(1-\mu_n(\nu_n))|^{-1}\int |W_n(\nu_n\,,\,\omega)|^2 d\omega. \tag{3.206}$$

Согласно (G.4)

$$\int |W_n(\nu_n\,,\,\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}|Im\,\mu_n < \psi(\nu_n)\,,\,V_n\psi(\nu_n) > |,$$

далее:

$$\begin{aligned}
&1-\mu_n(\nu_n) = \mu_(\lambda_n) - \mu_(\nu_n) = \\
&\left.\frac{d\mu_n(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\nu_n}(\lambda_n-\nu_n) + O(|\lambda_n-\nu_n|^2) = \\
&\left.i\frac{d\mu_n(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\nu_n} Im\,\lambda_n + O(|Im\,\lambda_n|^{1+\epsilon}); \\
&Im\,\mu_n = -Im\left(\left.i\frac{d\mu_n(\lambda)}{d\lambda)}\right|_{\lambda=\nu_n}\right) Im\,\lambda_n + O(|Im\,\lambda_n|^{1+\epsilon}),
\end{aligned}$$

поэтому

$$\int |t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg}|d\omega \to$$
$$\frac{1}{\pi}\frac{|<\psi_\infty\,,\,V_\infty\psi_\infty>|}{|<l(\psi_\infty)\,,\,V_\infty\psi_\infty>|} = \frac{\beta}{\pi}\,,\; n\to\infty.$$

В силу теоремы 4.6.2

$$t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg} - t_\infty(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg} \rightrightarrows 0\,,\; n\to\infty.$$

В силу леммы 4.6.10 (уравнение (4.195)) и определения функции t_{lim}

$$\lim_{n\to\infty}\sup_\omega |t_{lim}(\lambda_\infty + i0\,,\,\omega\,,\,p(\omega)) - t_\infty(\lambda + i0\,,\,\omega\,,\,p(\omega))_{reg}| = 0.$$

Равенство (4.200) доказано. Равенство (4.201) следует из (4.200) и определения t_{lim}.

Комментарии и литературные указания. Теории резонансов посвящено очень много работ (некоторые приведены в списке литературы). Следует учесть, что мы упомянули лишь об одном направлении в теории резонансов.

Метод Лившица Требование аналитичности резольвенты в окрестности действительной оси часто бывает слишком обременительным. М.С.Лившицем был предложен метод, который частично преодолевает эту трудность. Метод Лившица основан на простых физических идеях и переоткрывался много раз. В ядерной физике этот метод разрабатывался Д.Фешбахом.

Мы ограничимся тем, что приведем принадлежащую Д.Хоуланду (см. [29])редакцию классического вывода основного уравнения этого метода.

Пусть H -самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $R(z\,,\,H) = (z\mathsf{id} - H)^{-1}$ -его резольвента.

Пусть линейное пространство $\mathcal{K} \subset \mathbf{Dom}\,(H)$, $dim(\mathcal{K}) < \infty$, $P^{\|}$ -ортогональный проектор на $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\perp}$ -ортогональное дополнение $\mathcal{K}$, $P^{\perp} = E - P^{\|}$.

Матрицей Лившица оператора H на подпространстве $\mathcal{K}$ называется оператор

$$B(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}), \tag{3.207}$$

$$B(z) \quad definition:\ (z\mathsf{id} - B(z))^{-1} := PR(z\,,\,H)P. \tag{3.208}$$

Получим уравнение для $B(z)$.

По теореме Лакса

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$$

Отсюда следует,что для любого самосопряженного оператора

$$(Tx)_{\|} = T_{\|,\|}x_{\|} + T_{\|,\perp}x_{\perp};$$
$$(Tx)_{\perp} = T_{\perp,\|}x_{\|} + T_{\perp,\perp}x_{\perp},$$

где

$$x_{\|} \in \mathcal{K}\,,\ x_{\perp} \in \mathcal{K}^{\perp},$$

где

$$T_{\|,\|} - \text{самосопряжен в} \quad \mathcal{K};$$
$$T_{\perp,\perp} - \text{самосопряжен в} \quad \mathcal{K}^{\perp},$$
$$T_{\|,\perp} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}^{\perp} \mapsto \mathcal{K})\,,\ T_{\perp,\|} = (T_{\|,\perp})^{*} \in \mathcal{L}(\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}^{\perp}).$$

Положим

$$
\begin{aligned}
&H_0 = \begin{pmatrix} H_{\|,\|} & 0 \\ 0 & H_{\perp,\perp} \end{pmatrix}, \\
&V = \begin{pmatrix} 0 & V_{\|,\perp} \\ V_{\perp,\|} & 0 \end{pmatrix}, \\
&V_{\|,\perp} = V^*_{\perp,\|}, \\
&H = H_0 + V.
\end{aligned}
$$

Полезно заметить, что

$$V = P^{\perp} V_{\perp,\|} P^{\|} + P^{\|} V_{\|,\perp} P^{\perp,\|}.$$

При $Im\,\lambda \neq 0$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&R(\lambda\,,\,H) = R(\lambda\,,\,H_0) + R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H); \\
&R(\lambda\,,\,H) = R(\lambda\,,\,H_0) + R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H_0) + R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H); \\
&P^{\|} R(\lambda\,,\,H) P^{\|} = \\
&P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) P^{\|} + P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H_0) P^{\|} + P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H) P^{\|}.
\end{aligned}
$$

Учтем, что

$$
\begin{aligned}
&P^{\|} V P^{\|} = 0, \\
&P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) = R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) P^{\|}\,,\ P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) P^{\|} = R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) P^{\|}, \\
&P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) V = R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) P^{\|} V = R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) V_{\|,\perp} P^{\perp}, \\
&P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H_0) V R(\lambda\,,\,H) P^{\|} = \\
&R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) V_{\|,\perp} P^{\perp} R(\lambda\,,\,H_0) V P^{\|} R(\lambda\,,\,H) P^{\|} = \\
&R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) V_{\|,\perp} R(\lambda\,,\,H_{\perp,\perp}) V_{\perp,\|} P^{\|} R(\lambda\,,\,H) P^{\|}
\end{aligned}
$$

Мы получили уравнение для оператора $P^{\|} R(\lambda\,,\,H) P^{\|}$:

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{id} - R(\lambda\,,\,H_{\|,\|}) V_{\|,\perp} R(\lambda\,,\,H_{\perp,\perp}) V_{\perp,\|}) P^{\|} R(\lambda\,,\,H) P^{\|} = \\
&P^{\|} R(\lambda\,,\,H_0) P^{\|}.
\end{aligned}
$$

Часть III

Модели.

Глава 4

Резонатор Гельмгольца

Описание резонатора Гельмгольца. Пусть отображение

$$\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

дважды непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и имеет положительный якобиан.

Рассмотрим шаровой слой $\{x \mid 1 \le |x| \le 2\}$. Вырежем из этого шарового слоя часть, которая находится внутри прямого кругового конуса с вершиной в точке 0 и углом $0 < \theta \ll \pi$ между образующей и высотой конуса. Для определенности направим высоту конуса по оси z. Пусть D_θ -образ оставшейся области (т.е. образ области $\{x \mid 1 \le |x| \le 2\,, \arccos((x\,, n_z)/|x|) \le \theta \le \pi\}$) при отображении ψ. Область D_θ мы будем называть резонатором Гельмгольца. Дополнение области D_θ мы обозначим символом

$$D_\theta^{out} = \mathbb{R}^3 \setminus D_\theta.$$

Образ внешности шарового слоя, внутренности шарового слоя и образ канала связи (части шарового слоя внутри конуса) мы обозначим символами

$$\begin{aligned}
&D_\infty^{out} = \psi(\{|x| > 2\})\,,\ D_\infty^{in} = \psi(\{|x| < 1\})\,,\ D_\infty = D_\infty^{out} \bigcup D_\infty^{in},\\
&D^{ch} = D_\theta^{out} \setminus (D_\infty^{out} \cup D_\infty^{in})\\
&\psi(\{|x| = 2\}) \equiv \partial D_\infty^{out} = S_{out}\,,\ \psi(\{|x| = 1\}) \equiv \partial D_\infty^{in} = S_{in},\\
&\partial D_\theta^{out} = S\,,\ S_{ch}^{+} = \partial D_\infty^{out} \setminus \partial D_\theta\,,\ S_{ch}^{-} = \partial D_\infty^{in} \setminus \partial D_\theta.
\end{aligned}$$

Задача дифракции.

Определение 4.0.1. Функция $e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ называется решением задачи дифракции в области D_θ^{out}, если она удовлетворяет уравнению

$$-\,\Delta_x e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \lambda e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,,\; x \in D_\theta^{out} \tag{4.1}$$

граничным условиям

$$e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\Big|_{x\in S} = 0, \tag{4.2}$$

и есть сумма двух функций:

$$e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + \phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega), \tag{4.3}$$

где функция $\phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда:

$$(\partial_{|x|} - i\sqrt{\lambda})\phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = o(1/|x|)\,,\; x \to \infty.$$

Мы изучим поведение решения задачи дифракции в области D_θ^{out} при $\theta \to 0$ в том случае, если $\sqrt{\lambda}$ близко к собственной частоте области D_∞^{in}, т.е. в резонансе.

Эквивалентность задачи дифракции интегральному уравнению. Существует много интегральных уравнений, эквивалентных задаче дифракции. Мы укажем уравнение, удобное для наших целей.

Пусть $G_\theta(x\,,\,y\,,\,t)$ -функция Грина уравнения теплопроводности в области D_θ^{out}:

$$\begin{aligned}
&G_\theta(x\,,\,y\,,\,t):\\
&\qquad\qquad \frac{\partial G_\theta}{\partial t} = \Delta_x G_\theta\,,\; t>0\,,\; x\in D_\theta^{out}\,,\; y \in D_\theta^{out}. \qquad (4.4)\\
&\qquad\qquad G_\theta(x\,,\,y\,,\,+0) = \delta(x-y)\,,\; x\in D_\theta^{out}\,,\; y\in D_\theta^{out}.\\
&\qquad\qquad G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) = 0\,,\; x\in S,\; y\in D_\theta^{out}\,,\; t>0.
\end{aligned}$$

Положим

$$G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) = 0, \tag{4.5}$$

$$\text{если либо } x \notin D_\theta^{out}\,,\text{ либо } y \notin D_\theta^{out}. \tag{4.6}$$

Заметим, что интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$ с так определенным ядром $G_\theta(x\,,\,y\,,\,t)$ не есть экспонента от инфинитезимального оператора полугруппы $G_\theta(t)$ в пространстве $L^2(D_\theta^{out}\,,\,dx)$,так как в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$ функция $t \mapsto G_\theta(t)$ не есть полугруппа класса C_0 : $G_\theta(+0) = P(L^2(D_\theta^{out})) \neq \mathsf{id}$.

Лемма 4.0.11. *Если при каком-нибудь $\tau > 0$ функция $u(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению*

$$\exp(-\lambda\tau)u = G_\theta(\tau)u\,,\ x \in D_\theta^{out}\,;\ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}_+, \tag{4.7}$$

то функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$-\Delta u = \lambda u\,,\ x \in D_\theta^{out}\,;\ u(x) = 0\,,\ x \in S. \tag{4.8}$$

Ясно, что это утверждение следует из

Лемма 4.0.12. *Если при каком нибудь $\tau > 0$ функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$\exists(\tau > 0) : \exp(-\lambda\tau)u = G_\theta(\tau)u, \tag{4.9}$$

то

$$\forall(t > 0) : \exp(-\lambda t)u = G_\theta(t)u. \tag{4.10}$$

Доказательство. Из (5.9) следует:

$$u = \exp(\lambda\tau)G_\theta(\tau)u,$$

поэтому функция

$$\phi(t) = \exp(\lambda t)G_\theta(t)u$$

на положительной действительной оси периодична с периодом τ:

$$\forall(t > 0\,,\ m \in \mathbb{Z}_+) : \phi(t + m\tau) = \phi(t).$$

На отрезке $[(m-1)\tau\,,\ m\tau]\,,\ m\tau \gg t$ разложим функцию $\phi(t)$ в ряд Фурье:

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\tau)^{-1/2} \exp((2\pi in/\tau)t)I_n\,,\ I_n = (\tau)^{-1/2} \int\limits_0^\tau \exp(-(2\pi in/\tau)t')\phi(t')dt'.$$

(Сходимость в $L^2((m-1)\tau\,,\ m\tau)$). Имеем:

$$\forall(t > 0) : I_n = (\tau)^{-1/2} \int\limits_0^\tau \exp(-(2\pi in/\tau)t')\exp(\lambda t')G_\theta(t + t')dt' = \tag{4.11}$$

$$\exp(-(\lambda - 2\pi in/\tau)t)I_n. \tag{4.12}$$

(Интеграл от периодической функции по периоду не зависит от начальной точки интегрирования, и мы делаем замену переменной интегрирования $t' \to t' - t$.)

Пусть $n > 0$. Положим

$$E_n(r) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\sqrt{\lambda - 2\pi i n/\tau}}{2\pi r}\Big)^{1/2} H^{(2)}_{1/2}(r\sqrt{\lambda - 2\pi i n/\tau}).$$

В области $R < |x| < R_1$, $R < |y| < R_1$, применим формулу Грина к $I_n(x)$ и $E_n(|x-y|)$ и перейдем к пределу $R_1 \to \infty$. Учтем ограниченность $I_n(x)$. Получим:

$$I_n(y) = \int\limits_{|x|=R} [I_n(x)\nabla_x E_n(|x-y|) - E_n(|x-y|)\nabla_x I_n(x)] \cdot n_x dS_x.$$

Отсюда при $n > 0$ вытекает оценка:

$$I_n(y) = O(\exp(-\epsilon|y|)).$$

Аналогично рассуждаем при $n < 0$. Следовательно, $I_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Следовательно, функция $I_n(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\Delta I_n(x) = (\lambda - 2\pi i n/\tau) I_n(x)\,, \text{ и } I_n(x) = 0\,, \text{ если } n \neq 0,$$

следовательно

$$\phi(t) = const,$$

(не зависит от времени),а отсюда утверждение леммы (и теоремы)следует тривиально.

Положим

$$G_0(x\,,\,y\,,\,t) = (4\pi t)^{(-n/2)} \exp(-(x-y)^2/4t)\,,\; n = 1\,,\,3\ldots, \tag{4.13}$$
$$g(x\,,\,y\,,\,t) = G_0(x\,,\,y\,,\,t) - G_\theta(x\,,\,y\,,\,t). \tag{4.14}$$

Лемма 4.0.13. *Существуют такие зависящие только от $S^{out}_\infty = \partial D^{out}_\infty$ константы $C < \infty$, $\delta > 0$, что справедливы оценки:*

$$\forall(x \in \mathbb{R}^3\,,\, y \in \mathbb{R}^3) : \quad 0 \leq g(x\,,\,y\,,\,t) \leq G_0(x\,,\,y\,,\,t), \tag{4.15}$$
$$\forall(x \in \mathbb{R}^3\,,\, y \in \mathbb{R}^3) : \quad 0 < g(x\,,\,y\,,\,t) < C\exp(-\delta(x^2+y^2)), \tag{4.16}$$
$$\forall(|x| > 2dist(x\,,\,D_\theta)\,,\, y \in \mathbb{R}^3) : \quad |\nabla_x g(x\,,\,y\,,\,t)| < C\exp(-\delta(x^2+y^2)) \tag{4.17}$$

Лемму 5.0.13 мы докажем позже, а сейчас воспользуемся оценками (5.16)-(5.17).

Теорема 4.0.4. *1. Для того, чтобы функция $e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ была бы решением задачи дифракции, необходимо и достаточно, что бы при каком-либо $t>0$ функция $\phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ в* (5.3) *была бы решением уравнения:*

$$\phi = -\exp(\lambda t)(\mathsf{id} + K_+(\lambda))g(\exp(-i(\cdot\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + \phi). \qquad (4.18)$$

2. Если функция $\phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ удовлетворяет уравнению (5.18) *при какой-нибудь $t>0$, то она удовлетворяет уравнению* (5.18) *при всех $t>0$.*

Доказательство. Пусть функция $e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ есть решение задачи дифракции. Тогда

$$\begin{aligned}
&\forall(t>0): \exp(-\lambda t)e_{d,\theta} = G_\theta(t)e_{d,\theta},\\
&[(\exp(-(\lambda+i\epsilon)t) - G_0(t)) + (\exp(-\lambda t) - \exp(-(\lambda+i\epsilon)t))]\phi =\\
&-g(t)(\exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + \phi),\\
&\phi = -(\exp(-(\lambda+i0)t) - G_0(t))^{-1}g(t)(\exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + \phi) \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Мы учли, что функция $\phi(x\,,\,\lambda,\,\omega)$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда и перешли к пределу $\epsilon\to 0$.

Теперь предположим что функция $\phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ при некотором фиксированном $\tau>0$ удовлетворяет уравнению (5.19). Из уравнения следует, что функция $\phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ удовлетворят условиям излучения Зоммерфельда, а функция

$$e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + \phi(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$$

удовлетворяет уравнению (5.9). Теорема доказана.

Интегральное уравнение (5.19) удобно тем,что оно позволяет просто исследовать поведение решения задачи дифракции при $\theta\to 0$.

Исследование основного интегрального уравнения. К уравнению (5.19) применима общая теория уравнения Липмана-Швингера. Из оценок леммы 5.0.13 следует

Лемма 4.0.14. *Оператор*

$$\phi \mapsto -\exp(\lambda t)(\mathsf{id} + K(\lambda+i0)g\phi$$

компактен в пространстве $\mathcal{H}_b^-$ и аналитичен по λ как функция со значениями в пространстве $\mathcal{H}_b^-$ в окрестности действительной оси при любом $b>0$.

Докажем, что соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Мы следуем классической схеме рассуждений [11].

Теорема 4.0.5. *Если функция u удовлетворят уравнению Гельмгольца*

$$Lu = \lambda u\,,\ x \in D^{out}\,,\ \ u = 0\,,\ x \in \partial D^{out}, \tag{4.20}$$

и условиям излучения:

$$u = O(1)\,,\ (\partial_r u - i\sqrt{\lambda} u) = o(1/r)\,,\ r \to \infty, \tag{4.21}$$

то $u = 0$.

Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма 4.0.15. *Если функция u удовлетворяет условиям излучения, то*

$$\forall (x) : \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|y|=R} \Big(u \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} - \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} \frac{\partial}{\partial n_y} u \Big) dS_y = 0,$$

Доказательство. В силу условий излучения

$$\int\limits_{|y|=R} \Big(u \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} - \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} \frac{\partial}{\partial n_y} u \Big) dS_y =$$

$$\int\limits_{|y|=R} \Big(u \Big[\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} - i\sqrt{\lambda} \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} \Big] -$$

$$\frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} \Big[\frac{\partial}{\partial n_y} u - i\sqrt{\lambda} u \Big] \Big) dS_y = R^2 o(1/R^2) = o(1) \to 0\,,\ R \to \infty.$$

Из леммы 5.0.15 и формулы Грина следует

Лемма 4.0.16. *Если функция u удовлетворяет условиям излучения , уравнению Гельмгольца и нулевым граничным условиям,то*

$$\forall (x) : u(x) = \int\limits_S \frac{\exp(i|x-y|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x-y|} \frac{\partial}{\partial n_y} u(y) dS_y. \tag{4.22}$$

При $|x| \gg 1$ *отсюда следует представление*

$$u(r\,,\,\theta\,,\,\phi) = \frac{\exp(ir\sqrt{\lambda})}{r} \sum_n \frac{a_n(\theta\,,\,\phi}{r^n}\,,\ r \gg 1. \tag{4.23}$$

Функция u должна удовлетворять уравнению Гельмгольца, отсюда мы получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов a_n и равенство $a_n = 0$. Из (5.23) следует, что функция u имеет аналитическое продолжение по аргументу $x \in \mathbb{C}^3$, поэтому из равенства $u = 0$ при $r \gg 1$ следует $u \equiv 0$.

Оценки решения интегрального уравнения для плотности потенциала Пусть

$$\forall (x \in D_\infty^{out} \cup \partial D_\infty^{out}\,,\, \xi \in S) : Z(x\,,\, \xi\,,\, t) = \nabla_\xi G_0(x - \xi\,,\, t) \cdot n_\xi, \tag{4.24}$$

$$Z(t-\tau)\rho(x\,,\,\tau) = \int\limits_S Z(x\,,\,\xi\,,\,t-\tau)\rho(\xi\,,\,\tau)dS_\xi. \tag{4.25}$$

n_ξ -внутренняя по отношению D_∞^{out} нормаль в точке $\xi \in S$. Чтобы проследить влияние гладкости поверхности на оценки, ниже мы будем считать,что S -это произвольная поверхность Ляпунова (т.е. поверхность класса $C^{(1+\beta)}\,,\, \beta > 0$). В рассматриваемом нами случае $S = \partial D^{out}\,,\, \beta = 1$.

Для поверхности Ляпунова существует такая константа C, что

$$\forall (x \in S\,,\, \xi \in S) : |\cos(n_\xi\,,\, \vec{\xi x})| < C|x - \xi|^\beta$$

Теорема 4.0.6. *При* $0 < \beta \leq 1$ *справедливы оценки:*

$$\|Z(t-\tau) \mid L^\infty(S) \mapsto L^\infty(S)\| \leq C(t-\tau)^{-(1-\beta/2)}. \tag{4.26}$$

$$\|Z(t-\tau) \mid L^1(S) \mapsto L^1(S)\| \leq C(t-\tau)^{-(1-\beta/2)} \tag{4.27}$$

$$\forall (p > 1) : \|Z(t-\tau) \mid L^p(S) \mapsto L^p(S)\| \leq C(t-\tau)^{-(1-\beta/2)}. \tag{4.28}$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall (x \in S\,,\, \xi \in S) : |\cos(n_\xi\,,\, \vec{\xi x})| < C|x - \xi|^\beta$$

и поэтому

$$|\nabla_\xi G_0(x - \xi\,,\, t) \cdot n_\xi| < C_0 t^{-3/2-1}|x - \xi|^{1+\beta} \exp(-|x - \xi|^2/4t). \tag{4.29}$$

Далее имеем:

$$\|Z(t-\tau) \mid L^\infty(S) \mapsto L^\infty(S)\| \leq \tag{4.30}$$

$$\sup_x \int \big|\nabla_\xi G_0(x - \xi\,,\, t-\tau) \cdot n_\xi\big| dS_\xi \leq C(t-\tau)^{-(1-\beta/2)} \tag{4.31}$$

(Сначала интегрируем по малому шару с центром в x,внутри этого шара поверхность в местной системе координат задается уравнением

$$z = z(\xi_1\,,\,\xi_2)\,,\; dS_\xi = \sqrt{1 + z^2_{\xi_1} + z^2_{\xi_2}}d\xi_1 d\xi_2$$

интеграл по внешности шара оцениваем как $\exp(-\delta/t)$.)

Аналогично,

$$\|Z(t-\tau)\mid L^1(S)\mapsto L^1(S)\| \le \tag{4.32}$$

$$\sup_\xi \int \big|\nabla_\xi G_0(x-\xi\,,\,t-\tau)\cdot n_\xi\big| dS_x \le C(t-\tau)^{-(1-\beta/2)} \tag{4.33}$$

Далее интерполируем. Теорема доказана.

Пусть $B_p(t)\,,\,1\le p<\infty$- банахово пространство непрерывных по t в метрике $L^p(S)$ функций на S с нормой

$$\|f\mid B_p(t)\| = \sup_{0\le\tau\le t}\Big(\int\limits_S |f(\xi\,,\,\tau)|^p dS_\xi\Big)^{1/p}.$$

Положим

$$\|f\mid B_\infty(t)\| = \sup_{0\le\tau\le t}\sup_{\xi\in S}|f(\xi\,,\,\tau)|.$$

В пространстве $B_p(t)$ рассмотрим оператор

$$A : B_p(t)\mapsto B_p(t)\,,\,\forall(0<t'<t)\,,\,A\mu(t') = 2\int\limits_0^{t'} Z(t'-\tau)\mu(\tau)d\tau. \tag{4.34}$$

и уравнение

$$\rho(x\,,\,t') = \Phi(x\,,\,t') + 2\int\limits_0^{t'}[\int\limits_S \nabla_\xi G_0(x-\xi\,,\,t'-\tau)\cdot n_\xi \rho(\xi\,,\,\tau))dS_\xi]d\tau \tag{4.35}$$

Лемма 4.0.17. *Уравнение* (5.35) *при любом* $\Phi(t')\in B_p(t)$ *имеет решение, это решение единственно и удовлетворяет оценке*

$$\|\mu(t')\mid B_p(t)\| \le C\|\Phi(t')\mid B_p(t)\|.$$

Доказательство. Определим последовательность

$$\mu_0(t') = \Phi(t')\,,\; \mu_{m+1}(t') = 2\int\limits_0^{t'} Z(t'-\tau)\mu_m(\tau)d\tau$$

Справедлива легко доказываемая по индукции оценка:

$$\|\mu_m(\cdot) \mid B_p(t)\| \le \frac{C^m t^{m\beta/2}}{\Gamma(m\beta/2+1)} \|\mu_0(\cdot) \mid B_p(t)\| \tag{4.36}$$

Из этой оценки следует, что единственное решение уравнения (5.35) есть

$$\mu(t) = \sum_{0 \le n < \infty} A^n \Phi(t).$$

Лемма доказана.

Замечание 4.0.1. Формула для скачка потенциала двойного слоя и эквивалентность первой краевой задачи интегральному уравнению для плотности потенциала обычно доказываются для непрерывной плотности потенциала, это не мешает рассматривать уравнение для плотности потенциала в пространстве $B_p(t)$.

Теперь перейдем к доказательству леммы 2.1.2.

Оценка (5.15) следует из неотрицательности функции Грина.

Пусть R_0 -радиус шара, который содержит область D_θ:

$$R_0 < \infty \,,\, D_\theta \subset \{x \mid |x| < R_0\}$$

При $|y| < 2R_0$ оценка (5.16) следует из (5.15). При $|y| \ge 2R_0$ в силу принципа максимума для уравнения теплопроводности справедливо неравенство $g \le g_0$, где $G_{00} = (G_0 - g_0)$ -функция Грина для области $\{x \mid |x| > R_0\}$. Представим функцию g_0 как потенциал двойного слоя:

$$g_0(x\,,\,y\,,\,t) = \int_0^t [\int_{|\xi|=R_0} \nabla_\xi G_0(x-\xi\,,\,t-\tau)\cdot n_\xi \rho(\xi\,,\,\tau \mid y) dS_\xi] d\tau \tag{4.37}$$

где плотность $\rho(\xi\,,\,\tau \mid y)$ есть решение интегрального уравнения:

$$\rho(x\,,\,t \mid y) = 2G_0(x-y\,,\,t) +$$
$$2\int_0^t [\int_{|\xi|=R_0} \nabla_\xi G_0(x-\xi\,,\,t-\tau)\cdot n_\xi \rho(\xi\,,\,\tau \mid y)) dS_\xi] d\tau \,,\, x \in S_{out}. \tag{4.38}$$

Возможность такого представления следует из существования решения у интегрального уравнения.

Из (5.37)следует:

$$0 \le g_0(x\,,\,y\,,\,t) \le C\exp(-\delta x^2)\int\limits_0^t [\int\limits_{|\xi|=R_0} |\rho(\xi\,,\,\tau\;|\;y)|dS_\xi]d\tau. \tag{4.39}$$

Из (5.38) оцениваем ρ:

$$0 \le g_0(x\,,\,y\,,\,t) < C\exp(-\delta(x^2+y^2)). \tag{4.40}$$

Оценка (5.16) доказана.

Для доказательства оценки (5.17) функцию g рассмотрим как решение начально-краевой задачи в шаре $\{y \mid |x-y|<1\}$ и оценим решение этой задачи на основе (5.16).

Следствие 4.0.2. *Оператор*

$$g(t) = G_0(t) - G_\theta(t) \tag{4.41}$$

ядерный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$.

Доказательство. Путь Π -оператор умножения на функцию $\exp(-a|x|)$, $a \gg 1$:

$$\Pi f(x) = \exp(-a|x|)f(x).$$

Справедливо равенство

$$G_\theta(2t) - G_0(2t) = G_\theta^2(t) - G_0^2(t) =$$
$$[(G_\theta(t) - G_0(t))\Pi^{-1}][\Pi G_\theta(t)] + [G_0(t)\Pi][\Pi^{-1}(G_\theta(t) - G_0(t))].$$

Каждый оператор $[\ldots]$ -оператор Гильберта-Шмидта в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$.

Оценка вспомогательной функции Пусть $G_\infty(x\,,\,y\,,\,t)$ -функция Грина уравнения теплопроводности в области $D_\infty = D_\infty^{out}\bigcup D_\infty^{in}$.В силу принципа максимума для уравнения теплопроводности

$$\forall(x\in\mathbb{R}^3\,,\,y\in\mathbb{R}^3\,,\,t>0):$$
$$0 \le G_\infty(x\,,\,y\,,\,t) \le G_\theta(x\,,\,y\,,\,t).$$

Пусть

$$\alpha(x\,,\,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3}(G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) - G_\infty(x\,,\,y\,,\,t))dy. \tag{4.42}$$

В силу принципа максимума для уравнения теплопроводности справедлива оценка

$$0 \le \alpha(x\,,\,t) \le 1. \tag{4.43}$$

Теорема 4.0.7. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \alpha(x\,,\,t)dx < (C(D_\infty)+1)d(D_\theta\,,\,D_\infty),$$

$$d(D_\theta\,,\,D_\infty) = [mes_2 S^+_{ch} + mes_2 S^-_{ch} + mes_3 D^{ch}], \tag{4.44}$$

где константа зависит только от D_∞.

Доказательство. В области D^{out}_∞ функция $\alpha(x\,,\,t)$ есть решение задачи:

$$\frac{\partial\alpha(x\,,\,t)}{\partial t} = \Delta_x \alpha(x\,,\,t)\,,\, x\in D^{out}_\infty\,,\, t>0,$$
$$\alpha((x\,,\,+0) = 0\,,\, x\in D^{out}_\infty,$$
$$\alpha((x\,,\,t) = 0\,,\, x\in \partial D^{out}_\infty \bigcap \partial D_\theta,$$
$$0 \le \alpha((x\,,\,t) \le 1\,,\, x\in S^+_{ch}.$$

Решение этой задачи ищем как потенциал двойного слоя

$$\alpha(x\,,\,t) = \int\limits_0^t [\int\limits_{S_{out}} \nabla_\xi G_0(x-\xi\,,\,t-\tau)\cdot n_\xi \rho(\xi\,,\,\tau)dS_\xi]d\tau\,,\, x\in D^{out}_\infty. \tag{4.45}$$

Для плотности потенциала имеем интегральное уравнение

$$\rho(x\,,\,t) = \Phi(x\,,\,t) + 2\int\limits_0^t [\int\limits_{S_{out}} \nabla_\xi G_0(x-\xi\,,\,t-\tau)\cdot n_\xi \rho(\xi\,,\,\tau))dS_\xi]d\tau,$$

где

$$\Phi(x\,,\,t) = 0\,,\, x\in S_{out}\setminus S^+_{ch}\,;\, |\Phi(x\,,\,t)| \le 1\,,\, x\in S^+_{ch}$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{D^{out}_\infty} \alpha(x\,,\,t)dx \le C(D)\int\limits_0^t \int\limits_{S_{out}} |\rho(\xi\,,\,\tau)|dS_\xi]d\tau \le C(D) mes_2 S^+_{ch}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{D^{in}_\infty} \alpha(x\,,\,t)dx \le C(D) mes_2 S^-_{ch}$$

Наконец заметим,что

$$\int\limits_{D^{ch}} \alpha(x\,,\,t)dx \le mes_3 D^{ch}.$$

Теорема доказана.

Оценка нормы оператора $(G_\theta - G_\infty)$ **.**

Теорема 4.0.8. *Справедлива оценка*

$$\|(G_\theta - G_\infty)\ldots\|^2 \leq C(D)[mes_2 S^+_{ch} + mes_2 S^-_{ch} + mes_3 D^{ch}]. \tag{4.46}$$

Здесь норма -это норма Гильберта -Шмидта в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$ *или в пространстве* $\mathcal{B}_{\pm,\pm}$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\|(G_\theta - G_\infty)|\ldots\|^2 \leq \\
&\int (G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) - G_\infty(x\,,\,y\,,\,t))^2 \exp(b((|x| + |y|))dxdy \leq \\
&\sup_{x,y}(G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) - G_\infty(x\,,\,y\,,\,t)) \exp(b((|x| + |y|)) \int \alpha(x\,,\,t)dx.
\end{aligned}$$

Абсолютно аналогично рассматривается резонатор с несколькими отверстиями.

Резонансы и концентрация спектра в резонаторе Гельмгольца. В $L^2(\mathbb{R}^3)$ определим операторы:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mathsf{id} - G_0;\\
A &= \mathsf{id} - G_\theta;\\
V &= G_0 - G_\theta.;
\end{aligned}$$

функцию

$$J(\lambda) = 1 - \exp(-t\lambda)$$

и оператор

$$\Psi(\lambda) = R(J(\lambda + i0)\,,\,A_0)(A - A_0) \equiv R(J(\lambda)\,,\,A_0)V.$$

Уравнение (5.19) может быть записано в виде

$$\phi = \Psi(\lambda)(\exp(\cdot) + \phi) \tag{4.47}$$

и есть уравнение Липмана-Швингера для пары $(A_0\,,\,A)$ при значении спектрального параметра $J(\lambda i0)$.

Легко видеть, что все предположения на стр. 80 и 126 выполнены, решение обобщенной задачи рассеяния для пары $(A_0\,,\,A)$ совпадает с решением задачи дифракции и сводится к уравнению Липмана-Швингера в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$ для операторов $(A_0\,,\,A)$. Рассматриваемое нами расширение оператора Лапласа в пространстве $L^2(D_\theta^{out})$ -есть инфинитезимальный оператор полугруппы $G_\theta(t)$ в пространстве $L^2(D_\theta^{out})$, это расширение называется оператором Феллера. Так как оператор $(A - A_0)$ -ядерный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$, для пары $(A_0\,,\,A)$ существуют и полны волновые операторы, существует оператор рассеяния $S(A\,,\,A_0)$ и матрица рассеяния (т.е. матрица оператора $S(A\,,\,A_0)$ в базисе собственных функций оператора A_0) аналитична в окрестности действительной оси. (Мы добавили константу к оператору, чтобы его спектр лежал на стандартном отрезке $[0\,,\,1]$.)

Резонансы в спектре резонатора Гельмгольца. Определим отображения

$$l_s\,,\,L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3) : l_1 f(x) = f^*(x)\,,\, l_2 f(x) = f^*(-x); \tag{4.48}$$

$$p_s\,,\,S^2 \to S^2\,,\,\forall(\omega \in S^2) : p_1(\omega) = -\omega\,,\, p_2(\omega) = \omega. \tag{4.49}$$

Элементарно проверяется

Лемма 4.0.18. *1. Отображения $(l_1\,,\,p_1)$ удовлетворяют условиям 4.194.*

2. Если резонатор обладает центральной симметрией, то отображения $(l_2\,,\,p_2)$ удовлетворяют условиям 4.194.

Пусть угол $\theta_n \to 0$. Пусть λ_j -простое собственное значение задачи (5.53). Будем помечать индексом n величины, относящиеся к углу θ_n. Из теоремы 4.6.3 следует

Теорема 4.0.9. *1. Существует такое $\delta > 0$,что матрица рассеяния $t_n(\lambda + i0\,,\,,\omega_1\,,\,\omega_2)$ оператора $S(A\,,\,A_0)$ аналитична по λ в круге $\{\lambda||\lambda - \lambda_j| < \delta\}$ всюду,кроме простых полюсов в точках $\lambda_{j,n}$, причем $Re\,\lambda_{j,n} < 0\,,\,\lambda_{j,n} \to \lambda_j\,,\,n \to \infty$.*

2. Числа $\lambda_{j,n}$ есть полюсы рассматриваемого как оператор $\mathcal{B}_{+,-}$ аналитического продолжения резольвенты $R(\lambda\,,\,(-\Delta))$ самосопряженного расширения оператора Лапласа в области D_θ^{out} (расширения, отвечающего нулевым граничным условиям на S.)

3. Если последовательность действительных чисел ν_n удовлетворяет условию

$$|\nu_n - Re\,\lambda_{j,n}| = O(|Im\lambda_{j,n}|^{1+\epsilon}), \tag{4.50}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int |t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p_s(\omega))-t_{lim}(\lambda_{j,\infty}\,,\,\omega\,,\,p_s(\omega))|d\omega=\beta/\pi; \tag{4.51}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int |t_n(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p_s(\omega))-t_{j,\infty}(\nu_n\,,\,\omega\,,\,p_s(\omega))|d\omega=\beta/\pi, \tag{4.52}$$

где в общем случае $s=1$,*а в случае центральной симметрии* $s=1,2$

Доказательство. Из теоремы 5.0.4 следует, что решение задачи дифракции совпадает с решением уравнения Липмана-Швингера для пары $(A_0\,,\,A)$поэтому утверждение теоремы следует из доказанных ранее теорем о решениях уравнения Липмана-Швингера.

Концентрация спектра резонатора Гельмгольца. Пусть $\lambda_j\,,\,\psi_j(x)$ -простое собственное значение и соответствующая нормированная собственная функция задачи:

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_j(x)=\lambda_j\psi_j(x)\,,\,x\in D^{in}_{\infty}; \\ \psi_j(x)=0\,,\,x\in S_{in}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Пусть $e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ -нормированное на δ-функцию (решение задачи дифракции совпадает с решением уравнения Липмана-Швингера для операторов $(A\,,\,A_0)$, поэтому имеет смысл говорить о нормировке на δ-функцию) решение задачи рассеяния для области $D^{out}_{\theta}, U_{d,\theta}(\psi_j)$ -диагональное представление функции ψ_j:

$$U_{d,\theta}(\psi_j)(\lambda\,,\,\omega)=\int \psi_j(x)e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)dx,$$

$nor(\theta)$-норма Гильберта-Шмидта оператора $(G_\theta-G_\infty)$ в $L^2(\mathbb{R}^3\,,\,dx)$

Теорема 4.0.10. *Справедливы оценки:*

$$1. \int\limits_{|\lambda-\lambda_j|\geq\sigma} |U_{d,\theta}(\psi_j)(\lambda\,,\,\omega)|^2 d\omega d\lambda \leq \frac{\exp(2t\lambda_j)}{(1-\exp(-t\sigma))^2}nor(\theta)^2$$

$$< const.\Big(nor(\theta)/\sigma\Big)^2. \tag{4.54}$$

$$2.\forall(\lambda_j\notin[a\,,\,b]):\int\limits_{a\leq\lambda\leq b} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\lambda d\omega\to 0\,,\,\theta\to 0. \tag{4.55}$$

$$3. \int\limits_{|\lambda-\lambda_j|\leq\delta(n)} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\lambda d\omega\to 1, \tag{4.56}$$

если выполнено условие

$$\delta(n) \to 0\,,\ \|G_\infty - G_\theta\|/\delta(n) \to 0\,,\ n \to \infty. \qquad (4.57)$$

.

Доказательство. Справедливы равенства

$$\exp(-t\lambda_j)\psi_j(x) = \int G_\infty(x\,,\,y\,,\,t)\psi_j(y)dy, \qquad (4.58)$$

$$\exp(-t\lambda)e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \int G_\theta(x\,,\,y\,,\,t)e_{d,\theta}(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)dy, \qquad (4.59)$$

интегрируя и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$[\exp(-t\lambda) - \exp(-t\lambda_j)]U_{d,\theta}(\psi_j)(\lambda\,,\,\omega) = \qquad (4.60)$$

$$\int e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)[\int(G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) - G_\infty(x\,,\,y\,,\,t))\psi_j(y)dy]dx, \qquad (4.61)$$

$$(4.62)$$

в силу равенства Парсеваля

$$\int |[\exp(-t\lambda) - \exp(-t\lambda_j)]^2 U_{d,\theta}(\psi_j)(\lambda\,,\,\omega)|^2 d\omega d\lambda = \qquad (4.63)$$

$$\int[\int(G_\theta(x\,,\,y\,,\,t) - G_\infty(x\,,\,y\,,\,t))\psi_j(y)dy]^2dx \leq nor^2(\theta). \qquad (4.64)$$

Но при $|\lambda_j - \lambda| \geq \sigma$:

$$1 \leq [\exp(-t\lambda_j) - \exp(-t\lambda)]^2 \cdot \frac{\exp(2t\lambda_j)}{(1-\exp(-t\sigma))^2} < const.\Big(nor(\theta)/\sigma\Big)^2 \qquad (4.65)$$

откуда и следует первая оценка.

Для доказательства второй оценки заметим, что

$$\max_{a<\lambda<b} |\exp(-\lambda_j t) - \exp(-\lambda t)|^{-2} = C < \infty, \qquad (4.66)$$

поэтому

$$\int\limits_{a<\lambda<b} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda \leq C\int |\exp(-\lambda_j t) - \exp(-\lambda t)|^2 |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda \leq$$

$$C\|(G_\theta - G_\infty)\|^2 \to 0\,,\ \theta \to 0.$$

Для доказательства третьей оценки заметим, что

$$1 = \int |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda = \int\limits_{|\lambda-\lambda_j|<\delta(n)} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda + \int\limits_{|\lambda-\lambda_j|>\delta(n)} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda,$$

$$1 - \int\limits_{|\lambda-\lambda_j|<\delta(n)} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda = \int\limits_{|\lambda-\lambda_j|>\delta(n)} |U_{d,\theta}(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda <$$

$$< const.\Big(nor(\theta)/\delta(n)\Big)^2 \to 0\,,\; n \to \infty.$$

Пусть $e_\infty(x\,,\,y\,,\,\lambda)$ -плотность спектральной функции самосопряженного расширения (мы рассматриваем расширение, отвечающее нулевым граничным условиям на S_{in}) оператора Лапласа в $L^2(D_\infty^{in}), e_\infty(x\,,\,y\,,\,\lambda)$-отвечающая этому расширению спектральная функция :

$$e_\infty(x\,,\,y\,,\,\lambda) = \sum_{0\le\lambda_j<\lambda} \psi_j(x)\psi_j(y).$$

Пусть

$$e_\theta(x\,,\,y\,,\,\lambda) = \int\limits_{\mu<\lambda} e^\star_{d,\theta}(x\,,\,\mu\,,\,\omega) e_{d,\theta}(y\,,\,\mu\,,\,\omega) d\omega d\mu$$

-спектральная функция оператора Лапласа в $L^2(D_\theta^{out})$. Имеем:

$$\forall (f \in C_0^\infty(D_\infty^{in})) : f(x) \approx \sum_j \psi_j(x) \int \psi_j(y) f(y) dy =$$

в силу равенства Парсеваля

$$= \sum_j \psi_j(x) \int U_d^\star(\psi_j) U_d(f) d\lambda d\omega.$$

Но

$$\int U_d^\star(\psi_j) U_d(f) d\lambda d\omega = \int\limits_{|\lambda_j-\lambda|<\sigma} [\cdots] d\omega d\lambda + \int\limits_{|\lambda_j-\lambda|>\sigma} [\cdots] d\omega d\lambda;$$

по неравенству Коши

$$\Big| \int\limits_{|\lambda_j-\lambda|>\sigma} [\cdots] d\omega d\lambda \Big| < \|f\| \Big(\Big| \int\limits_{|\lambda_j-\lambda|>\sigma} |U_d(\psi_j)|^2 d\omega d\lambda \Big|^{1/2} \Big) < const.\Big(nor(\theta)/\sigma\Big).$$

Поэтому

$$f(x) \approx \sum_j \psi_j(x) \int\limits_{|\lambda_j-\lambda|<\sigma} U_d^\star(\psi_j) U_d(f) d\lambda d\omega + O(nor(\theta)/\sigma).$$

Мы видим, что если область в некотором смысле близка к замкнутой (отверстие достаточно мало),то для разложения произвольной функции с носителем в D_∞^{in} в интеграл Фурье по собственным функциям задачи дифракции существенны значения спектральной функции только в малой окрестности точек λ_j. Это явление называется концентрацией спектра.

Обратим внимание на то,что при любом $\theta > 0$ пространство $L^2(D_\theta^{out})$ принадлежит абсолютно непрерывному спектру оператора $(-\delta)$, а дискретный спектр оператора $(-\delta)$ пуст, но при $\theta = 0$ абсолютно непрерывный спектр оператора $(-\delta)$ есть пространство $L^2(D_\infty^{out})$, а сужение оператора $(-\Delta)$ на $L^2(D_{infty}^{in})$ имеет дискретный спектр.

Об асимптотике энергии, излученной почти-периодическим источником колебаний в полости резонатора Гельмгольца Пусть функция $u(x\,,\,t)$ есть решение волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x\,,\,t)}{\partial t^2} = \Delta_x u(x\,,\,t) + f(x\,,\,t)\,,\, t > 0\,,\, x \in D_\theta^{out}; \tag{4.67}$$

$$u(x\,,\,t) = 0\,,\, x \in \partial D_\theta^{out},$$

$$\partial_t u(x\,,\,+0) = u(x\,,\,+0) = 0\,,\, x \in D_\theta^{out},$$

$$f(x\,,\,t) = \sum_{0\le i\le N} a_i(x)\cos(\omega_i t + \phi_i)\,,\, a_i(x) \in C_0^\infty(D_\infty^{in}).$$

$$\forall(i) : a_i^* = a_i\,,\, \omega_i > 0. \tag{4.68}$$

Назовем энергией решения $u(x\,,\,t)$ функционал

$$E(t) = \frac{1}{2}\int [\dot{u}(x\,,\,t)^2 + \nabla_x u(x\,,\,t)^2] dx.$$

Используя спектральное разложение оператора $(-\Delta)$, можно подсчитать,что энергия решения задачи (5.67) есть

$$E(t) = \frac{1}{2}\| \int\limits_0^t (\exp(i\sqrt{(-\Delta)}\tau) f(\cdot\,,\,\tau) d\tau\|^2.$$

Здесь $(-\Delta)$ -самосопряженное расширение оператора Лапласа в $L^2(D_\theta^{out})$, отвечающее нулевым граничным условиям. Отсюда следует

Лемма 4.0.19. *Существует предел*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E(t)}{t}=W(f),$$

где

$$W(f)=\frac{1}{2}\pi\sum_{0\le i\le N}(\omega_i)^4\|U_{d,\theta}(a_i)(\omega_i^2\,,\,\cdot)\mid L^2(\Omega)\|^2. \tag{4.69}$$

Здесь $U_{d,\theta}$ -дигонализующее оператор $(-\Delta)$ преобразование:

$$U_{d,\theta}(a_i)(\lambda\,,\,\cdot)=c\int a_i(x)e_{d,\theta}(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)dx,$$

где c- нормирующая константа.Буква ω использована и для обозначения угловых переменных в спектральном разложении, и для обозначения частоты.) Пусть λ_j -простое собственное значение самосопряженного расширения оператора Лапласа в $L^2(D_\infty^{in})$, которое отвечает нулевым граничным условиям на ∂D_∞^{in}. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x\,,\,t)=\sum_{0\le i\le N}a_{i,n}(x)\cos(\omega_{i,n}t+\phi_{i,n}), \tag{4.70}$$

Пусть при

$$n\to\infty:\omega_{0,n}\to\sqrt{\lambda_j}\,,\,\forall(i\ge 1):\omega_{i,n}\to\omega_{i,\infty}\,,\,\omega_{i,\infty}\notin\{\lambda_k\mid 1\le k\le\infty\} \tag{4.71}$$

$$\forall i:a_{i,n}(x)\rightrightarrows a_{i,\infty}(x)\in C_0^\infty(D_\infty^{in}), \tag{4.72}$$

где $\{\lambda_k\mid 1\le k\le\infty\}$ – спектр оператора Лапласа в D_∞^{in}.

Пусть

$$\theta_n\to 0\,,\,n\to\infty. \tag{4.73}$$

При малых θ резонатор Гельмгольца можно рассматривать как колебательный контур с потерями, и тогда очевидно, что

рассеянная в контуре мощность $W\approx$(квадрат напряжения)/(коэффициент затухания).

Точный результат зависит от соотношения между бесконечно малыми $|\lambda_j-\omega_{0,n}^2|$ и $|Im\,\lambda_{j,n}|$

Теорема 4.0.11. *Если $\omega_{0,n}^2=Re\,\lambda_{j,n}$, то справедливо равенство:*

$$\lim_{n\to\infty}|Im\,\lambda_{j,n}|W(f_n)=\pi\sqrt{\lambda_j}|<a_0\,,\,\psi_j>|^2. \tag{4.74}$$

$$P_+(\lambda)f = c(\lambda) < l(\psi(\lambda))\,,\, Vf > \psi(\lambda), \tag{4.75}$$

где

$$\mu(\lambda)\psi(\lambda) = \Gamma_+(\lambda)\psi(\lambda) \quad , \quad \psi(\lambda) \in \mathcal{H}_b^-. \tag{4.76}$$

$$c(\lambda) =< l(\psi(\lambda))\,,\, V\psi(\lambda) >^{-1}, \tag{4.77}$$

$$\forall(|\lambda - \lambda_\infty| < \delta)\ : |1 - \mu_n(\lambda)| < \epsilon\,,\, \|\psi_n(\lambda) - \psi_\infty(\lambda) \mid \mathcal{H}_b^-\| \to 0\,,\, n \to \infty. \tag{4.78}$$

- Переобозначим через β входящий в функции G , G_0 параметр t.
  Имеем:

$$U_{d,n}(a_{o,n}) = c \int a_{0,n}(x) e_{d,\theta,n}(x\,,\, Re\,\lambda_{j,n}\,,\, \omega)dx; \tag{4.79}$$

здесь c -нормирующая плоскую волну на δ-функцию константа, и

$$e_{d,\theta,n}(x\,,\, Re\,\lambda_{j,n}\,,\, \omega) = \exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + \tag{4.80}$$

$$(\mathsf{id} - \Psi_+(Re\,\lambda_{j,n}))^{-1}\Psi_+(Re\,\lambda_{j,n})(\exp(\cdot));$$

$$\Psi_+(\lambda) = \Gamma_+(\phi(\lambda))\,,\, |Im\,\phi(\lambda_{j,n})/Im\,\lambda_{j,n}| \to \exp(-\lambda_j\beta)\,,\, n \to \infty, \tag{4.81}$$

отсюда

$$|Im\,\lambda_{j,n}|W(f_n) = \frac{1}{2}c^2|Im\,\lambda_{j,n}|\pi\sqrt{\lambda_j}|||< a_{0,n}\,,\, e_{d,\theta,n}(\cdot) > |L^2(\Omega)\|^2 + O(|Im\,\lambda_{j,n}|) = \tag{4.82}$$

$$c^2\pi\sqrt{\lambda_j}\Big|\frac{\mu(\ldots)c_n(\ldots)Im\,\lambda_{j,n} < a_{0,n}\,,\, \psi_{j,n} >}{(1 - \mu(\ldots))}\Big|^2 \times \tag{4.83}$$

$$\frac{| < \psi_{j,n}\,,\, V_n \exp(\cdot) > |\Big|^2_{\lambda = Re\,\lambda_{j,n}}}{|Im\,\lambda_{j,n}|} \tag{4.84}$$

$$\to \tag{4.85}$$

учитывая правило Ферми и формулу для вычета

$$\pi\lambda_j^2 < a_0\,,\, \psi_j >^2. \tag{4.86}$$

Возможна несколько другая постановка задачи.

Пусть $\delta(n)$ -последовательность, которая удовлетворяет условию (5.57). Пусть частота ω равномерно распределена на интервале

$$sp = (\sqrt{\lambda_j - \delta(n)}\,,\, \sqrt{\lambda_j + \delta(n)})\,,\, |sp| = \sqrt{\lambda_j + \delta(n)} - \sqrt{\lambda_j - \delta(n)}.$$

Теорема 4.0.12. *Математическое ожидание мощности $W_n(f_n)$ удовлетворяет соотношению*

$$|sp|\mathbf{M}_n(f_n) \to \pi\lambda_j^{3/2}| < a_0\,,\, \psi_j > |^2\,,\, n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем:

$$|sp|\mathbf{M}_n(f_n) = \frac{\pi}{2} \int\limits_{|\lambda_j - \omega^2| < \delta(n)} (\omega)^4 \|U_{d,\theta} a_0(\omega)|L^2(\Omega)\|^2 d + O(|sp|) =$$

$$\pi\lambda_j^{3/2}| < a_0\,,\, \psi_j > |^2.$$

Глава 5

Квантовый волновод.

Пусть S -открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с кусочно-гладкой границей. Область $D \subset \mathbb{R}^{d+1}$ мы будем называть *волноводом* , если

1. Вне некоторого шара $|x|^2 + |z|^2 > R_0^2$ область D есть цилиндр:

$$(|x|^2 + |z|^2 > R_0^2) \bigcap D = \{x \times z | x \in S\,,\ z \in \mathbb{R}^1\,,\ |z| > R_0\,\}.$$

2.Лежащая внутри этого шара часть области D есть открытая связная односвязная область в $\mathbb{R}^{d+1}$.

По умолчанию мы считаем, что $d = 1, 2$. Другие случаи будут специально оговариваться. Координату по оси волновода z часто нам будет удобно обозначить через x_{d+1}.

Мы не рассматриваем коаксиальные, вырожденные, заузленные и пр. экзотические волноводы.

Мы предполагаем,что часть волновода есть резонатор, и изучаем поведение матрицы рассеяния вблизи собственных частот резонатора.

Поясним на примере.

Рассмотрим цилиндр, которого извне касается шар. Предположим, что точка касания цилиндра и шара расширена до небольшого отверстия, через которое цилиндр соединяется с шаром. Мы интересуемся тем, что происходит с распространяющейся по волноводу волной, когда ее частота совпадает с частотой собственных колебаний шара. Аналогичная задача рассматривается для того случая, когда резонатор есть часть цилиндра между двух сечений, в которых волновод сжат.

Мы доказываем, что в ситуации общего положения слабое взаимодействие системы волновод+резонатор превращает собственное колебание резонатора в квазистационарное состояние системы волновод+резонатор и коэффициенты прохождения и отражения волны в волноводе вблизи собственных частот резонатора испытывают скачок, величина которого не зависит от ни свойств волновода, ни от свойств резонатора и деталей взаимодействия системы волновод+резонатор.

5.1 Задача рассеяния.

Пусть L_x -оператор в $C^2(D)$:

$$L_x = -\sum_{1\le i,j\le d+1} \frac{\partial}{\partial x_i} a(x)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)\,,\; 1\le i,j\le d+1\,,\; x_{d+1}\equiv z. \qquad (5.1)$$

Мы предполагаем, что входящее в (6.1) коэффициенты бесконечно дифференцируемы и равны нулю вне малой окрестности области D, а в самой области D оператор L эллиптический и вне некоторого шара выполнены равенства

$$c(x) = 0\,,\; a(x)_{ij} = \delta_{ij}.$$

Пусть $\{\phi_m\,,\,\nu_m\}$ - нормированные собственные функции и собственные значения задачи

$$-\Delta_x \phi_m(x) = \nu_m \phi_m(x)\,,\; x\in S\,,\; \phi_m(x) = 0\,,\; x\in\partial S\,,\; \nu_m \le \nu_{m+1}.$$

Положим

$$e^0(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = \exp(\pm iz\sqrt{\lambda-\nu_m})\phi_m(x)\theta(\lambda-\nu_m)\, x\in S\,,\; z\in\mathbb{R}^1,$$

где

$$\theta(\lambda-\nu_m) = \begin{cases} 1\,,\; (\lambda-\nu_m) > 0, \\ 0\,,\; (\lambda-\nu_m)\le 0. \end{cases}$$

Определение 5.1.1. Функция $e(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z)$ называется *решением задачи рассеяния* или *бегущей волной*, если она удовлетворяет уравнению

$$L_{x,}e(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = \lambda e(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z)\,,\; x\in D, \qquad (5.2)$$

граничным условиям

$$e(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = 0\,,\; x\in\partial D, \qquad (5.3)$$

и справедливо равенство

$$e(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = e^0(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) + w(\pm\,,m\,,\lambda\,,x\,,z), \qquad (5.4)$$

где функция w удовлетворяет условиям излучения:

$$w(+\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = \sum_p r(+\,,p\,,m\,,\lambda)e^0(-\,,p\,,\lambda\,,x\,,z) + O(\ldots), z < 0; \tag{5.5}$$

$$w(+\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = \sum_p (t(+\,,p\,,\ m\,,\lambda) - \delta_{pm})e^0(+\,,p\,,\lambda\,,x\,,z) + O(\ldots), z > 0; \tag{5.6}$$

$$w(-\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = \sum_p r(-\,,p\,,m\,,\lambda)e^0(+\,,p\,,\lambda\,,x\,,z) + O(\ldots), z < 0; \tag{5.7}$$

$$w(-\,,m\,,\lambda\,,x\,,z) = \sum_p (t(-\,,p\,,\ m\,,\lambda) - \delta_{pm})e^0(-\,,p\,,\lambda\,,x\,,z) + O(\ldots), z > 0. \tag{5.8}$$

Суммирование ведется по тем значениям индекса p которые удовлетворяют условию $\nu_p < \lambda$.Коэффициенты $t\,,r$ называются коэффициентами *прохождения и отражения.*

Пусть преобразование

$$\varphi : \mathbb{R}^{d+1} \mapsto \mathbb{R}^{d+1}\,,(x\,,z) \to \varphi(x\,,z) \tag{5.9}$$

бесконечно дифференцируемо, взаимно однозначно, имеет положительный якобиан и

$$\varphi(x\,,z) \equiv (x\,,z)\,,x^2 + z^2 > R_0^2.$$

Пусть D_φ образ области D при отображении φ.

Преобразование

$$U_\varphi : L^2(D_\varphi\,,dxdz) \mapsto L^2(D\,,dxdz),$$
$$U_\varphi f(x\,,z) = f(\varphi(x\,,z))\Big(\det\Big(\frac{\varphi(x\,,z)}{(x\,,z)}\Big)\Big)^{1/2}$$

унитарно, и обратное преобразование дается формулой

$$U_\varphi^{-1} : L^2(D\,,dxdz) \mapsto L^2(D_\varphi\,,dxdz),$$

где

$$U_\varphi^{-1} f(x\,,z) = f(\varphi^{-1}(x\,,z))\Big(\det\Big(\frac{\varphi(x\,,z)}{(x\,,z)}\Big)\Big)^{-1/2},$$
$$\varphi(\varphi^{-1}(x\,,z)) \equiv (x\,,z)\,,\varphi^{-1}(\varphi(x\,,z)) \equiv (x\,,z).$$

Положим

$$L_\varphi = U_\varphi L U_\varphi^{-1}$$

Если функция

$$U_\varphi^{-1} f(\cdots, x, z) = e(\pm, m, \lambda, x, z)$$

есть решение задачи рассеяния для оператора L в области D, то функция $f = U_\varphi e$ удовлетворят уравнению

$$L U_\varphi^{-1} f = \lambda U_\varphi^{-1} f,$$

граничным условиям и условиям излучения, поэтому функция f в области D_φ есть решение задачи рассеяния (бегущая волна) для оператора L_φ.

Этот прием, сводящий изучение формы волновода к изучению особенностей решения дифференциального уравнения в зависимости от особенностей его коэффициентов, часто применяется в теории волноводов.

Мы не будем использовать это метод. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что L_x -это оператор Лапласа:

$$L_x = -\Delta.$$

Эквивалентость задачи рассеяния интегральному уравнению. Пусть

D_0 – цилиндр : $D_0 = S \times \mathbb{R}^1$, $x = (x_1 \ldots, x_{d+1})$, $x_{d+1} \equiv z$, $y = (y_1, \ldots, y_{d+1})$,
$G_0(x, y, t)$ – функция Грина задачи
$\dfrac{\partial}{\partial t} G_0 = \Delta G_0$, $x \in D_0$, $y \in D_0$, $t > 0$.
$G_0(x, y, +0) = \delta(x - y)$;
$G_0(x, y, t) = 0$, $x \in \partial D_0$, $t > 0$.
$G(x, y, t)$ – функция Грина задачи
$\dfrac{\partial}{\partial t} G = \Delta G$, $x \in D$, $y \in D$, $t > 0$.
$G(x, y, +0) = \delta(x - y)$;
$G(x, y, t) = 0$, $x \in \partial D$, $t > 0$.

Положим

$G_0(t) = 0$, $x \notin D_0$, $G(t) = 0$, $x \notin D$,
$A_0 = \mathsf{id} - G_0(t)$, $A = \mathsf{id} - G(t)$, $V = G_0(t) - G(t)$.

Заметим, что операторы $A\,,\,A_0$ определены в $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$.

$G_0(t)$ -это интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ с ядром:

$$G_0((x,z)\,,\,(x',z')\,,\,t)=(4\pi t)^{-1/2}\exp(-(z-z')^2/4t)\sum_j\exp(-\nu_j t)\psi_j(x)\psi_j(x').$$

В дальнейшем мы предполагаем, что

$$\nu_1<\lambda_\infty<\nu_2\,,\,|\lambda-\lambda_\infty|<\epsilon\,,\,\{\nu_j\}\bigcap\{\lambda\,|\lambda-\lambda_j|<\epsilon\}=\emptyset.$$

Докажем аналог леммы I.0.13 для волноводов.

Лемма 5.1.1. *Справедливо равенство :*

$$R(\exp(-t\lambda)\,,\,G_0(t))=\exp(t\lambda)(\mathsf{id}+\sum_{\nu_j<\lambda}K_{+,w}(\lambda-\nu_j)P_j+A(\lambda)),$$

где $K_{+,w}(\lambda)$ *-интегральный оператор с ядром*

$$K_{+,w}(z-z'\,,\,\lambda)=\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}\exp(i|z-z'|\sqrt{\lambda})+A(z-z'\,,\,\lambda),$$

$A(\lambda)$ *-интегральный оператор с аналитическим по* λ *ядром:*

$$A(z-z'\,,\,\lambda)=O(\exp(|z-z'|),$$

P_j *– проектор на* ψ_j , $P_jf(x\,,\,z)=<\psi_j(\cdot)\,,\,f(\cdot\,,\,z)>_S$.

Доказательство. Очевидное следствие того, что в D_0 оператор L_x есть прямая сумма коммутирующих операторов

$$L_x=A_\parallel+A_\perp,\ A_\parallel=(-\frac{d^2}{dz^2})\otimes\mathsf{id}_x\,,\,A_\perp=\mathsf{id}_z\otimes(-\Delta_x).$$

$$R(\lambda\,,\,A_\parallel+A_\perp)=\int_0^\infty\exp(-(\lambda\mathsf{id}-A_\parallel-A_\perp)t)dt=$$

$$\int_0^\infty\exp(-(\lambda\mathsf{id}-A_\parallel)t)(\int_0^\infty\exp(t\nu)dE(\nu\,,\,A_\perp)d\nu)dt;$$

$$E(\lambda\,,\,A_\parallel+A_\perp)=\int_0^\lambda E(\lambda-\nu\,,\,A_\parallel)dE(\nu\,,\,A_\perp)$$

Очевидно что спектр оператора Лапласа в области D_0 есть

$$\sigma(-\Delta) = [\nu_1\,,\,\infty).$$

Остановимся подробнее на диагонализации оператора Лапласа в волноводе.

Пусть $\Omega = \{\pm\,,\,\mathbb{Z}\}$ -декартово произведение двухточечного множества $\pm$ на $\mathbb{Z}$. Превратим множество $\{\pm\,,\,\mathbb{Z}\}$ в пространство с мерой, приписав каждой точке $\omega = \pm n$ меру $+1$. Пусть $L^2(\Omega\,,\,d\omega)$ -гильбертово пространство со скалярным произведением

$$< f\,,\,g >= \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)^* g(\omega).$$

Пусть h -пополнение множества всех непрерывных на $[\nu_1\,,\,\infty)$ функций со значениями в $L^2(\Omega\,,\,d\omega)$ по метрике, индуцированной нормой

$$\|f|h\|^2 = \int\limits_{\nu_1}^{\infty} \|f(\cdot\,,\,\lambda)|L^2(\Omega)\|^2 d\lambda.$$

Пусть

$$e_d^0(\omega\,,\,\lambda\,,\,x\,,\,z) = \left(4\pi\sqrt{(\lambda-\nu_j)}\right)^{-1/2} \exp\left(\mp iz\sqrt{(\lambda-\nu_j)}\right)\psi_j(x)\theta(\lambda-\nu_j).$$

Положим

$$U_d^0 f(\omega\,,\,\lambda) = \int\limits_{D_0} f(x\,,\,z) e_d^0(\omega\,,\,\lambda\,,\,x\,,\,z)\,dxdz.$$

Преобразование

$$f \mapsto U_d^0 f$$

пространства $L^2(D_0\,,\,dx)$ в h унитарно и диагонализует оператор $-\Delta$.

Функции $e_d^0(\omega\,,\,\lambda\,,\,x\,,\,z)$ удовлетворяют уравнению

$$(-\Delta_{x,z}) e_d^0 = \lambda e_d^0.$$

Коэффициенты прохождения и отражения следующим образом связаны с элементами T-матрицы (в выборе обозначений мы связаны традицией, слева -элементы t матрицы, справа -коэффициенты прохождения и отражения):

$$\begin{aligned}
&-2\pi i t(-\,,\,-\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda) = t(-\,,\,-\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda) - \delta_{pm},\\
&-2\pi i t(+\,,\,+\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda) = t(+\,,\,+\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda) - \delta_{pm},\\
&-2\pi i t(-\,,\,+\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda) = r(-\,,\,+\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda),\\
&-2\pi i t(+\,,\,-\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda) = r(+\,,\,-\,,\,p\,,\,m\,,\,\lambda).
\end{aligned}$$

В общем случае диагонализующее преобразование строится стандартными методами из решений задачи рассеяния (бегущих волн).

Докажем аналог леммы 5.0.13.

Лемма 5.1.2. *Справедлива оценка:*

$$G_0((x,z)\,,\,(x',z')\,,\,t) - G((x,z)\,,\,(x',z')\,,\,t) = g((x,z)\,,\,(x',z')\,,\,t)$$

где

$$|g((x,z)\,,\,(x',z')\,,\,t)| \le C\exp(-\delta(|z|^2 + |z'|^2)),$$
$$|\nabla_z g((x,z)|\,,\,(x',z')\,,\,t)| \le C\exp(-\delta(|z|^2 + |z'|^2)).$$

Доказательство. Для доказательства также можно воспользоваться потенциалами, можно поступить несколько иначе. Пусть R_0 выбрано так, что при $|z| > R_0$ волновод D есть цилиндр, а оператор L есть оператор Лапласа. Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^t \int\limits_{z>2R_0} \frac{d}{d\tau}G_0((x,z)\,,\,y0\,,\,\tau)G((x,z)\,,\,y\,,\,t-\tau)d\tau dxdz =$$
$$G(y0\,,\,y\,,\,t) - G_0(y\,,\,y0\,,\,t) =$$
$$\int\limits_0^t \int\limits_{z>2R_0} (G\Delta G_0 - G_0\Delta G)dxdzd\tau =$$
$$\int\limits_0^t \int\limits_{z=2R_0} (G((x,z)\,,\,y\,,\,t-\tau)\frac{d}{dz}G_0((x,z)\,,\,y0\,,\,\tau) -$$
$$G_0((x,z)\,,\,y0\,,\,\tau)\frac{d}{dz}G((x,z)\,,\,y\,,\,t-\tau))dxd\tau =$$
$$O(\exp(-\delta|z'|^2)); y0 = (x\,,\,z').$$

Отсюда следует оценка:

$$G((x,z')\,,\,y\,\,,\,t) = O(\exp(-\delta|z'|^2)).$$

Производная оценивается аналогично.

Теорема 5.1.1. *Функция*

$$e(\pm\,,\,m\,,\,\lambda\,,\,x\,,\,z) = e_d^0(\pm\,,\,m\,,\,\lambda\,,\,x\,,\,z) + w(\pm\,,\,m\,,\,\lambda\,,\,x\,,\,z)$$

*в том и только том случае есть решение задачи рассеяния (*бегущая волна*), если функция* $w(\pm\,,\, m\,,\, \lambda\,,\, x\,,\, z)$ *есть решение уравнения Липмана-Швингера:*

$$w = -\exp(\lambda t)(\mathsf{id} + K_{+,w}(\lambda + i0))g(e_d^0 + w). \tag{5.10}$$

2. Если функция w *удовлетворяет уравнению* (6.10) *при каком-нибудь* $t > 0$*, то она удовлетворяет уравнению* (6.10) *при всех* $t > 0$*.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.0.4 и мы не будем его повторять.

Оператор

$$u \mapsto (J(\lambda + i0)\,,\, A_0)^{-1}(A - A_0)u \tag{5.11}$$

компактен в $\mathcal{H}_b^-$ компактен при любом $b > 0$ и аналитичен по λ в окрестности действительной оси, поэтому к уравнению (6.10) применима общая теория уравнения Липмана-Швингера, однако условия существования нетривиальных решений однородного уравнения на непрерывном спектре (условия существования захваченных мод) в случае квантового волновода имеют совершенно другой смысл.

Рассмотрим квантовую частицу с эффективной массой $m(z)\,,\, z \equiv x_3$, которая движется в квантовом волноводе. Пусть функция $z \mapsto m(z)$ - гладкая функция,и функция

$$c^2(x\,,\, z) = \frac{1}{2m(z)}$$

удовлетворяет условиям:

$$c(x\,,\, z) \equiv c(z)\,,\, \forall(z) : 0 < \delta \le c(z) \le 1,$$
$$\exists(R_0) : c(z) \equiv 1\,,\, |z| > R_0\,,\, \exists(z_0) : c(z_0) < 1,$$

в дальнейшем не ограничивая общности мы считаем, что

$$c(0) = \min_{z\in\mathbb{R}} c(z) < 1.$$

Пусть

$$h'(z) = c(h(z))\,,\, , h(0) = 0,$$
$$U : L^2(\mathbb{R}^3\,,\, dx_1dx_2dz) \mapsto L^2(\mathbb{R}^3\,,\, dx_1dx_2dz),$$
$$Uf(x_1\,,\, x_2\,,\, z) = f(x_1\,,\, x_2\,,\, y(z)))(y'(z))^{1/2} -$$

индуцированное подстановкой Лиувилля унитарное преобразование,

$$U^{-1}(-\partial_z c^2(z)\partial_z - c^2\Delta_x)U = -\partial^2_{zz} + q(z) - c^2(h(z))\Delta_x,$$

Заметим, что

$$suppq(z) \subseteq \{c(h(z)) \not\equiv 1\}.$$

Будем искать собственную функкцию в виде

$$u_k(x\,,\,z) = \omega_k(x) y_k(z).$$

Получим уравнение:

$$-\partial^2_{zz} y_k + \Big(q(z) + \nu_k (c^2(h(z)) - 1) \Big) y_k(z) = [\lambda - \nu_k] y_k(z).$$

Очевидно, что

$$\forall (q(z) \neq 0) : \Big(\cdots \Big) \to -\infty\,,\ \Big(\cdots \Big)\Big|_{z=0} \to -\infty\,,\ k \to \infty,$$

поэтому уравнение для $y_k(z)$ для достатоно больших k имеет нетривиальное решение, которое принадлежит $L^2(\mathbb{R}\,,\,dz)$.

Взаимодествие бегущей волны и резонатора вблизи собственной частоты резонатора.

Внешний резонатор. Опишем область, которую мы будем называть *элементарным внешним резонатором*. Эта область состоит из$\{$волновода : $\{x\,,\,y \mid -\infty < x < \infty\,,\,0 < y < 1\}\} + \{$резонатора$\{x\,,\,y \mid |x| < 1, 2 < y < 3\}\} + \{$ канала связи : $\{x\,,\,y \mid |x| < \delta\,,\,1 < y < 2\}\}$.

Область D мы называем *внешним резонатором*, если она есть образ элементарного внешнего резонатора при взаимно-однозначном непрерывно дифернцируемом отображении. Для простоты рассмотрим отображения, которые тождественны на волноводе.

Пусть

$$\delta = \delta_n \to 0\,,\, n \to \infty$$

Будем помечать индексом n величины, отвечающие каналу связи δ_n. Рассмотрим ситуацию, когда при $\delta = 0$ т.е. при выключенном канале связи собственная частота резонатора λ_{res} лежит между двух первых частот отсечки $\nu_1 < \lambda_{res} < \nu_2$. С математической точки зрения при выключенном канале связи λ_{res} есть погруженное собственное значение системы резонатор+волновод. Если канал связи вкючен, то система имеет чисто непрерывный спектр, а погруженное собственное значение превращается в ситуации общего положения в резонанс.

Определим отображения

$$l_1 : \mathcal{H}_b^- \to \mathcal{H}_b^- \, , \, l_1\psi(x) = \psi^*(x); p_1 : \Omega \to \Omega \, , \, p_1(\pm j) = \mp j.$$

Непосредственно по формуле (4.194) проверяется, что условия 4.199, условия леммы 4.6.10 и теоремы 4.6.3 выполнены.

Очевидно, что для плоского прямого незаполненного волновода

$$\forall(\lambda \neq \lambda_\infty) : \lim_{n\to\infty} r(+\, , \, -\, , \, 1\, , \, 1\, , \, \lambda) = \lim_{n\to\infty} r(-\, , \, +\, , \, 1\, , \, 1\, , \, \lambda) = 0,$$

поэтому из теоремы 4.6.3 следует:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(|r(+\, , \, -\, , \, 1\, , \, 1\, , \, Re\,\lambda_n)| + |r(-\, , \, +\, , \, 1\, , \, 1\, , \, Re\,\lambda_n)|\Big) = 2,$$

а это значит,что взаимодействие с внешним резонатором на резонансной частоте “запирает” волновод: модули коэффициентов отражения от каналов связи на резонансной частоте стремятся к 1, если резонанс становится четко выраженным,т.е. взаимодействие с каналом связи становится малым и полюс матрицы рассеяния приближается к действительной оси.

Внутренний резонатор. Изучим взаимодйствие бегущей волны с внутренним резонатором.

Опишем область, которую мы будем называть *элементарным внутренним резонатором*. Эта область состоит из

{волновода : $\{x\, , \, y \mid -\infty < x < \infty\, , \, |y| < 1\}$} $-$ {двух перегородок : $\{x\, , \, y \mid d < |x| < d + b\, , \, |y| < 1\}$} $+$ {двух каналов связи : $\{x\, , \, y \mid d < |x| < d + b\, , \, |y| < \delta\}$}.

Величина d подбирается так, чтобы собственная частота резонатора $\{x\, , \, y \mid |x| < d\, , \, |y| < 1\}$ лежала бы между двух первых частот отсечки. Область D мы будем называть внутренним резонатором, если она есть образ в $\mathbb{R}^2$ элементарного внутреннего резонатора при непрерывно дифференцируемом взаимно однозначном отображении ϕ с положительным якобианом, которое постоянно вне некоторого шара, образ области D центрально симметричен: $\phi(-x) \equiv \phi(x)$ и собственная частота резонатора $\phi(\{x\, , \, y \mid |x| < d\, , \, |y| < 1\})$ лежалит между двух первых частот отсечки.

Определим отображения

$$l_2 : \mathcal{H}_b^- \to \mathcal{H}_b^- \, , \, l_2\psi(x) = \psi^*(-x); p_2 : \Omega \to \Omega \, , \, p_2(\pm j) = \pm j.$$

Непосредственно по формуле (4.194) проверяется, что условия 4.199, условия леммы 4.6.10 и теоремы 4.6.3 выполнены, так как отображение l_2 коммутирует с функцией Грина G.

Если каналы связи закрыты, то волновод состоит из двух невзаимодействующих частей и резонатора. Собственная частота резонатора есть погруженное собственное значение системы волновод+резонатор. Если каналы связи открываются, то собственное значение в соответствии с общей теорией превращается в резонанс (доказательство тривиально и повторяет доказательство для резонатора Гельмгольца). При закрытых каналах связи коэффициенты прохождения раны нулю. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\Big(|t_n(+\,,\,+\,,\,1\,,\,1\,,\,Re\,\lambda_n)|+|t_n(-\,,\,-\,,\,1\,,\,1\,,\,Re\,\lambda_n)|\Big)=2.$$

А это значит, что на резонансных частотах волна почти свободно проходит через резонатор.

Глава 6

Резонансы на ловушечном потенциале.

Дадим формальное описание ловушечного потенциала в $\mathbb{R}^3$. Пусть $V_m(x)$ -монотонно неубывающая последовательность дифференцируемых функций, $V_\infty(x) := \lim\limits_{n\to\infty} V_n(x)$. Пусть при достаточно большом $R < \infty$ области

$$\begin{aligned} &D_{in} = \{x \mid V_\infty(x) < \infty\,,\, |x| < R\}\,, \\ &D_{out} = \{x \mid V_\infty(x) < \infty\,,\, |x| > R\}\,, \\ &D_\infty = \mathbb{R}^d \setminus (D_{in} \cup D_{out}). \end{aligned}$$

не пусты, открыты и связны. Пусть $dist(D_{in}\,,\, D_{out}) > 0$. Тогда функцию $V_m(x)$ мы будем называть ловушечным потенциалом в $\mathbb{R}^3$.

Дадим формальное описание ловушечного потенциала в $\mathbb{R}^1$. Пусть $V_m(x)$ -монотонно неубывающая последовательность дифференцируемых функций, $V_\infty(x) := \lim\limits_{n\to\infty} V_n(x)$. Пусть

$$\begin{aligned} &\{x \mid V_\infty < \infty\} = (-\infty\,,\, a_1) \cup (a_2\,,\, a_3) \cup (a_4\,,\, \infty)\} \\ &\{x \mid V_\infty = \infty\} = [a_1\,,\, a_2] \cup [a_3\,,\, a_4]\,;\, a_j < a_{j+1}. \end{aligned}$$

Тогда функцию $V_m(x)$ мы будем называть ловушечным потенциалом в $\mathbb{R}^1$.

С точки зрения принятого марковского подхода с математической точки зрения задача рассеяния на ловушечном потенциале в $\mathbb{R}^3$ практически ничем не отличается от задачи рассеяния на резонаторе Гельмгольца, поэтому мы разберем одномерный случай.

Мы ограничмся формулировкой схемы рассуждений, поскольку доказательства всех утверждений в общей ситуации были уже даны.

Напомним постановку задачи рассеяния для уравнения Шредингера на всей оси (см. стр. 75).

Нам удобно несколько изменить принятые ранее обозначения.

Решением задачи рассеяния для потенциала $V(x)$ мы называем функции $u^{\pm}(x\,,\,\lambda)$, которые удовлетворяют уравнению

$$(-\partial_{xx}^2 + V(x))u^{\pm}(x\,,\,\lambda) = \lambda u^{\pm}(x\,,\,\lambda), \tag{6.1}$$

и при $|x| \to \infty$ имеют асимптотику

$$u^{+}(x\,,\,\lambda) = \exp(ix\sqrt{\lambda})T(+\,,\,\lambda) + o(1), x \to +\infty; \tag{6.2}$$

$$u^{+}(x\,,\,\lambda) = \exp(ix\sqrt{\lambda}) + \exp(-ix\sqrt{\lambda})R(+\,,\,\lambda) + o(1), x \to -\infty; \tag{6.3}$$

$$u^{-}(x\,,\,\lambda) = \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + \exp(ix\sqrt{\lambda})R(-\,,\,\lambda) + o(1), x \to +\infty; \tag{6.4}$$

$$u^{-}(x\,,\,\lambda) = \exp(-ix\sqrt{\lambda})T(-\,,\,\lambda) + o(1), x \to -\infty. \tag{6.5}$$

Наша цель состоит в том, чтобы вычислить асимптотику решения задачи рассеяния для потенциала $V(x) = V_n(x)$ при $n \to \infty$, при этом само решение задачи рассеяния для потенциала $V_\infty(x)$ нас не интересует и мы его не определяем.

Положим по определению

$$H_m u(x) = (-\partial_{xx}^2 + V_m(x))u(x).$$

Для простоты мы в дальнейшем считаем, что

$$\begin{gathered} V_{m+1}(x) \geq V_m(x) \geq 0,\ V_0(x) \equiv 0, \\ \forall(|x| > R_0\,,\,m) : V_m(x) = 0. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Положим

$$g_m = G_0 - G_m.$$

Аналогично теореме 5.0.4 (см. стр. 197)доказывается

Теорема 6.0.2. *1 Чтобы функция*

$$u^{\pm}(x\,,\,\lambda) = \exp(\pm ix\sqrt{\lambda}) + \phi^{\pm}(x\,,\,\lambda)$$

была решением задачи рассеяния, необходимо и достаточно, чтобы функция $\phi^{\pm}(x\,,\,\lambda)$ была решением уравнения

$$\begin{gathered} \phi^{\pm} = (\exp(-(\lambda + i0)t) - \exp(t\Delta)^{-1} \times \\ (\exp(-tH_m) - \exp(-tH_0))(\exp(\pm ix\sqrt{\lambda}) + \phi^{\pm}). \end{gathered} \tag{6.7}$$

2. Если функция $\phi^{\pm}$ есть решение уравнения (7.7) при каком-нибудь $t > 0$,то она есть решение этого уравнения при всех $t > 0$.

Из равенства (7.7) следует

Лемма 6.0.3. *Коэффициенты отражения и прохождения могут быть вычислены по формулам*

$$T_m(+\,,\,\lambda) = 1 - \frac{i\exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-iy\sqrt{\lambda}) g_m u^+(y\,,\,\lambda) dy, \qquad (6.8)$$

$$R_m(+\,,\,\lambda) = -\frac{i\exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(iy\sqrt{\lambda}) g_m u^+(y\,,\,\lambda) dy. \qquad (6.9)$$

Аналогичные формулы верны для знака $-$.

Пусть

$$G_m(x\,,\,y\,,\,t) = \text{интегральное ядро оператора } \exp(-tH_m) \qquad (6.10)$$

Из принципа максимума для уравнения теплопроводности следует, что

$$0 \le G_{m+1}(x\,,\,y\,,\,t) \le G_m(x\,,\,y\,,\,t) \le G_0(x\,,\,y\,,\,t), \qquad (6.11)$$

поэтому

$$\forall(x\,,\,y)\ \exists G_\infty(x\,,\,y\,,\,t) := \lim_{m\to\infty} G_m(x\,,\,y\,,\,t). \qquad (6.12)$$

Очевидна

Лемма 6.0.4. *Если x_0 (или y_0) есть внутренняя точка множества*

$$\mathcal{M}_\infty := \{x \mid V_\infty(x) = \infty\},$$

то

$$\forall(y \in \mathbb{R}, t > 0)\ : G_\infty(x_0\,,\,y\,,\,t) = 0.$$

Соответственно

$$G_\infty(x\,,\,y_0\,,\,t) = 0.$$

Доказательство стандартно: рассматриваем уравнение

$$G_0(x\,,\,y\,,\,t) - G_m(x\,,\,y\,,\,t) = \int\limits_0^t \int G_0(x\,,\,y-\xi\,,\,t-\tau) V_m(\xi) G_m(\xi\,,\,y\,,\,\tau) d\xi d\tau.$$

Теорема 6.0.3. *Интегральные операторы с ядром $G_\infty(x\,,\,y\,,\,t)$ образуют полугруппу класса C_0 в каждом из пространств*

$$L^2((-\infty\,,\,a_1))\,,\;L^2((a_2\,,\,a_3))\,,\;L^2((a_4\,,\,\infty)) \tag{6.13}$$

и приводят каждое из этих пространств.

Лемма 6.0.5. *В пространстве $L^2((a_2\,,\,a_3))$ интегральные операторы с ядром $G_\infty(x\,,\,y\,,\,t)$ самосопряжены и компактны.*

Собственные значения сужения оператора с интегральным ядром $G_\infty(x\,,\,y\,,\,t)$ на $L^2((a_2\,,\,a_3))$ имеют вид:

$$\sigma(G_\infty(t)) = \exp(-\lambda_{j,\infty}t) \tag{6.14}$$

Числа $\{\lambda_{j,\infty}\}$ есть погруженные собственные значения оператора

$$H_\infty := -\partial_t G_\infty(t)\Big|_{t=0}$$

При $m<\infty$ числа $\lambda_{j,m}$ (см. стр. 131) есть резонансы.

Если $x_0\in\mathcal{M}$, то из известной формулы

$$\forall(x_0): -2i\sqrt{\lambda}|T_m(\pm\,,\,\lambda)|^2 = u_m^\pm(x_0\,,\,\lambda)\partial_x u_m^\pm(x_0\,,\,\lambda)^* - u_m^\pm(x_0\,,\,\lambda)^*\partial_x u_m^\pm(x_0\,,\,\lambda)$$

вытекает

Следствие 6.0.1. *Справедливо равенство*

$$\forall(\lambda\notin\{\lambda_{j,\infty}\}): \lim_{m\to\infty}|T_m(\pm\,,\,\lambda)| = 0.$$

Теорема 4.6.3 в рассматриваемом случае формулируется так.

Положим по определению

$$v.p.R(\pm\,,\,\lambda_j) := \lim_{|\lambda-\lambda_j|\to+0}\big(\lim_{m\to\infty}R_m(\pm\,,\,\lambda)\big).$$

Теорема 6.0.4. *1.Справедливо равенство*

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\big|R_m(+\,,\,Re\,\lambda_{j,m}) - v.p.R(+\,,\,\lambda_j)\big| + \\ \big|R_m(-\,,\,Re\,\lambda_{j,m}) - v.p.R(-,\,\lambda_j)\big|\Big) = 2.$$

2.Если последовательность V_m состоит из четных функций, то

$$\lim_{m\to\infty}\big|T_m(\pm\,,\,Re\,\lambda_{j,m})\big| = 1.$$

Детали вычислений приведены в [23].

Приложение A

Функции Грина.

Вычислим функции Грина (фундаментально решение) оператора Лапласа, действующего в $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 3$. Напомним, что функцией Грина оператора Лапласа $-\Delta$ называется интегральное ядро оператора $R(\lambda, (-\Delta)) = (\lambda + \Delta)^{-1}$. Пусть $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Напомним, что символом $\widehat{f}(\xi)$ мы обозначили преобразование Фурье функции $f(x)$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\forall(\lambda \notin \mathbb{R}_+) : \ v = (\lambda + \Delta)^{-1} f \,,\ \widehat{v} = (\lambda - \xi^2)^{-1} \widehat{f}(\xi), \\
&v(x) = \int Gr(x - y \,,\ \lambda) f(y) dy
\end{aligned}
$$

где

$$
Gr(x \,,\ \lambda) = (2\pi)^{-d} \int (\lambda - \xi^2)^{-1} \exp(ix \cdot \xi) d\xi.
$$

Для $d = 1$ имеем (интеграл считаем вычетами):

$$
Gr(x - y \,,\ \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\xi \cdot (x - y))}{(\lambda - \xi^2)} d\xi = \frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x - y|)}{2i\sqrt{\lambda}}.
$$

Итак, для $d = 1$:

$$
Gr(x - y \,,\ \lambda) = \frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x - y|)}{2i\sqrt{\lambda}} \,,\ \lambda \notin \mathbb{R}^1_+.
$$

Для $d = 3$ имеем:

$Gr(x-y\,,\,\lambda) =$

$$(2\pi)^{-3}\lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\exp(i|x-y||\xi|\cos(\theta))(\lambda-|\xi|^2)^{-1}|\xi|^2\sin(\theta)d|\xi|d\theta d\phi;$$

$$Gr(x-y) = (2\pi)^{-3}\lim_{R\to\infty}(2\pi)|x-y|^{-1}2\int_0^R z(\lambda-z^2)^{-1}\sin(|x-y|z)dz;$$

$$Gr(x) = (2\pi)^{-2}|x-y|^{-1}Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\exp(i|x-y|z)}{\lambda-z^2}dz;$$

Интеграл считаем с помощью вычетов. Получаем:

$$Gr(x-y\,,\,\lambda) = \frac{1}{4\pi|x-y|}\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)\,,\ \lambda\notin\mathbb{R}^1_+.$$

Приложение B

Ядерность разности экспонент от операторов.

Докажем теорему.

Теорема B.0.5. *Пусть*

$$A = -\Delta + V\ ,\ A_0 = -\Delta\ ,\ G(t) = \exp(-At)\ ,\ G_0(t) = \exp(-A_0 t).$$

Если потенциал V *удовлетворяет оценке*

$$|V(x)| < C\exp(-d|x|), \tag{B.1}$$

то разность

$$g(t) = G(t) - G_0(t) \tag{B.2}$$

-ядерный оператор в $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n\ ,\ dx)$.

Доказательство. Пусть $G(x\ ,\ y\ ,\ t)$, $G_0(x\ ,\ y\ ,\ t)$ -интегральные ядра операторов $G(t) = \exp(-At)$, $G_0(t) = \exp(-A_0 t)$ (функции Грина) .

Пусть

$$M(V)(r) = \max\{|V(\xi)|\ \mid\ |\xi| > r/2\}.$$

Лемма B.0.6. *Для интегральногое ядра оператора* $g(t)$ *справедлива оценка*

$$|g(x\ ,\ y\ ,\ t) \le C(\alpha\ ,\ t)J(x)^{1/2}J(y)^{1/2}\exp(-(1-\alpha)(x-y)^2/4t), \tag{B.3}$$

где

$$J(x) = (\exp(-\alpha x^2/16t) + M(V)(|x|)). \tag{B.4}$$

Исходим из интегрального уравнения для функций Грина:

$$G_0(x\,,\,y\,,\,t) - G(x\,,\,y\,,\,t) = \int_0^t \int G_0(x\,,\,\xi\,,\,t-\tau)V(\xi)G(\xi\,,\,y\,,\,\tau)d\tau d\xi. \quad \text{(B.5)}$$

Пусть

$$M = \sup |V(x)|.$$

Из принципа макимума для уравнения теплопроводности следует оценка

$$0 \le G(x\,,\,y\,,\,t) \le \exp(Mt)G_0(x\,,\,y\,,\,t)$$

Подставив эту оценку в (B.5), получим:

$$|g(x\,,\,y\,,\,t)| \le \exp(Mt) \int_0^t \int G_0(x\,,\,\xi\,,\,t-\tau)|V(\xi)|G_0(\xi\,,\,y\,,\,\tau)d\tau d\xi. \quad \text{(B.6)}$$

Оценим интеграл в (B.6). Имеем:

$$\begin{aligned} &I = \int_0^t \int G_0(x\,,\,\xi\,,\,t-\tau)|V(\xi)|G_0(\xi\,,\,y\,,\,\tau)d\tau d\xi \le \\ &C \int_0^t \int (4\pi(t-\tau)\tau)^{-n/2} \exp(-[\ldots])|V(\xi)|d\tau d\xi, \end{aligned} \quad \text{(B.7)}$$

где

$$[\ldots] = \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} + \frac{(y-\xi)^2}{4\tau}. \quad \text{(B.8)}$$

Но

$$[\ldots] = \alpha[\ldots] + (1-\alpha)[\ldots], \quad \text{(B.9)}$$

и

$$[\ldots] \ge \frac{(x-\xi)^2 + (y-\xi)^2}{4t}.$$

Учитывая это неравенство, имеем:

$$\begin{aligned} &\forall(|\xi| < |x|/2)\ :\ \exp(-[\ldots])|V(\xi)| \le M \exp(-\alpha \frac{|x|^2}{16t} + (1-\alpha)[\ldots]), \\ &\forall(|\xi| > |x|/2)\ :\ \exp(-[\ldots])|V(\xi)| \le (\exp(-(1-\alpha)[\ldots])M(V)(|x|). \end{aligned}$$

Поэтому

$$I \le const\Big(\exp\big(-\alpha\frac{|x|^2}{16t}\big)\int_{|\xi|<|x|/2}(\ldots)d\xi + M(V)(|x|)\int_{|\xi|>|x|/2}(\ldots)d\xi\Big) \; < $$
$$const\Big(\exp\big(-\frac{|x|^2}{16t}\big) + M(V)(|x|)\Big)\int \exp(-(1-\alpha)[\ldots])d\xi$$

Подставляя эту оценку в (B.7), получим:

$$I \le C(\alpha)J(x)\exp(-(1-\alpha)(x-y)^2/4t)$$

где

$$J(x) = (\exp(-\alpha x^2/16t) + M(V)(|x|)).$$

Аналогично,

$$I \le C(\alpha)J(y)\exp(-(1-\alpha)(x-y)^2/4t).$$

Отсюда следует, что

$$I \le C(\alpha)J(x)^{1/2}J(y)^{1/2}\exp(-(1-\alpha)(x-y)^2/4t). \tag{B.10}$$

Лемма доказана. Теперь переходим к доказательству теоремы.

Пусть δ -достаточно малое положительное число, Z -оператор умножения на $\exp(-\delta|x|)$. Справедливо равенство

$$g(2t) = G(t)^2 - G_0(t)^2 = [g(t)Z^{-1}][ZG(t)] + [G_0(t)Z][Z^{-1}g(t)],$$

где каждый оператор в квадратных скобках в силу леммы есть оператор Гильберта-Шмидта. Теорема доказана.

Приложение C

Принцип минимакса.

Пусть A -самосопряженный полуограниченный оператор, $a = \inf \sigma(A) > -\infty$, $\sigma(A) \subset [a\,,\,\infty)$, $E(\lambda)$ - характеристическая функция оператора A.

Напомним некоторые термины. Мы говорим, что точка λ принадлежит существенному спектру оператора A: $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$, если $\forall(\epsilon > 0)\ :\ dim(E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon))\mathcal{H} = \infty$. Мы говорим, что точка λ принадлежит дискретному спектру оператора A: $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$, если λ -изолированное собственное значение конечной кратности. Пусть

$$\nu = \begin{cases} \inf \sigma_{ess}(A), \text{ если } \sigma_{ess}(A) \neq \emptyset, \\ \infty, \text{ если } \sigma_{ess}(A) = \emptyset. \end{cases}$$

Если множество $\sigma^-(A) := \sigma(A) \setminus [\nu\,,\,\infty)$ не пусто, то $\sigma^-(A) \subset \sigma_{disc}(A)$. Из спектральной теоремы вытекает простая вариационная характеристика множества $\sigma^-(A)$, которая полезна при исследовании спектра оператора Шредингера.

Справедливо равенство

$$< u\,,\,Au >= \sum_j \lambda_j < u\,,\,P_j u > + \int_{\nu-0}^{\infty} \lambda d_\lambda < u\,,\,E(\lambda)u >\,,\ \lambda_j \in \sigma_{disc}(A)\backslash[\nu\,,\,\infty), \tag{C.1}$$

где λ_j -собственное значение оператора A, P_j -одномерный проектор на собственное пространство, соответствующее λ_j, в случае кратных собственных значений мы полагаем $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots \lambda_{j+m}$. Либо сумма, либо интеграл в (C.1) могут отсутствовать.

Непосредственно из формулы (C.1) вытекает вариационный принцип Куранта.

Теорема C.0.6. *Положим*

$$[\phi_1\,,\,\phi_2\,,\,\ldots\,,\phi_m] = \inf\{< \psi\,,\,A\psi > \mid \|\psi\| = 1\,,\,\forall(\phi_j\,,\,1 \leq j \leq m)\ :< \phi_j\,,\,\psi >= 0\},$$

тогда

$$\lambda_1 = \inf\{< \psi\,,\, A\psi > |\|\psi\| = 1\}$$
$$\forall(j > 1) \;:\; \lambda_j = \sup\{[\phi_1\,,\,\phi_2\,,\,\phi_{j-1}] \mid \phi_j \in \mathcal{H}\}, \tag{C.2}$$

если $\lambda_j = \lambda_{j+m}$ *только для конечного числа индексов* m, *и* $\lambda_j = \nu$, *если* $\forall(m \geq 1) \;:\; \lambda_j = \lambda_{j+m}$.

Часто оказывается полезна приводимая ниже упрощенная формулировка этого принципа.

Пусть
$$N(\lambda) = dim\, E(\lambda)\mathcal{H}.$$

Пусть $L(\lambda)$ -линейное пространство, удовлетворяющее условию:

$$L(\lambda) \subset \mathbf{Dom}(A)\,,\,\forall(u \in L(\lambda)) :$$
$$(< u\,,\,Au > \leq \lambda < u\,,\,u >) \iff (< u\,,\,(\lambda - A)u > \geq 0). \tag{C.3}$$

Лемма C.0.7. *Справедливо равенство*

$$N(\lambda) = \sup\{dim\, L(\lambda) | L(\lambda) \subset \mathcal{H}\}. \tag{C.4}$$

Доказательство. Пусть $u \in E(\lambda)\mathcal{H}$. Тогда

$$< u\,,\,Au >= \int_a^\lambda \mu d_\mu < u\,,\,E(\mu)u > \leq \lambda \int_a^\infty d_\mu < u\,,\,E(\mu)u > \leq \lambda < u\,,\,u >, \tag{C.5}$$

поэтому
$$N(\lambda) \geq \sup\{dim\, L(\lambda) | L(\lambda) \subset \mathcal{H}\}.$$

Пусть $v \perp E(\lambda)\mathcal{H}$. Тогда

$$< v\,,\,v >= \int_{\lambda+0}^\infty < v\,,\,E(\mu)v > \quad <$$

(неравество строгое)

$$\int_{\lambda+0} (\mu/\lambda) < v\,,\,E(\mu)v >= \frac{1}{\lambda} < v\,,\,Av >, \tag{C.6}$$

поэтому

$$\lambda < v\,,\,v >< < v\,,\,Av > . \tag{C.7}$$

Если
$$N(\lambda) < \sup\{dim\, L(\lambda) | L(\lambda) \subset \mathcal{H}\},$$
то в некотором $L(\lambda)$ должен существовать вектор $v \perp E(\lambda)\mathcal{H}$, что в силу (C.7) противоречит определению $L(\lambda)$. Лемма доказана. Иногда эта лемма называется леммой И.М.Глазмана.

Следствие C.0.2. *Пусть*
$$\mathbf{Dom}(A_1) = \mathbf{Dom}(A_2)\,,\ A_1 \geq A_2\,,\ N_j(\lambda) = dim\, E(\lambda\,,\ A_j)\mathcal{H},$$
тогда
$$N_1(\lambda) \leq N_2(\lambda).$$

Приложение D

Оценка Бирмана-Швингера.

Пусть $E(\lambda\,,\,H)$ -спектральная функция оператора Шредингера $H = -\Delta + V$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, мы будем предполагать, что V -оператор умножения на ограниченную функцию $V(x)$, $\sup|V(x)| < \infty$. Предположим, что при любом $\epsilon > 0$ на полуоси $(-\infty\,,\,\epsilon]$ есть только конечное (зависящее от ϵ) число собственных значений (с учетом кратности). Оценим $N_- = dim\,E(-0\,,\,H)\mathcal{H}$.

Положим

$$V_-(x) = \begin{cases} 0\,,\text{ если } V(x) \geq 0, \\ V(x)\,,\text{ если}\,,\ V(x) \leq 0. \end{cases}$$

Пусть

$$0 < a \leq 1\,,\ H_a = -\Delta + aV_-\,,\ \epsilon > 0\,,\ N(a\,,\,\epsilon) = dim\,E(-\epsilon\,,\,H_a)\mathcal{H}.$$

Ясно, что

$$\forall(\epsilon > 0)\,,\ \exists(\delta(\epsilon) > 0)\ :\ N(a\,,\,\epsilon) = 0\,,\text{ если } a < \delta(\epsilon)\,;\ N_- \leq \sup\{N(1\,,\,\epsilon)|\epsilon > 0\}.$$

В силу леммы Глазмана $N(a\,,\,\epsilon)$ -неубывающая функция a.

Положим

$$a_j = \sup\{a|N(a\,,\,\epsilon) < j\}. \tag{D.1}$$

Если

$$N(a_j + 0\,,\,\epsilon) - N(a_j - 0\,,\,\epsilon) = m > 1,$$

мы полагаем $a_j = a_{j+1} = \ldots a_{j+m-1}$.

Множество $\{a|N(a\,,\,\epsilon) < j\}$ открыто (теорема о непрерывной зависимости размерности спектального проектора от параметра) и $a = a_j = a_{j+1} = \ldots a_{j+m-1}$ в том и только в том случае, если уравнение

$$a_j \int \frac{\exp(-\epsilon|x-y|)V_-(y)}{4\pi|x-y|}\psi(y)dy = \psi(x) \tag{D.2}$$

имеет $m \geq 1$ линейно независимых решений. Но тогда уравнение

$$a_j \int \frac{|V_-(x)|^{1/2} \exp(-\epsilon|x-y|)|V_-(y)|^{1/2}}{4\pi|x-y|} |V_-(y)|^{1/2}\psi(y)dy = -|V_-(x)|^{1/2}\psi(x) \tag{D.3}$$

имеет m линейно независимых решений (но не наоборот!). Обозначим через J интегральный оператор в левой части (D.3). Оператор J^*J неотрицателен и ядерный. Каждое нетривиальное решение уравнения (D.3) есть нетривиальное решение уравнения

$$J^*J\psi = a_j^{-2}\psi, \tag{D.4}$$

и

$$N_- \leq \lim_{\epsilon\to 0} N(1\,,\,\epsilon) \leq \sum_{a_j\leq 1} a_j^{-2} \leq tr(J^*J) \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int \frac{V_-(x)V_-(y)}{|x-y|^2} dxdy. \tag{D.5}$$

Неравенство

$$N_- \leq \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int \frac{V_-(x)V_-(y)}{|x-y|^2} dxdy \tag{D.6}$$

называется оценкой Бирмана-Швингера.

Приложение E

Связь между амплитудой рассеяния и матрицей рассеяния. Оптическая теорема.

Амплитуда рассеяния и матрица рассеяния.

$$w(\lambda) = R(\lambda\,,\,A)Ve_d^0(\lambda). \tag{E.1}$$

$$T(\lambda)e_d^0(\lambda) = (\lambda - A_0)w(\lambda). \tag{E.2}$$
$$T(\lambda)e_d^0(\lambda) = V(e_d^0(\lambda) + w(\lambda)). \tag{E.3}$$

Напомним,что

$$k(r\,,\,\lambda) = \frac{\exp(ir\sqrt{\lambda})}{4\pi r}\,,\, 0 \leq \arg\sqrt{\lambda} \leq \pi\,,\, r > 0. \tag{E.4}$$

Лемма E.0.8. *Если потенциал $V(x)$ при $|x| \to \infty$ убывает достаточно быстро и функция w есть ограниченное решение интегрального уравнения*

$$w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2 \mid x\,,\,\lambda\,,\,\omega) =$$
$$\int k(|x-y|\,,\,\lambda(\pm)_2 i0)V(y)\left(\exp((\pm)_1 i(y\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}) + w(\cdot \mid y\,,\,\lambda\,,\,\omega)\right)dy, \tag{E.5}$$

то для функции w справедливо асимптотическое представление

$$w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2 \mid r\omega\,,\,\lambda\,,\,\omega_2) = \frac{\exp((\pm)_2 ir\sqrt{\lambda})}{r}\times$$

$$\int \exp((\mp)_2 i(\omega\,,\,y))V(y)\left(\exp((\pm)_1 i(y\,,\,\omega_2)\sqrt{\lambda}) + w(\cdot\ \mid\ y\,,\,\lambda\,,\,\omega_2)\right)dy + O(1/r^2),$$

которое можно дифференцировать.

Доказательство. Имеем:

$$|\omega\cdot r - y| = r(1 - 2(\omega\,,\,y)/r + (y/r)^2)^{1/2} =$$
$$r - (\omega\,,\,y) + O(1/r).$$

Очевидно,эту асимптотику можно дифференцировать. Подставим в (E.5). Получим:

$$w((\pm)_1\,,\,(\pm)_2\ \mid\ r\omega\,,\,\lambda\,,\,\omega_2) = \frac{\exp((\pm)_2 ir\sqrt{\lambda})}{r}\times a(\lambda\,,\,\omega\,,\,\omega_2) + O(1/r^2),$$
$$a(\lambda\,,\,\omega\,,\,\omega_2) =$$
$$\int \exp((\mp)_2 i(\omega\,,\,y))V(y)\left(\exp((\pm)_1 i(y\,,\,\omega_2)\sqrt{\lambda}) + w(\cdot\ \mid\ y\,,\,\lambda\,,\,\omega_2)\right)dy \tag{E.6}$$

Функция $a(\lambda\,,\,\omega\,,\,\omega_2)$ называется амплитудой рассеяния .

Очевидно, что если ω_2 -направление фронта падающей плоской волны, то $|a(\lambda\,,\,\omega\,,\,\omega_2)|$ -интенсивность волны, рассеянной в направлении ω. Лемма доказана.

Вычисление амплитуды рассеяния через матрицу рассеяния. Выразим амплитуду рассеяния через интегральное ядро матрицы рассеяния:

$$t(\lambda + i0\,,\ \ ,\omega_1\,,\,\omega_2) = U_d^0((\lambda)T(\lambda + i0)U_d^0(\lambda)^{-1}(\omega_2)).$$

Имеем:

$$U_d^0(\lambda)^{-1}(\omega_2)(f) = c(\lambda)\int \exp(i(\omega_2\,,\,y)\sqrt{\lambda})f(y)dy,$$
$$T(\lambda + i0)U_d^0(\lambda)^{-1}(\omega_2) = c(\lambda)(T(\lambda + i0)\exp(i(\omega_2\,,\,y)\sqrt{\lambda})),$$

Но

$$T(\lambda + i0)\exp(i(\omega_2\,,\,y)\sqrt{\lambda})(y) = V(y)(\exp(i(\omega_2\,,\,y)\sqrt{\lambda}) + w(+\,,\,+\ \mid \cdots)),$$

поэтому

$$t(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) = \tag{E.7}$$
$$c^2(\lambda)\int (\exp(-i(\omega_1\,,\,y)\sqrt{\lambda})V(y)(\exp(i(\omega_2\,,\,y)\sqrt{\lambda}) + w(+\,,\,+\ \mid \cdots))dy = \tag{E.8}$$
$$c^2(\lambda)a(\lambda\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2). \tag{E.9}$$

Заметим, что по из вычислений вычислений в параграфе 3.4 следует два важных результата.

Теорема E.0.7. *1. Матрица рассеяния в формуле* (3.51) *для операторов* A, A_0, $J = \mathsf{id}$ *и коэффициент* a *в формуле* (4.11)*связаны равенством:*

$$S(A\,,\,A_0\,,\,\mathsf{id})\psi(\lambda\,,\,\omega) = \psi(\lambda\,,\,\omega) - 2\pi i c(\lambda)^2 \int a(\lambda\,,\,\omega\,,\,\omega')\psi(\lambda\,,\,\omega')d\omega', \tag{E.10}$$

где коэффициент $c(\lambda)$ *дается формулой* (2.45).

2. Матрица рассеяния и решение уравнения Липмана-Швингера (см. лемму 4.2.6) связаны равенством:

$$S(A\,,\,A_0\,,\,\mathsf{id})\psi(\lambda\,,\,\omega) = \psi(\lambda\,,\,\omega) - 2\pi i \int t(\lambda + i0\,,\,\omega\,,\,\omega')\psi(\lambda\,,\,\omega')d\omega', \tag{E.11}$$

где

$$t(\lambda + i0\,,\,\omega\,,\,\omega') = \int e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)V(x)(e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,-\omega') + w(+\,,\,+\mid x,\,,\,\lambda\,,\,\omega'))dx, \tag{E.12}$$

$$e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = c(\lambda)\exp(-i(x\,,\,\omega)\sqrt{\lambda}). \tag{E.13}$$

В формуле (E.11) предполагается, что решения уравнения Липмана-Швингера нормированы на δ-функцию.

Доказательство. По формулам (3.50) (3.51) и (4.64) имеем:

$$U_d^0(T(\lambda)e_d^0(\lambda\,,\,-\omega')) =$$
$$\int e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)V(x)(e_d^0(x\,,\,\lambda\,,\,-\omega') + w(+\,,\,+\mid x\,,\,\lambda\,,\,\omega'))dx.$$

Далее учитываем нормировку и формулу (4.12).

Следует отметить, что матричные элементы оператора рассеяния (матрица рассеяния) *зависят* от выбора используемого для их вычисления базиса.

Оптическая теорема. Из унитарности оператора рассеяния (3.12) следуют важные соотношения для коэффициента $t(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2)$ в (E.11). Имеем:

$$S^*S = \mathsf{id}$$
$$(\mathsf{id} + 2\pi i t^*)(\mathsf{id} - 2\pi i t) = \mathsf{id},$$
$$t(\lambda + i0\,,\,\omega_2\,,\,\omega_1)^* - t(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega_2) = 2\pi i \int\limits_{\Omega} t(\lambda + i0\,,\,\omega_2\,,\,\omega)^* t(\lambda + i0\,,\,\omega_1\,,\,\omega)d\omega.$$

Полагая $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и обозначая переменную интегрирования через ω_1, получим:

$$-Im\, t(\omega\,,\,\omega) = \pi \int_\Omega |t(\omega\,,\,\omega_1)|^2 d\omega_1. \tag{E.14}$$

Стоящая в правой части равенства (E.14) величина пропорциональна полному сечению рассеяния в направлении ω. Равенство (E.14) называется оптической теоремой.Напомним, что в равенстве (E.14) величины подсчитаны через нормированные на δ-функцию собственные функции.

Приложение F

Дополнительные сведения о уравнении Шредингера

Матрица рассеяния для уравнения Шредингера на оси Напомним, что (стр. 75) функция

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\;\omega)\in C_b^2(\mathbb{R}^1)\,,\;\lambda>0\,,\;\omega=\pm1$$

называется решением стационарной задачи рассеяния для уравнения Шредингера, если она есть решение уравнения

$$\forall(x\in\mathbb{R}^1)\;:\;-\frac{d^2e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{dx^2}+V(x)e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)=\lambda e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,,\;\lambda>0\,,\tag{F.1}$$

и представима как

$$e_d(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)=\exp(-ix\omega\sqrt{\lambda})+w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\,,\;\omega=\pm1,\tag{F.2}$$

где функция $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)$ удовлетворяет условиям излучения для одномерного случая:

$$\frac{dw(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{dx}=\pm i\sqrt{\lambda}w_+(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)+o(1)\,,\;x\to\pm\infty.\tag{F.3}$$

Функция w зависит от принимающего два значения: $\omega=\pm1$ параметра ω через условие (F.2).

Функция u_+ есть решение задачи рассеяния в том и только том случае, если функция w_+ в (F.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$w_+(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)}{2i\sqrt{\lambda}}V(y)\Big(\exp(-iy\omega\sqrt{\lambda})+w_+(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)\Big)dy.\tag{F.4}$$

Из (F.2) и (F.4) следует, что

$$u_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)=\exp(-ix\sqrt{\lambda})+R(-\,,\,+)\exp(ix\sqrt{\lambda})+o(1)\,,\;x\to+\infty, \tag{F.5}$$

$$u_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)=T(-\,,\,-)\exp(-ix\sqrt{\lambda})+o(1)\,,\;x\to-\infty, \tag{F.6}$$

$$u_+(x\,,\,\lambda\,,\,-1)=T(+\,,\,+)\exp(ix\sqrt{\lambda})+o(1)\,,\;x\to+\infty, \tag{F.7}$$

$$u_+(x\,,\,\lambda\,,\,-1)=\exp(ix\sqrt{\lambda})+R(+\,,\,-)\exp(-ix\sqrt{\lambda})+o(1)\,,\;x\to-\infty. \tag{F.8}$$

Учитывая, что

$$|x-y|=\begin{cases}x-y\,,\;x\to+\infty,\\-x+y\,,\;x\to-\infty.\end{cases} \tag{F.9}$$

мы получаем из (F.5) и (F.6)

$$2i\sqrt{\lambda}R(-\,,\,+)=\int\exp(-i\sqrt{\lambda}(x\,,\,y))V(y)u_+(y\,,\,\lambda\,,\,+1)dy, \tag{F.10}$$

$$2i\sqrt{\lambda}(T(-\,,\,-)-1)=\int\exp(+i\sqrt{\lambda}(x\,,\,y))V(y)u_+(y\,,\,\lambda\,,\,+1)dy, \tag{F.11}$$

$$2i\sqrt{\lambda}R(+\,,\,-)=\int\exp(-i\sqrt{\lambda}(x\,,\,y))V(y)u_+(y\,,\,\lambda\,,\,-1)dy, \tag{F.12}$$

$$2i\sqrt{\lambda}(T(+\,,\,+1)-1)=\int\exp(+i\sqrt{\lambda}(x\,,\,y))V(y)u_+(y\,,\,\lambda\,,\,-1)dy. \tag{F.13}$$

Матрица коэффициетов $R(\pm\,,\,\mp)$ и $T(\pm\,,\,\pm)$ называется стационарной матрицей рассеяния.

Вычислим определитель Вронского решений $u_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)\,,\;u_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)^*$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. Так как определитель Вронского от x не зависит, получим:

$$\Big|R(-\,,\,+)\Big|^2+\Big|T(-\,,\,-)\Big|^2=1. \tag{F.14}$$

Аналогично,

$$\Big|R(+\,,\,-)\Big|^2+\Big|T(+\,,\,+)\Big|^2=1. \tag{F.15}$$

Найдем связь между стационарной матрицей рассеяния и оператором рассеяния, определенным формулой (3.12). Воспользуемся формулой (3.48). Напомним (см. (2.1.7)) что диагонализующее преобразование для оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ есть преобразование

$$U_d^0\;:L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\mapsto L^2([0\,,\,\infty)\mapsto\mathbb{C}^2\,,\,d\lambda)$$

и дается формулой

$$U_d^0\ : f(x) \mapsto \int e(x\,,\,\lambda\,,\,\kappa) f(x)dx \equiv U_d^0(f)(\lambda\,,\,\kappa)\,,\,\kappa \in \{1\,,\,-1\}. \tag{F.16}$$

Определим двухкомпонентный вектор

$$e(x\,,\,\lambda) = c(\lambda)\begin{pmatrix}\exp(-i\sqrt{\lambda}x)\\ \exp(+\sqrt{\lambda}x)\end{pmatrix}.$$

Тогда формулу (F.16) можно записать так:

$$U_d^0(f)(\lambda) = \int e(x\,,\,\lambda) f(x)dx = c(\lambda)\begin{pmatrix}\widehat{f}(\sqrt{\lambda})\\ \widehat{f}(-\sqrt{\lambda})\end{pmatrix},$$

где

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ix\lambda) f(x)dx.$$

Обратное преобразование $(U_d^0)^{-1}$ можно вычислить по формуле (2.53). Определим операторы

$$U^{-1}(\lambda):\ U^{-1}(\lambda)(U_d^0 f)(x\,,\,\lambda) = \int e^*(x\,,\,\lambda\,,\,\kappa)(U_d^0 f)(x\,,\,\lambda\,,\,\kappa)d\kappa.$$

Согласно формуле (3.48)

$$S(\lambda)\begin{pmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{pmatrix} - 2\pi i U^0(\lambda)T(\lambda)U^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix}\phi_1(\lambda)\\ \phi_2(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Учтем (4.64)и вычисляем:

$$U^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = c(\lambda)(\exp(+i\sqrt{\lambda}x)\phi_1 + \exp(-i\sqrt{\lambda}x)\phi_2), \tag{F.17}$$

$$T(\lambda)U^{-1}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = V(x)(e_+(x\,,\,\lambda\,,\,-1)\phi_1 + e_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)\phi_2), \tag{F.18}$$

$$U_d^0 T(\lambda)U^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \tag{F.19}$$

$$\begin{pmatrix}\int(e^0(x\,,\,\lambda\,,\,+1)V(x)(e_+(x\,,\,\lambda\,,\,-1)\phi_1 + e_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)\phi_2))dx\\ \int(e^0(x\,,\,\lambda\,,\,-1)V(x)(e_+(x\,,\,\lambda\,,\,-1)\phi_1 + e_+(x\,,\,\lambda\,,\,+1)\phi_2)dx)\end{pmatrix} \tag{F.20}$$

Матичные элементы потенциала вычислены в (F.10)-(F.13).

Замечания о численном решении задачи рассеяния Предположим, что

$$suppV(x) \subset [-l\,,\,l].$$

Тогда в области $|x| > l$ асимптотические равенства (F.5)-(F.8) превращаются в точные. Положим

$$u(x) = T\exp(-il\sqrt{\lambda})z(x).$$

Задача рассеяния сводится к задаче Коши:

$$-\frac{d^2z(x)}{dx^2} + V(x)z(x) = \lambda z(x)\,,\ \lambda > 0\,,\ -l < x < l, \tag{F.21}$$

$$z(-l) = 1, \tag{F.22}$$

$$z'(-l) = -i\sqrt{\lambda} \tag{F.23}$$

и системе линейных уравнений

$$T\exp(-il\sqrt{\lambda})z(l) = \exp(-il\sqrt{\lambda}) + R\exp(+il\sqrt{\lambda}), \tag{F.24}$$

$$T\exp(-il\sqrt{\lambda})z'(l) = i\sqrt{\lambda}(-\exp(-il\sqrt{\lambda}) + R\exp(+il\sqrt{\lambda})). \tag{F.25}$$

В системе (F.22)-(F.5) коэффициенты $z(l)$ и $z'(l)$ считаются как решение задачи Коши (F.21)-(F.23). Проблем с вычислением $z(l)$ и $z'(l)$, как правило, не возникает, но иногда удобно сделать замену

$$z(x) = u'(x)/u(x). \tag{F.26}$$

Для функции z мы получаем задачу Коши для уравнения Риккати

$$z'(x) = -z^2(x) + V(x) - \lambda\,,\ z(-l) = -i\sqrt{\lambda}, \tag{F.27}$$

а для коэффициента R уравнение

$$z(l) = \frac{i\sqrt{\lambda}(-\exp(-il\sqrt{\lambda}) + R\exp(+il\sqrt{\lambda}))}{\exp(-il\sqrt{\lambda}) + R\exp(+il\sqrt{\lambda})}.$$

Метод переменной фазы для уравнения Шредингера на оси. Если

$$\int_{x:V(x)>\lambda} \sqrt{V(x)-\lambda}dx \gg 1,$$

то уравнения (F.21) и (F.27) могут стать “жесткими”, и опыт показывает, что в этом случае удобно перейти к уравнению метода “переменной фазы"(терминология здесь не устоялась и мы пользуемся жаргонными терминами).

Выведем уравнение метода переменной фазы для уравнения Шредингера на оси (мы следуем [21]). Пусть $u_j(x)\,,\, j = 1\,,2$ решения u_+ задач (F.21)-(F.23) при $V(x) = V_j(x)\,,\, R_j$-соответствующие коэффициенты отражения. Рассмотрим определитель Вронского решений задачи рассеяния (F.1) с потенциалами $V_1(x)$ и $V_2(x)$:

$$W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x).$$

Дифференцируя этот определитель и используя уравнение для u_+ при вычислении вторых производных, найдем:

$$W'(x) = u_1(x)u_2(x)\big(V_2(x) - V_1(x)\big). \tag{F.28}$$

Проинтегрируем (F.28) от $-\infty$ до $+\infty$ и используем для вычисления W асимптотику u_j (см. (F.5)-(F.8)). Обозначим через R_j коэффициент R, соответствующий потенциалу V_j. Получим:

$$2i\sqrt{\lambda}\big(R_2 - R_1\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(x)u_2(x)\big(V_2(x) - V_1(x)\big)dx. \tag{F.29}$$

Если $V(x) \equiv V(x\,,\,\xi)$, то отсюда получаем:

$$2i\sqrt{\lambda}\frac{dR(\xi)}{d\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x\,,\,\xi)^2\frac{dV(x\,,\,\xi)}{d\xi}dx. \tag{F.30}$$

Положим в равенстве (F.30)

$$V(x\,,\,\xi) = V(x)\theta(\xi - x). \tag{F.31}$$

Тогда функция $R(\xi)$ будет равна коэффициенту отражения для потенциала, который равен $V(x)$ при $x < \xi$ и равен нулю при $x > \xi$. В силу непрерывности по ξ функции $R(\xi)$ из (F.30) получаем:

$$2i\sqrt{\lambda}\frac{dR(\xi)}{d\xi} = V(\xi)\Big(\exp(-i\xi\sqrt{\lambda}) + R(\xi)\exp(i\xi\sqrt{\lambda})\Big)^2, \tag{F.32}$$

$$R(-l) = 0 \tag{F.33}$$

$$R(l) = R. \tag{F.34}$$

Пусть $R(\xi\,,\,z)$-то решение уравнения (F.32), которое в точке $\xi = -l$ равно $z\,:\quad R(-l\,,\,z) = z$. Так как функция $R(\xi\,,\,z)$ аналитична по z, то по теореме о среднем

$$R \equiv R(l\,,\,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(l\,,\,\exp(i\theta))d\theta. \tag{F.35}$$

В уравнении (F.32) сделаем замену

$$R(\xi) = \exp(2i\phi(\xi) + i\pi). \tag{F.36}$$

Уравнение (F.32) с начальными данными $R(-l) = \exp(i\theta)$ перейдет в задачу Коши:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = -\frac{V(\xi)}{\sqrt{\lambda}}(\sin(\xi\sqrt{\lambda} + \phi))^2 \,,\ \phi(-l\,,\,\theta) = (\pi + \theta)/2\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{F.37}$$

а (F.35) даст:

$$R = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2i\phi(l\,,\,\theta))d\theta. \tag{F.38}$$

Заметим, что уравнение (F.37) действительно. Поскольку $|R(-l)| = 0 < 1$, начальные данные для уравнения (F.37) комплексны. В [21] предложено для вычисления $R(l) = R$ использовать двойное отношение, которому удовлетворяют решения уравнения (F.35). Вычисления показывают,что функция $\theta \mapsto R((l\,,\,\exp(i\theta))$ может сильно осциллировать, что может привести к большой погрешности метода, основанного на использовании двойного отношения.

Рассеяние на центрально-симметричном потенциале Быстро убывающий потенциал $V(x)$ мы будем называть центрально-симметричным, если

$$\exists v(r)\ :\ V(x) = v(|x|).$$

Направим ось полярной системы координат перпендикулярно фронту падающей волны. В этом случае решение задачи рассеяния не будет зависеть от угла ϕ, и фазовое пространство рассматриваемой нами квантовомеханической системы есть

$$\mathcal{H} = \oplus\sum_l L_l^2([0\,,\,\infty)\,,\,r^2dr)\otimes P_l(\cos\theta),$$

т.е. множество функций вида

$$f(r\,,\,\theta) = \sum_l f_l(r)\left(\frac{2l+1}{2}\right)^{1/2} P_l(\cos\theta),$$

$$\|f|\mathcal{H}\|^2 = \sum_l \|f_l\|^2 < \infty\ ,\ \|f_l\|^2 = \int\limits_0^\infty |f_l(r)|r^2dr.$$

(Физики обычно разлагают по функциям $(2l+1)P_l(\cos(\theta))$). Очевидно вложение

$$\mathcal{H} \mapsto L^2(\mathbb{R}^3\,,\, dx)\,,\; f(r\,,\,\theta) \mapsto f(r\,,\,\theta\,,\,\phi) \equiv f(r\,,\,\theta)\,,\; \|f|L^2(\mathbb{R}^3)\|^2 = 2\pi\|f|\mathcal{H}\|^2.$$

Гамильтониан h рассматриваемой нами системы есть сужение гамильтониана $-\Delta + V$ на $\mathcal{H}$:

$$h = \oplus \sum_l h_l\;,\; h_l u = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}u\right)\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}u + v(r)u. \tag{F.39}$$

Оператор h_l самосопряжен в $L^2([0\,,\,\infty)\,,\, r^2dr)$.

Возможен иной подход к построению самосопряженного расширения оператора h: расширения операторов h_l для каждого l строятся независимо, а оператор h объявляется прямой суммой слагаемых $h_l \cdot P_l(\cos\theta)$..

Положим

$$h_l^0 = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}u\right)\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}u,$$
$$u = r^{-1/2}Z(r\sqrt{\lambda}),$$

и вычислим

$$w = (\lambda - h_l^0)u.$$

Имеем:

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{2}r^{-3/2}Z + r^{-1/2}\sqrt{\lambda}\frac{dZ}{dr};$$
$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{3}{4}r^{-5/2}Z - r^{-3/2}\sqrt{\lambda}\frac{dZ}{dr} + r^{-1/2}\lambda\frac{d^2Z}{dr^2};$$
$$(\lambda - h_l^0)u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}u + \lambda u =$$
$$r^{-5/2}\left(\xi^2\frac{d^2Z(\xi)}{d\xi^2} + \xi\frac{dZ(\xi)}{d\xi} + (\xi^2 - (l+1/2)^2)Z(\xi)\right)\Big|_{\xi = r\sqrt{\lambda}}.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения

$$(\lambda - h_l^0)u = 0 \tag{F.40}$$

есть

$$u(r\,,\,\lambda) = r^{-1/2}Z_{(l+1/2)}(r\sqrt{\lambda}), \tag{F.41}$$

где $Z_{(\nu)}$ -цилиндрическая функция порядка ν.

Другой часто используемый прием состоит в следующем.

Положим в (F.40)

$$u = y_l/r.$$

Тогда для новой неизвестной функции y_l получаем уравнение

$$\frac{d^2y_l}{dr^2} + (\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2})y_l = 0. \tag{F.42}$$

Уравнение (F.42) называется *радиальным* уравнением. Общее решение этого уравнения есть

$$y_l = r^{1/2} Z_{(l+1/2)}(r\sqrt{\lambda}),$$

где $Z_{(l+1/2)}$ -цилиндрическая функция.

Имея фундаментальную систему решений обыкновенного дифференциального уравнения (F.40), легко построить его функцию Грина и вычислить спектральную функцию и диагонализующее преобразование для h_l^0.

Мы воспользуемся известным результатом ([46], 8.6-13). Он легко получается, если рассмотреть прямое и обратное преобразование Фурье функции, зависящей только от $|x|$.

Теорема F.0.8. *Преобразование*

$$\widehat{J}_{(l+1/2)}(f)(\xi) = \int\limits_0^\infty J_{(l+1/2)}(r\xi)(r\xi)^{-1/2} f(r) r^2 dr \tag{F.43}$$

есть преобразование $L^2([0\,,\,\infty)\,,\,r^2dr) \mapsto L^2([0\,,\,\infty)\,,\,\xi^2 d\xi)$,

и обратое преобразование дается формулой:

$$f(r) = \int\limits_0^\infty J_{(l+1/2)}(r\xi)(r\xi)^{-1/2} \widehat{J}_{(l+1/2)}(f)(\xi)\xi^2 d\xi\ . \tag{F.44}$$

Из формулы обращения (F.44) вытекает

Следствие F.0.3. *Преобразование* (F.43) *унитарно:*

$$\|f|L^2([0\,,\,\infty)\,,\,r^2dr)\| = \|\widehat{J}_{(l+1/2)}(f)(\xi)|L^2([0\,,\,\infty)\,,\,\xi^2 d\xi)\|. \tag{F.45}$$

Из (F.41) и (F.43) вытекает

Следствие F.0.4. *1. Преобразование*

$$U^0_{d,r}(f)(\lambda) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2} \widehat{J}_{(l+1/2)}(f)(\sqrt{\lambda})$$

есть унитарное преобразование

$$L^2([0\,,\,\infty)\,,\,r^2dr) \mapsto L^2([0\,,\,\infty)\,,\,d\lambda),$$

которое диагонализует оператор h^0_l.

2. В диагональном представлении оператора h^0_l *матрица рассеяния* $S(h_l\,,\,h^0_l)$ *есть оператор умножения на число*

$$S(h_l\,,\,h^0_l)(\lambda)\psi(r) = \exp(2i\delta_l(\lambda))\psi(r),\ \delta_l(\lambda) \in \mathbb{R}^1 \mod \pi. \tag{F.46}$$

Равенство (F.46) может служить определением фазы $\delta_l(\lambda)$. Эта функция от λ называется *фазой рассеяния*. Фаза рассеяния связана с *парциальной амплитудой рассеяния* $f_l(\sqrt{\lambda})$ формулой

$$f_l(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp(i\delta(\sqrt{\lambda}) \sin\delta(\sqrt{\lambda}).$$

Амплитуда рассеяния для операторов $h_l\,,\,h^0_l$ выражается через парциальные амплитуды по формуле

$$f(\sqrt{\lambda}\,,\,\cos\theta) = \sum_l (2l+1) f_l(\sqrt{\lambda}) P_l(\cos\theta).$$

Фазовая функция $\delta_l(r\,,\,\lambda)$ и *амплитудная функция*[48, 49] $\alpha_l(r\,,\,\lambda)$ по определению вводятся как новые неизвестные функции, связанные с решением радиального уравнения (F.42)соотношением:

$$y_l(r) = \alpha_l(r\,,\,\lambda)[\cos(\delta_l(r\,,\,\lambda) j_l(\sqrt{\lambda}r) - \sin(\delta_l(r\,,\,\lambda)) n_l(\sqrt{\lambda}r)], \tag{F.47}$$

$$\frac{dy_l(r)}{dr} = \sqrt{\lambda}[\cos(\delta_l(r\,,\,\lambda))\frac{dj_l(\sqrt{\lambda}r)}{dr} - \sin(\delta_l(r\,,\,\lambda))\frac{dn_l(\sqrt{\lambda}r)}{dr}] \tag{F.48}$$

Фазовая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\delta_l(r)}{dr} = -\frac{v(r)}{\sqrt{\lambda}} \sin(r\sqrt{\lambda} + \delta_l(r\,,\,\lambda))^2, \tag{F.49}$$

с начальными данными

$$\delta_l(0\,,\,\lambda) = 0. \tag{F.50}$$

Фазовая функция связана с фазой рассеяния соотношением:

$$\delta_l(\lambda) = \lim_{r\to\infty} \delta(r\,,\,\lambda). \tag{F.51}$$

Приложение G

Ядро оператора $(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda))$.

Положим по определению

$$\mathcal{E}' = \{\lambda \mid \mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) \neq 0.\} \qquad (G.1)$$

(Обознчение [3])

В следующих ниже рассуждениях мы докажем, что если

$$\mathcal{E}' \neq \emptyset, \qquad (G.2)$$

то множество $\mathcal{E}'$ состоит из не более, чем конечного конечного числа точек на отрицательной действительной оси. Для этого мы существенно используем явные формулы для резольвент операторов A и A_0.

Теорема G.0.9. *Множество $\mathcal{E}'$ совпадает с точеным спектром оператора A и при рассматриваемых ограничениях на потенциал есть конечное (быть может, пустое) множество точек на отрицательной действительной оси.*

Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма G.0.9. *Если выполнено равенство*

$$\mu\psi = \Gamma_+(\lambda)(\psi)\,,\ \psi \in \mathcal{H}_b^-\,,\ Im\,\lambda \geq 0\,,\ |\lambda - \lambda_\infty| < \delta, \qquad (G.3)$$

то

$$\forall (Im\,\lambda = 0\,,\ |\lambda - \lambda_\infty| < \delta) :< \psi^* \mid V\psi > Im\,\mu = -\pi \|U_d(V\psi)(\lambda)\|_\Omega^2 \quad (G.4)$$

Доказательство. Умножим (G.3) на $V\psi^*$, проинтегрируем и вычтем комплексно-сопряженное выражение. Учтем условие 6 и получим:

$$
\begin{aligned}
&< \psi^* \mid V\psi > 2Im\, \mu = \\
&< V\psi^* \mid R(\lambda + i0\,,\, A_0)V\psi > - < V\psi^* \mid R(\lambda + i0\,,\, A_0)V\psi >^* = \\
&< V\psi^* \mid R(\lambda + i0\,,\, A_0)V\psi > - < V\psi \mid R(\lambda - i0\,,\, A_0)V\psi^* > .
\end{aligned}
$$

Учтем симметрию оператора $R(\lambda - i0\,,\, A_0)$ относительно формы $< \mid >$, формулу Сохоцкого и получим:

$$
\begin{aligned}
&< \psi^* \mid V\psi > 2Im\, \mu = \lim_{\epsilon \to 0} < V\psi^* \mid\mid [R(\lambda + i\epsilon\,,\, A_0) - R(\lambda - i\epsilon\,,\, A_0)]V\psi >= \\
&-2\pi \| U_d(V\psi)(\lambda) \|^2_\Omega .
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Лемма G.0.10. *Если функция*

$$
\psi \in \mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)), \tag{G.5}
$$

то

$$
Im\, \lambda = 0\,,\, (-\Delta + V(x))\psi = \lambda\psi\,,\ \psi \in L^2(\mathbb{R}^3). \tag{G.6}
$$

Доказательство. Если функция ψ удовлетворяет условию (G.5), то

$$
\psi(x) = \int \frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)}{4\pi|x-y|} V(y)\psi(y)dy.
$$

Дифференцируя этот интеграл по x, получаем:

$$
-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x).
$$

Если $Im\,\sqrt{\lambda} > 0$, то из интегрального представления следует, что $\psi \in L^2$, поэтому $\psi \equiv 0$ при $Im\,\lambda \neq 0$. Следовательно, если $\mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) \neq 0$, то $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Ясно, что

$$
\forall(\lambda < 0)\ : \mathbf{Ker}(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda)) \subset L^2.
$$

Пусть $\lambda > 0$. Вычисляя асимптотику интеграла при $|x| \to \infty$, получаем:

$$
\psi(x) = \frac{\exp(i|x|\sqrt{\lambda})}{4\pi|x|} \int \exp(-i(\omega, y)\sqrt{\lambda})V(y)\psi(y)dy + O(1/|x|^2)\,,\, \omega = x/|x|. \tag{G.7}
$$

Функция

$$\omega \to \beta(\omega) = \int \exp(-i(\omega, y)\sqrt{\lambda})V(y)\psi(y)dy$$

непрерывна, и в силу леммы G.0.9

$$\int |\beta(\omega)|^2 d\omega = 0.$$

Поэтому

$$\beta(\omega) \equiv 0.$$

Из (G.7) следует, что $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Лемма доказана.

Из леммы G.5 следует, что $\mathcal{E}' = \sigma_{pp}(A)$. Так как оператор $\Gamma_+(\lambda)$ компактен и аналитичен по λ, то точки множества $\mathcal{E}'$ -изолированные особые точки оператора $(\mathsf{id} - \Gamma_+(\lambda))^{-1}$. Следовательно, множество $\sigma_{pp}(A)$. не имеет отличных от 0 точек накопления. Более подробные сведения о сингулярном спектре оператора A можно получить в [37],п. 4 и [4], п.13.6. При $\lambda < 0$ (быть может, пустое) множество $\sigma_{pp}(A)$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. По теореме Л.Хермандера ([9], 14.7, см. также теоремы 13.57 и 13.58 из [4]), при наших ограничениях на потенциал у оператора A при $\lambda > 0$ нет собственных значений. В силу оценки Бирмана-Швингера (см. (D.6)) на отрицательной действительной оси у оператора A может быть только конечное (с учетом кратности) число собственных значений. Теорема G.0.9 доказана.

Приложение H

Условия излучения

Лемма H.0.11. *Если функция* $w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \in C_b(\mathbb{R}^3)$ *удовлетворяет условиям излучения* (4.5), *то равномерно по* x *на компактах*

$$\epsilon R(\lambda + i\epsilon\,,\,-\Delta) \cdot w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) \to 0\,,\ \epsilon \to 0. \tag{H.1}$$

Доказательство. Пусть

$$I(x\,,\,\epsilon) = \int k(|x-y|\,,\,\lambda + i\epsilon) w(y\,,\,\lambda\,,\,\omega) dy.$$

Тогда

$$\epsilon I(x) = \epsilon \int_0^\infty k(r\,,\,\lambda + i\epsilon) \Lambda w_+(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega) r^2 dr =$$

$$\epsilon \int_0^R \ldots + \epsilon \int_R^\infty \ldots = \epsilon I_1(x\,,\,\epsilon) + \epsilon I_2(x\,,\,\epsilon).$$

В силу первой оценки в условиях излучения справедлива оценка:

$$|\epsilon I_1(x\,,\,\epsilon)| = O(\epsilon R).$$

Далее учитываем, что в силу условий излучения

$$\Lambda w(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = -i \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \Lambda w(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{\partial r} + o(1), \tag{H.2}$$

получаем:

$$4\pi\epsilon I_2(x\,,\,\epsilon) =$$

$$-\frac{i\epsilon}{\sqrt{\lambda}} \int_R^\infty r \exp(ir\sqrt{\lambda + i\epsilon}) \partial_r \Lambda w_+(r\,,\,x) r dr + \epsilon \int_R^\infty o(1/r) r \exp(ir\sqrt{\lambda + i\epsilon}) dr.$$

Очевидно, что

$$\epsilon\int_R^\infty o(1/r)r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon})dr = o(1)\,,\; R\to\infty.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$-\frac{i\epsilon}{\sqrt{\lambda}}\int_R^\infty r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon})\partial_r\Lambda w_+(r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega)dr =$$
$$\frac{i\epsilon}{\sqrt{\lambda}}\int_R^\infty(\partial_r r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon}))\Lambda w((r\,,\,x\,,\,\lambda\,,\,\omega)dr + O(\epsilon).$$

Поэтому

$$\epsilon I(x\,,\,\epsilon) =$$
$$\frac{\epsilon}{8\pi}\int_R^\infty\left(r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon}) + \frac{i}{\sqrt{\lambda}}\partial_r(r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon}))\right)dr +$$
$$O(\epsilon R) + O(\epsilon) + o(1)\,,\; R\to\infty\,,\;\epsilon\to 0.$$

Но равномерно по $r > R$:

$$\left|r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon}) + \frac{i}{\sqrt{\lambda}}\partial_r(r\exp(ir\sqrt{\lambda+i\epsilon}))\right| < O(\epsilon)r\exp(-\epsilon r/2).$$

Подставляя эту оценку в предыдущую, получаем:

$$\epsilon I(x\,,\,\epsilon) = O(\epsilon) + O(\epsilon R) + O(\epsilon) + o(1)\,,\; R\to\infty\,,\;\epsilon\to 0.$$

Положим

$$R = 1/\sqrt{\epsilon}.$$

Получим, что равномерно по x на компактах:

$$\epsilon I(x\,,\,\epsilon) = o(1)\,,\;\epsilon\to 0.$$

Лемма доказана.

Лемма H.0.12. *Если функция w удовлетворяет условиям излучения* (4.16)*, то равномерно по x на компактах*

$$\epsilon R\Big(\sqrt{\lambda+i\epsilon}\,,\,-\frac{d^2}{d^2x}\Big)w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)\to 0\,,\;\epsilon\to 0. \tag{H.3}$$

Доказательство. Как известно, функция Грина оператора Шредингера на оси задается формулой

$$\forall (f \in L^2(\mathbb{R}^1)\,,\,\lambda \notin \mathbb{R}^1)\;:\; R\Big(\lambda\,,\,-\frac{d^2}{d^2x}\Big)f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Gr(x-y\,,\,\lambda)f(y)dy.$$

где

$$Gr(x-y\,,\,\lambda) = \frac{\exp(i\sqrt{\lambda}|x-y|)}{2i\sqrt{\lambda}}.$$

Имеем:

$$I(\epsilon) := (2i\sqrt{\lambda+i\epsilon})\epsilon R\Big(\sqrt{\lambda+i\epsilon}\,,\,-\frac{d^2}{d^2x}\Big)w(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \tag{H.4}$$

$$\begin{gathered}\epsilon\exp(ix\sqrt{\lambda+i\epsilon})\int_{-\infty}^{x}\exp(-iy\sqrt{\lambda+i\epsilon})w(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)dy+\\ \epsilon\exp(-ix\sqrt{\lambda+i\epsilon})\int_{x}^{\infty}\exp(iy\sqrt{\lambda+i\epsilon})w(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)dy=\\ \epsilon\exp(ix\sqrt{\lambda+i\epsilon})\int_{-\infty}^{x}\exp(-iy\sqrt{\lambda+i\epsilon})\Big(\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\frac{dw(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{dy}+o(1)\Big)dy+\\ \epsilon\exp(-ix\sqrt{\lambda+i\epsilon})\int_{x}^{\infty}\exp(iy\sqrt{\lambda+i\epsilon})\Big(\frac{-i}{\sqrt{\lambda}}\frac{dw(y\,,\,\lambda\,,\,\omega)}{dy}+o(1)\Big)dy.\end{gathered} \tag{H.5}$$

Интегрируем по частям. Получаем:

$$I(\epsilon) = -I(\epsilon) + o(1)\,,\,\epsilon \to 0. \tag{H.6}$$

Из (H.4) и (H.6) следует утверждение леммы.

Приложение I

Свойства оператора $(\exp(-\lambda\beta)\mathsf{id} - G_0(\beta))^{-1}$.

Лемма I.0.13. *Если* $\exp(-\lambda\beta) \notin [0\,,\,1]$, *то в* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *справедливо равенство*

$$(\exp(-\lambda\beta)\mathsf{id} - G_0(\beta))^{-1} = \exp(\lambda\beta)(\mathsf{id} + K(\lambda)), \tag{I.1}$$

где $K(\lambda)$ *-интегральный оператор с ядром*

$$K(\lambda\,,\,|x-y|) =$$
$$\int\limits_0^\infty \Big[\exp(-\beta\rho^2)(\exp(-\lambda\beta) - \exp(-\beta\rho^2)^{-1}|x-y|^{-(n/2-1)}\rho^{n/2}\Big] J_{n/2-1}(\rho|x-y|)d\rho. \tag{I.2}$$

Здесь $n = 1\,,\,3$ *-число измерений пространства.*

Доказательство. Оператор $G_0(\beta)$ на преобразование Фурье функции $f(x)$ -функцию $\widehat{f}(\xi)$ действует как оператор умножения на функцию $\exp(-\beta\xi^2)$. Отсюда следует,что оператор $(\exp(-\lambda\beta)\mathsf{id} - G_0(\beta))^{-1}$ на преобразование Фурье действует как оператор умножения на функцию

$$(\exp(-\lambda\beta) - \exp(-\beta\xi^2))^{-1} = \exp(\beta\lambda)\Big(1 + \frac{\exp(-\beta\xi^2)}{\exp(-\beta\lambda) - \exp(-\beta\xi^2)}\Big).$$

Лемма I.0.14. *При достаточно малых* δ, $Im\,\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\forall(\lambda_0 \in \mathbb{R}_+\,,\,\lambda_0 > \delta\,,\,|\lambda - \lambda_0| < \delta) : K(\lambda\,,\,r) = \tag{I.3}$$

$$\frac{i}{4\beta}\Big(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi r}\Big)^{n/2-1} H^{(1)}_{(n/2-1)}(r\sqrt{\lambda}) + A(r\,,\,\lambda), \tag{I.4}$$

где

$$A(r\,,\,\lambda) = O(r^{-n})\,,\, \partial_r A(r\,,\,\lambda) = O(r^{-n}). \tag{I.5}$$

Функция $A(r\,,\,\lambda)$ аналитична по λ как функция со значениями в $\mathcal{H}_b^-$ и оценка равномерна по λ.

Доказательство. Выберем ϕ так, чтобы внутри угла $|\arg\rho| < \phi$ лежал точно один полюс подынтегральной функции в (I.2). Воспользуемся известным равенством

$$J_{(n/2-1)} = \frac{1}{2}(H^{(1)}_{(n/2-1)} + H^{(2)}_{(n/2-1)}).$$

При $Im\,\lambda > 0$ получим:

$$K(\lambda\,,\,r) = \frac{i}{4\beta}\Big(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi r}\Big)^{n/2-1} H^{(1)}_{(n/2-1)}(r\sqrt{\lambda}) + A(\lambda\,,\,r); \tag{I.6}$$

где

$$2A(\lambda\,,\,r) = \int\limits_{C_+} [\ldots] H^{(1)}_{(n/2-1)}(\rho r) d\rho + \int\limits_{C_-} [\ldots] H^{(2)}_{(n/2-1)}(\rho r) d\rho; \tag{I.7}$$

$$C_\pm = \{\rho \mid \arg\rho = \pm\phi\}\,,\, H^{(i)}_{(n/2-1)} - \quad \text{функции Ханкеля.} \tag{I.8}$$

В дальнейшем мы рассмотрим только случай измерений пространства $n = 3$.

Напомним,что

$$H^{(1)}_{1/2}(z) = -i\exp(iz)\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,,\, H^{(2)}_{1/2}(z) = i\exp(-iz)\sqrt{\frac{2}{\pi z}}.$$

Имеем:

$$\Big|\int\limits_{C_+} [\ldots] H^{(1)}_{(1/2}(\rho r) d\rho\Big| \leq$$

$$Cr^{-1}\int\limits_0^\infty \exp(-\epsilon\rho r)\rho d\rho = O(r^{-3})\,,\, r \to \infty. \tag{I.9}$$

Производная функции $A(\lambda\,,\,r)$ и интеграл по C_- оцениваются аналогично.

Положим по определению

$$\phi(\lambda) = 1 - \exp(-\beta\lambda), \tag{I.10}$$

$$R_\phi(\lambda\,,\,r) = -\exp(\beta\lambda)\Big(1 + K(\lambda\,,\,r)\Big). \tag{I.11}$$

Определим оператор

$$R_\phi(\lambda) : R_\phi(\lambda)f(x) = \exp(\beta\lambda)\Big(f(x) + \int K(\lambda\,,\,|x-y|)f(y)dy\Big).$$

Лемма I.0.15. *Оператор*

$$R(\phi(\lambda)\mathsf{id}\,,\,\phi(-\Delta)) = R_\phi(\lambda) \in \mathcal{B}_{+,-},$$

рассматриваемый как аналитическая функция λ со значениями в пространстве $\mathcal{B}_{+,-}$ имеет аналитическое продолжение через положительную действительную ось из верхней ($Im\,\lambda > 0$) полуплоскости в нижнюю ($Im\,\lambda < 0$)и из нижней ($Im\,\lambda < 0$) полуплоскости в верхнюю ($Im\,\lambda > 0$).

Соответствующие продолжения мы будем обозначать символами $R_{\phi,\pm}(\lambda)$.Доказательство. Утверждение следует из (I.6) и (I.7). Из формулы (I.6) следует

Лемма I.0.16. *Если*

$$\Big(|f(x)| + |D_x f(x)|\Big) < C\exp(-d|x|)\,,\, d > 0, \tag{I.12}$$

то при каждом $\lambda > 0$ функция $R_{\phi,+}(\lambda + i0)f$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда.

Положим

$$K_\pm(\lambda) = \lim_{\epsilon\to 0} K(\lambda \pm i\epsilon). \tag{I.13}$$

Лемма I.0.17. *Если выполнено условие* (I.12)*, то функция $K_+(\lambda)f$ удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда.*

Приложение J

Функция Грина уравнения Шредингера

Постановка задачи. Векторы ориентированного трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ мы будем обозначать символами x , $y \ldots$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ мы обозначим символом $(\quad , \quad)$, векторное произведение векторов h и x символом $h{*}x$. Символ $f(x)$ в зависимости от контекста означает имя функции, значение функции в точке или оператор умножения на функцию. Для матрицы C с комплексными элементами мы по определению положим

$$(x\,,\,Cy) = (x\,,\,(Re\,C)y) + i(x\,,\,(Im\,C)y).$$

На функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ определим оператор

$$H: \quad H\psi(x) = \frac{1}{2}(-i\hbar\partial_x - \mathcal{A}(x))^2\psi(x) + ((l\,,\,x) + v(x))\psi(x), \tag{J.1}$$

где

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}h * x\,,\ \hbar gt; 0\,,\ h\,,\ l \in \mathbb{R}^3$$

и $v(x)$ -действительная функция (потенциал). Мы будем предполагать, что потенциал $v(x)$ представим как сумма двух действительных функций:

$$v(x) = v_{ext}(x) + v_{bulk}(x), \tag{J.2}$$

где

$$v_{ext}(x) = \int \exp(i(x\,,\,k))\widehat{v(k)}dk, \tag{J.3a}$$

$$v_{bulk}(x) = \sum_j a(j)\exp(i(b(j)\,,\,x)\,,\ j \in \mathbb{Z}\,,\ b(j) \in \mathbb{R}^3, \tag{J.3b}$$

причем

$$\operatorname{norm}(v) \stackrel{def}{=} \int (1+|k|)^3 |\widehat{v(k)}| dk + \sum_j (1+|b(j)|)^3 |a(j)| < \infty. \tag{J.4}$$

Если векторы $b(j)$ в (J.3b) пробегают периодическую решетку в $\mathbb{R}^3$, то потенциал $v_{bulk}(x)$ будет периодичен.

Далее тем же символом H мы будем обозначать самосопряженное в $L^2(\mathbb{R}^3)$ расширение оператора (J.1).

Рассмотрим задачу Коши

$$i\hbar\partial_t\psi(x\,,\,t) = H\psi(x\,,\,t)\;,\psi(x\,,\,+0) = \psi_0(x). \tag{J.5}$$

Задачу (J.5) мы будем рассматривать как абстрактную задачу Коши в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и будем рассматривать ее на произвольном, но фиксированном интервале времени T. В квантовой механике задача (J.5) описывает эволюцию волновой функции частицы, которая движется в магнитном поле h, электрическом поле l и поле с потенциалом $v(x)$. В математических задачах физики твердого тела потенциал $v_{bulk}(x)$ обычно описывает взаимодействие частицы с атомами образца, а потенциал $v_{ext}(x)$ описывает внешнее взаимодействие.

Наша цель состоит в том, чтобы дать представление функции Грина задачи (J.5) в виде континуального интеграла.

В физической литературе под термином "континуальный интеграл"понимают предел n-кратных интегралов при $n \to \infty$. Обычно в физике континуальные интегралы используются как вспомогательное средство при построении формальных рядов теории возмущений, однако есть примеры эффективного использования континуальных интегралов при численных расчетах. Техника континуальных интегралов стала популярной после работ физика Р.Фейнмана, поэтому континуальные интегралы иногда называют фейнмановскими интегралами или интегралами по путям. Для построения функции Грина задачи Коши континуальные интегралы использовались в работах [89, 90]. В своих построениях мы используем когерентные состояния (которые в рассматриваемом нами случае есть гауссовы волновые пакеты) и преобразование Фурье-Гаусса (FBI преобразование по терминологии [102]). Теория континуальных интегралов по когерентным состояниям обсуждается в [98, 101]. Теория гауссовых волновых пакетов рассматривается в работах [91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100]. Ссылки на работы по применению FBI преобразования к исследованию уравнения Шредингера можно почерпнуть в [103, 104].

Основной результат сформулирован в теореме 1. Обратим внимание на следующие особенности оценки (J.40).

1. Оценка (J.40) равномерна по квазиклассическому параметру $\hbar$ и остаточный член в этой оценке стремится к нулю при $\hbar \to 0$.

2. При фиксированном значении параметра $\hbar$ остаточный член в оценке (J.40) стремится к нулю при $n \to \infty$ быстрее, чем можно было бы ожидать на основе формулы Троттера. В связи с этим интересно сравнить оценку (J.40) с оценками в работе [106].

3. Для получения оценки (J.40) мы не требуем бесконечной гладкости потенциала, что обычно используется при традиционной технике ПДО.

Используемая нами схема вычислений имеет много общего с техникой, традиционно применяемой для вычисления квазиклассической асимптотики. По применяемой в теории квазиклассики терминологии, нашу основную теорему 1 можно назвать теоремой типа Егорова, поскольку она описывает эволюцию квантовомеханической системы в терминах классического гамильтонова потока. Однако по следующим причинам оценка (J.40) не является в полном смысле квазиклассической.

1. За счет выбора параметра n остаточный член в оценке (J.40) может быть сделан малым и при $\hbar \approx 1$, и в этом смысле оценка (J.40) имеет более общую область применения, чем квазиклассика.

2.Мы не вычисляем асимптотику по параметру $\hbar$ входящего в оценку (J.40) n-кратного интеграла, а эта задача может быть сложной.

Обычно при построении функции Грина или параметрикса для уравнения Шредингера также используют приближения n-кратными интегралами при $n \to \infty$, а метод континуальных интегралов отличается тем, что он основан либо на идеях, связанных с формулой Троттера, либо (как в нашем случае) на идеях, связанных с обобщением метода Эйлера.

Вспомогательные построения. Положим

$$V(Q) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(Q)^2 + (l\,,\,Q) + v(Q). \tag{J.6}$$

Пусть

$$Q \mapsto DV(Q)\ ,\ Q \mapsto D^2V(Q)$$

векторное поле и поле операторов, которые соответствуют первому и второму дифференциалу функции (J.6). Квантовомеханическому гамильтониану (J.1) соответствует классический гамильтониан

$$\mathcal{H}(P\,,\,Q) = \frac{1}{2}\left(P - \mathcal{A}(Q)\right)^2 + (l\,,\,Q) + v(Q)\ ,P\,,\,Q \in \mathbb{R}^3. \tag{J.7}$$

Уравнения движения классической динамической системы с гамильтонианом (J.7) суть:

$$\partial_t Q = P - \mathcal{A}(Q)\ ,\ Q(0\,,\,q_0\,,\,p_0) = q_0, \tag{J.8a}$$

$$\partial_t P = -\mathcal{A}(P) - DV(Q)\ , \quad P(0\,,\,q_0\,,\,p_0) = p_0. \tag{J.8b}$$

В дальнейшем символами $P\,,\,Q$ мы будем обозначать решения системы (J.8), рассматриваемые как функции начальных данных $q_0\,,\,p_0$.

Положим

$$V_2(Q\,,\,x) = V(Q) + \Big((x-Q)\,,\,DV(Q)\Big) + \frac{1}{2}\Big((x-Q)\,,\,D^2V(Q)(x-Q)\Big).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$nonumber i\hbar\partial_t W(x\,,\,t\,,\,q_0\,,\,p_0) = \tag{J.9a}$$

$$\Big(-\frac{1}{2}\hbar^2\Delta_x + i\hbar\mathcal{A}(x)\cdot\partial_x + V_2(Q\,,\,x)\Big)W(x\,,\,t\,,\,q_0\,,\,p_0); \tag{J.9b}$$

$$W(x\,,\,+0\,,\,q_0\,,\,p_0) =$$

$$(2\pi\hbar)^{-3}(\pi\hbar\sigma)^{-3/2}\exp\Big(-\frac{(x-q_0)^2}{2\hbar\sigma} + i\frac{(p_0\,,\,(x-q_0))}{\hbar}\Big). \tag{J.9c}$$

Лемма J.0.18. *Решение задачи* (J.9) *дается формулой*

$$W(x\,,\,t\,,\,q_0\,,\,p_0) = (2\pi\hbar)^{-3}(\pi\hbar)^{-3/2}(det(A))^{-1/2}\times$$

$$\hookrightarrow \exp\Big(-\big(((x-Q)\,,\,C(t)(x-Q))/2 - i(P\,,\,(x-Q)) - iS(t)\big)/\hbar\Big), \tag{J.10}$$

где $P\,,\,Q$ -решение системы (J.8), *$C(t)$ вычисляется по формулам* (J.14) *и* (J.17), *матрицы $A(t)\,,\,B(t)$ вычисляются как решения системы* (J.18), *функция $S(t)$ вычисляется по формуле* (J.21).

Доказательство. Решение задачи (J.9) можно вычислить по приведенным в [94, 99] формулам, однако преобразоваие этих формул к удобному для нашего анализа виду сложно, поэтому мы поступим так. Будем искать решение уравнения (J.9b) в виде

$$\psi(x\,,\,t) = \hookleftarrow$$

$$\exp\Big(-\big(((x-Q)\,,\,C(t)(x-Q))/2 - i(P\,,\,(x-Q)) - i\gamma(t)\big)\hbar\Big), \tag{J.11}$$

где $C(t)$ -неизвестная матрица, а $\gamma(t)$ -неизвестная функция. Подставляя (J.11) в (J.9b), мы получим уравнения

$$amp; \quad amp; \partial_t C(t) + \frac{1}{2}(h * C(t) - C(t)h*) + iC(t)^2 - iD^2V(Q) = 0, \tag{J.12}$$

$$amp; \quad amp; \partial_t \gamma(t) - \frac{1}{2}P^2 + V(Q) + \frac{1}{2}\hbar \cdot trace\Big(C(t)\Big) = 0, \tag{J.13}$$

где через $h*$ мы обозначили оператор в $\mathbb{R}^3$:

$$h* \quad : x \mapsto h * x.$$

В уравнении (J.12) сделаем замену

$$C(t) = \exp(-\frac{1}{2}th*)Z(t)\exp(\frac{1}{2}th*) \tag{J.14}$$

Для матрицы $Z(t)$ получим уравнение Риккати

$$\partial_t Z(t) + iZ^2(t) = M(t)\,,\; Z(0) = E/\sigma,, \tag{J.15}$$

$$M(t) = \exp(\frac{1}{2}th*)D^2V(Q)\exp(-\frac{1}{2}th*). \tag{J.16}$$

Уравнение (J.15) линеаризуем подстановкой

$$Z(t) = B(t)A^{-1}(t)\,. \tag{J.17}$$

Для матриц $A(t)$ и $B(t)$ получим уравнения

$$\partial_t A(t) = iB(t)\,,\; A(0) = \sigma E\,, \tag{J.18a}$$

$$\partial_t B(t) = iM(t)A(t)\,,\; B(0) = E\,. \tag{J.18b}$$

где функция $M(t)$ определена по (J.16). Из теоремы Лиувилля и (J.18) следует, что

$$trace\Big(C(t)\Big) = trace\Big(B(t)A^{-1}(t)\Big) = -i\partial_t \ln\det\Big(A(t)\Big), \tag{J.19}$$

поэтому с учетом начальных условий (J.9c)

$$\gamma(t) = S(t) + i\frac{1}{2}\hbar\ln\det\Big(A(t)\Big), \tag{J.20}$$

где

$$S(t) = \int_0^t \Big(\frac{1}{2}P^2(\tau) - V(Q(\tau))\Big)d\tau. \tag{J.21}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем символом a мы обозначим положительную константу, значение которой произвольно, но фиксировано на протяжении всей работы, символами $const$, δ мы обозначим положительные константы, значение которых может меняться при каждом вхождении в формулу.

Лемма J.0.19. *На интервале* $0 \leq t \leq a\sigma$ *в евклидовой норме справедливы оценки*

$$A(t) = (\sigma + it)E + O(\sigma^3)\,,\; B(t) = E + O(\sigma^2),$$
$$C(t) = (\sigma + it)^{-1}(E + O(\sigma^2)),$$
$$(E + \sigma C(t))^{-1} = \left(\frac{2\sigma^2 + t^2 + i\sigma t}{4\sigma^2 + t^2}\right)(E + O(\sigma^2))\,. \quad \text{(J.22)}$$

Доказательство. Из(J.18) следует, что матрица $A(t)$ удовлетваряет интегральному уравнению

$$A(t) = (\sigma + it)E - \int_0^t (t - \tau)M(\tau)A(\tau)d\tau\,.$$

Из этого интегрального уравнения и неравенства Гронуолла следует оценка

$$\|A(t)\| \leq const \cdot \sigma\,.$$

Подставляя эту оценку в интегральное уравнение, получим оценку матрицы $A(t)$. Подставляя оценку матрицы $A(t)$ в уравнение (J.18b) для матрицы $B(t)$, получим оценку матрицы $B(t)$. Дальнейшее очевидно.

Напомним определение преобразования Фурье-Гаусса (FBI-преобразования по терминологии книги [102]). Это преобразование мы определим формулой

$$F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q\,,\,p) =$$
$$= \int \exp\left(-(|x - q|^2/2\sigma + i(p\,,\,(x - q)))/\hbar\right)\psi(x)dx. \quad \text{(J.23)}$$

Обратное преобразование вычисляется по формуле

$$\psi(x) = (2\pi\hbar)^{-3}(\pi\hbar\sigma)^{-3/2}\times$$
$$\hookrightarrow \int \exp\left(-(|x - q|^2/2\sigma - i(p\,,\,(x - q)))/\hbar\right)F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q\,,\,p)dqdp. \quad \text{(J.24)}$$

Напомним, что справедливо равенство Парсеваля

$$\int |\psi(x)|^2 dx = (2\pi\hbar)^{-3}(\pi\hbar\sigma)^{-3/2}\int |F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q\,,\,p)|^2 dqdp. \quad \text{(J.25)}$$

В $L^2(\mathbb{R}^3)$ определим оператор $J(k\,,\,s\,,\,\hbar\,,\,\sigma)$:

$$J(k\,,\,s\,,\,\hbar\,,\,\sigma)\psi(x) = D_s^3 \int \big[\exp\big(i(k\,,\,Q) + is(k\,,\,x-Q)\big)\big] \times$$
$$\hookrightarrow W(x\,,\,t\,,\,q_0\,,\,p_0)F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q_0\,,\,p_0)dq_0dp_0. \quad \text{(J.26)}$$

Лемма J.0.20. *На интервале $0 \le t \le a\sigma$ при $0 \le s \le 1$ в норме пространства $L^2(\mathbb{R}^3)$ справедлива оценка*

$$\|J(k\,,\,s\,,\,\hbar\,,\,\sigma)\| \le const \cdot (1+|k|)^3(\hbar\sigma)^{3/2}. \quad \text{(J.27)}$$

Доказательство. Вычисляя преобразование Фурье-Гаусса от обеих частей равенства (J.26), мы получим

$$F(J\psi|q\,,\,p) = \int \omega(q\,,\,p\,,\,q_0\,,\,p_0)F(\psi|q_0\,,\,p_0)dq_0dp_0. \quad \text{(J.28)}$$

где

$$\omega(q\,,\,p\,,\,q_0\,,\,p_0) = (2\pi\hbar)^{-3}(det(A(t))^{-1/2} \times$$
$$\hookrightarrow D_s^3(2\pi\sigma)^{3/2}(det(E+\sigma C(t)))^{-1/2}\exp(-\beta(s)) \times$$
$$\hookrightarrow \exp\Big(-\big(((q-Q)\,,\,C(t)(E+\sigma C(t))^{-1}(q-Q))/2\hbar -$$
$$\hookrightarrow -iS(t)/\hbar + i(p\,,\,(q-Q))/\hbar - i(k\,,\,Q)\big)\Big), \quad \text{(J.29)}$$

и

$$\beta(s) = \sigma\Big((P-p+s\hbar k)\,,\,(E+\sigma C(t))^{-1}(P-p+s\hbar k)\Big)/2\hbar +$$
$$\hookrightarrow i\Big((q-Q)\,,\,(E+\sigma C(t))^{-1}(P-p+s\hbar k)\Big). \quad \text{(J.30)}$$

Из (J.30) и (J.22) следуют оценки

$$amp; \qquad amp; |\beta'(s)| \le const \cdot (1+|k|)(|q-Q| + \sigma|P-p+s\hbar k|), \quad \text{(J.31a)}$$

$$amp; \qquad amp; |\beta(s)''| \le const \cdot (1+|k|)^2\hbar\sigma, \quad \text{(J.31b)}$$

$$amp; \qquad amp; Re\,\beta(s) \ge \delta\sigma|P-p+s\hbar k|^2/\hbar, \quad \text{(J.31c)}$$

$$amp; \qquad amp; Re\,((q-Q)\,,\,C(t)(E+\sigma C(t))^{-1}(q-Q)) \ge \delta|q-Q|^2/\sigma. \quad \text{(J.31d)}$$

Поэтому

$$|\omega(q\,,\,p\,,\,q_0\,,\,p_0)| \le const\cdot\hbar^{-3}(1+|k|)^3\times \hookleftarrow$$
$$\Big[\hbar\sigma(|q-Q|+\sigma|P-p+s\hbar k|+|q-Q|^3+\sigma^3|P-p+s\hbar k|^3\Big]\times$$
$$\hookrightarrow \exp\Big(-\delta(|q-Q|^2/\hbar\sigma+\sigma|P-p+s\hbar k|^2/\hbar)\Big). \quad \text{(J.32)}$$

Из (J.28),(J.32) и оценки Карлемана нормы интегрального оператора в $L^2(\mathbb{R}^6)$ (с учетом равенства $dq_0dp_0 = dQdP$) следует оценка

$$\|F(J\psi|\cdot)|L^2(\mathbb{R}^6, dqdp)\| \le const\cdot\|F(\psi|\cdot)|L^2(\mathbb{R}^6, dq_0dp_0)\|. \quad \text{(J.33)}$$

Из (J.33) и равенства Парсеваля (J.25) следует утверждение леммы.

В $L^2(\mathbb{R}^3)$ определим оператор $R(t)$:

$$R(t)\psi(x) = \int [V_2(Q\,,\,x) - V(x))]\times$$
$$\hookrightarrow W(x\,,\,t\,,\,q_0\,,\,p_0)F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q_0\,,\,p_0)dq_0dp_0. \quad \text{(J.34)}$$

Лемма J.0.21. *На интервале* $0 \le t \le a\sigma$ *в норме пространства* $L^2(\mathbb{R}^3)$ *справедлива оценка*

$$\|R(t)\| \le const\cdot(\hbar\sigma)^{3/2}. \quad \text{(J.35)}$$

Доказательство. Используя известное выражение для остаточного члена формулы Тейлора и (J.3), мы получаем

$$V_2(Q\,,\,x) - V(x) = -\frac{1}{6}\int_0^1(1-s)^3D_s^3V(Q+s(x-Q)) =$$
$$\hookrightarrow -\frac{1}{6}\int_0^1(1-s)^3\Big(\int \widehat{v_{ext}(k)}D_s^3\exp(i(k\,,\,Q+s(x-Q)))dk\Big)ds-$$
$$\hookrightarrow \frac{1}{6}\int_0^1(1-s)^3\Big(\sum_j a(j)D_s^3\exp(i(b(j)\,,\,Q+s(x-Q)))\Big)ds \quad \text{(J.36)}$$

Заметим, что все величины в (J.36) от параметра l зависят только через Q. Подставив (J.36) в (J.34), мы получим:

$$R(t)\psi(x) =$$
$$-\frac{1}{6}\int_0^1(1-s)^3\Big(\int\Big[\widehat{v_{ext}(k)}J(k\,,\,s\,,\,\hbar\,,\,\sigma)\psi(x)\Big]\,dk\Big)ds-$$
$$\hookrightarrow \frac{1}{6}\int_0^1(1-s)^3\Big(\sum_j a(j)J(b(j)\,,\,s\,,\,\hbar\,,\,\sigma)\psi(x)\Big)ds \quad \text{(J.37)}$$

Теперь мы воспользуемся оценкой (J.27) и условием (J.4).Получим:

$$\|R(t)\psi\| \leq const \cdot norm(v)(\hbar\sigma)^{3/2}\|\psi\|. \tag{J.38}$$

Лемма доказана.

Оценка функции Грина. В $L^2(\mathbb{R}^3)$ определим оператор $K(t\,,\,\hbar\,,\,\sigma)$:

$$K(t\,,\,\hbar\,,\,\sigma)\psi(x) = \int W(x\,,\,t\,,\,q_0\,,\,p_0)F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q_0\,,\,p_0)dq_0dp_0. \tag{J.39}$$

Положим

$$U(t\,,\,\hbar) = \exp(-itH/\hbar).$$

Теорема J.0.10. *Если потенциал* $v(x)$ *удовлетворяет условиям* (J.3), *то для любых* $T < \infty\,,\,\sigma > 0$ *существует такое* $N(T)$ *и такая константа* $C(T)$, *что при всех* $n > N(T)\,,\,0 < \hbar < \hbar_0\,,\,0 < t < T$ *в норме простанства* $L^2(\mathbb{R}^3)$ *справедлива оценка*

$$\|K(t/n\,,\,\hbar\,,\,\sigma/n)^n - U(t\,,\,\hbar)\| < C(T)\hbar^{1/2}n^{-3/2} \tag{J.40}$$

Доказательство. Положим

$$\psi(x\,,\,t) = K(t\,,\,\hbar\,,\,\sigma)\psi_0(x).$$

Умножая обе части уравнения (J.9b) и начальные условия (J.9c) на $F(\psi_0|\hbar\,,\,\sigma\,,\,q_0\,,\,p_0)$, интегрируя по dq_0dp_0 и учитывая формулу обращения (J.24), мы получим, что функция $\psi(x\,,\,t)$ есть решение задачи

$$\begin{array}{rr} i\hbar\partial_t\psi(x\,,\,t)amp; = & amp; H\psi(x\,,\,t) + R(t)\psi(x\,,\,t), \\ \psi(x\,,\,+0)amp; = & amp;\psi_0(x), \end{array}$$

откуда следует, что

$$K(t\,,\,\hbar\,,\,\sigma) = U(t\,,\,\hbar) + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t U(t-\tau\,,\,\hbar)R(\tau)d\tau. \tag{J.41}$$

Из (J.41) и леммы J.0.21 следует оценка

$$\|K(t\,,\,\hbar\,,\,\sigma) - U(t\,,\,\hbar)\| \leq const \cdot \hbar^{1/2}\sigma^{5/2}\,,\,0 \leq t \leq a\sigma. \tag{J.42}$$

Из (J.42) следует, что существует такое $N(T) < \infty$, что при $n > N(T)\,,\,0 < t < T$ справедлива оценка

$$\|K(t/n\,,\,\hbar\,,\,\sigma/n) - U(t/n\,,\,\hbar)\| \leq const \cdot n^{-5/2}. \tag{J.43}$$

Запишем равенство

$$
\begin{aligned}
&K(t/n\,,\,\hbar\,,\,\sigma/n)^n = \\
&\qquad\hookrightarrow (U(t/n\,,\,\hbar) + (K(t/n\,,\,\hbar\,,\,\sigma/n) - U(t/n\,,\,\hbar)))^n = \\
&\qquad\qquad\hookrightarrow U(t\,,\,\hbar) + [\cdots], \quad \text{(J.44)}
\end{aligned}
$$

где через $[\cdots]$ мы обозначили сумму слагаемых, каждое из которых содержит хотя бы один множитель $(K(t/n\,,\,\hbar\,,\,\sigma/n) - U(t/n\,,\,\hbar))$. В силу унитарности оператоа $U(t\,,\,\hbar)$ и оценки (J.43) из (J.44) следует оценка

$$
\begin{aligned}
&\|K(t/n\,,\,\hbar\,,\,\sigma/n)^n - U(t\,,\,\hbar)\| = \\
&\qquad\hookrightarrow \|[\cdots]\| \le (1 + const\cdot\hbar^{1/2}n^{-5/2})^n - 1 \le C(T)\hbar^{1/2}n^{-3/2}.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Формула (J.40) сводит решение задачи (J.5) к итерации интегрального оператора

$$
\begin{aligned}
&F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\; q\,,\,p) \mapsto F((K\psi)|\hbar\,,\,\sigma\; q\,,\,p) = 2^{-3/2}(\pi\hbar)^{-3}\sigma^{3/2}\times \\
&\hookrightarrow \int\Big(det(A+\sigma B)\Big)^{-1/2}\exp\Big(-\big(\sigma((P-p)\,,\,(E+\sigma C)^{-1}(P-p))/2+ \\
&\qquad\hookrightarrow ((q-Q)\,,\,C(E+\sigma C)^{-1}(q-Q))/2- \\
&\quad\hookrightarrow i((q-Q)\,,\,(E+\sigma C)^{-1}(P-p)) - i(p\,,\,(q-Q)) - iS(t)\big)/\hbar\Big) \\
&\qquad\qquad\hookrightarrow F(\psi|\hbar\,,\,\sigma\; q_0\,,\,p_0)dq_0dp_0. \quad \text{(J.45)}
\end{aligned}
$$

Ядро интегрального оператора (J.45) есть сглаженная $\delta-$функция в окрестности классической траектории. Это обстоятельство позволяет компенсировать усложнения, связанные с увеличением размерности фазового пространства при переходе к FBI-преобразованию и на основе формулы (J.40) построить эффективный алгоритм численного решения задачи (J.5) (см. [107, 108, 109]). Заметим, что вычисления по формулам (J.40) или (J.45) дают приближение решения сплайном Габора. Это обстоятельство существенно упрощает вычисление матричных элементов и матрицы плотности. Без усложнения рассуждений и выкладок к потенциалу $v(x)$ можно было бы добавить квадратичный по x полином. Аналогичные рассуждения приведены в [105] и мы не будем на этом останавливаться.

Литература

[1] М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. Издательство “Мир”, Москва, 1977г. 357 стр.

[2] М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. Издательство “Мир”, Москва, 1978г. 395 стр.

[3] М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. 3. Теория рассеяния. Издательство “Мир”, Москва, 1982, 443 стр.

[4] М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов. Издательство “Мир”, Москва, 1982, 428 стр.

[5] Дж. Тейлор. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистких столкновений. Издательство “Мир”, Москва, 1975. 560 стр.

[6] Д.Р.Яфаев. Математическая теория рассеяния. Санкт-Петербург. Издательство С.-Петербургского университета. 1994 г. 421 стр.

[7] D.R. Yafaev. Mathematical Scattering Theory. Analitical theory. v. 158 Mathematical Surveys and Monographs. 2010 y.AMS.

[8] Jafaev, Drnitrij R.: Scattering theory : some old and new problems / Dimitri Yafaev. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ; London ; Milan ; Pads ; Singapore ; Tokyo : Springer, 2000 (Lecture notes in mathematics ; 1735)

[9] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва “Мир” 1986, 455 стр.

[10] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т 4. Интегральные операторы Фурье. Москва “Мир” 1988, 446 стр.

[11] Д.Колтон, Р.Кресс. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Издательство “Мир”, 1987 г. Москва ,311 стр.

[12] Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Издательство “Мир”, 1969 г.Москва ,607 стр.

[13] М.Голдбергер. К.Ватсон. Теория столкновений. Издательство “Мир”, 1969 г.Москва , 1967 г. ,823 стр.

[14] P. Martin. From the Asymptotic Condition to the Cross-setion. Helvetica Physica Acta. Vol. 45, p.794-801.

[15] J. D. Dollard. Scattering into Cones: Potential Scattering. Commun. Math. Phys. Vol. 12, p. 193-203.(1969).

[16] J.Dereziński and E.Skibsted, Quatum scattering at low energies. arXiv:0712.0195v1.

[17] Francisco Fernandez Dr. Resonances for symmetric two-barrier potentials.arXiv:1107.4092v2

[18] Ю.М. Березанский. Разложение по собственным функциям самомопряженных операторв. 798 стр. Издательство “Наукова думка”, Киев, 1965 г.

[19] К. Морен. Методы гильбертова пространства. 570 стр. Издательство “Мир”, Москва 1965 г.

[20] M. Gadella and F. Gómez. A Unified Mathematical Formalsm for the Formulation of Quantum Mechanics. Foundation of Physics, Vol. 32, No 6. June 2002. p. 815-865.

[21] Ф.Калоджеро, А.Дегасперис. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. -М.:Мир, 1985.-469 с.

[22] А.А.Арсеньев. Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. -М.-Ижевск.2011.-524 с.

[23] А.А.Арсеньев. Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шредингера с ловушечным потенциалом. Математический сборник. 1996 г., Т.187, є6 с.3-20.

[24] Norman Shenk and Dale Thoe. Eigenfunction Expansions and Scattering Theory for Perturbacions of $-\Delta$. Journal of Mathematical Analysis and Applications. v.36, p.313-351 (1971).

[25] Alexandru D. Ionescu and Wilhelm Schlag. Agmon-Kato-Kuroda Theorems for a Large Class of Perturbations. arXiv:math.AP/0409313v1.

[26] M.S.Livshic. The method of non-selfadjoint operators in scattering theory, Usp. Math.Nauk, 12, 212-218. (1957).

[27] James S.Howland. Banach Space Techniques in the Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators with Continuous Spectra. Journal of Mathematical Analysis and Applications. v. 20, p. 22-47 (1967).

[28] James S.Howland. A Perturbation-Theoretic Approach to Eignfunction Expantion. Journal of Functional Analysis. v. 2, p. 1-23, (1968).

[29] James S.Howland.The Livsic Matrix in Perturbation Theory. Journal of mathematical analysis and aplications. v.50, .415-437 (1975y.)

[30] James S.Howland.Embedded eigvalues and virtual poles. PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS Vol. 29, No. 3, 1969.

[31] James S.Howland. Perturbation of Emebedded Eigenvalues by Operators of Finite Rank.JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 23, 575-584 (1968)

[32] H.Feshbach. Unified theory of nuclear reactions. Ann. Phys. v.5. p.357-390. (1958).

[33] Jan Derezinski, Vojkan Jaksic. Spectral theory of Pauli-Fierz operators. JFA., 180, p.243-327. (2001y.)

[34] Frank-Michael Dittes. The decay of quantum systes with small number of open channels. Phys. Reports, 339 (2000), p.215-376.

[35] P.A.Rejto. On Partly Gentele Perturbations. I. Journal of Mathematical Analysis and Applications. p.435-462. (1967).

[36] P.A.Rejto. On Partly Gentele Perturbations. II. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 20, p.145-187. (1967).

[37] Х.Цикон, Р.Фрезе, В.Кирш, Б.Саймон. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. Издателство "Мир", Москва,1990 ,406 стр.

[38] Уолтер Рудин. Функциональный анализ. Издательство “Лань”, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. 2005 г. ,443 стр.

[39] D.Bollé, F.Gesztesy and S.F.J.Wilk. A Complete Treatment of Low-Energy Scattering in One Dimention. J. of Operator Theory. v. 13, (1985), p.3-31.

[40] Arne Jensen, Gheorghe Nenciu. The Fermi Golden Rule and its Form in Odd Dimensions.

`http:// www.ma.utexas,edu/mp_arc 05-148.`

[41] J.Derezinski and E.Skibsted. Quantum Scattering at Low Energies. arxiv:0712.0195v1.

[42] S.Fourais and S.E.Skibsted. Zero Energy Asymptotics of the Resolvent for a Class of Slowly decaying Potentials.

`http:// www.ma.utexas,edu/mp_arc 03-394.`

[43] M. Gadella and F. Gómez. Eigenfunction Expansions and Tranformation Theory. arxiv:math.FA./0607548.

[44] R. de la Madrid, A. Bohm, M. Gadella. Rigged Hilbert Space Treatment of Continuous Spectrum.

`http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 02-126`

[45] Б.Р.Вайнберг. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Издательство Московского университета. 1982 г.293 стр.

[46] Г.Корн и Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Издательство “Наука”. Главная редакция физико-математической литературы. Москва 1972г. 831 стр.

[47] Д.Колтон. Р.Кресс.Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Издательство “Мир”, Москва. 1987г., 311 стр.

[48] Ф. Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Издательство “Мир” , Москва, 1972г. 292 стр.

[49] Бабиков В.В. Метод фазовых функций в квантовой механике. Издательство “Мир”, Москва, 1976.

[50] Lippmann, B.A. and Scwinger, J.,Variational principles for scattering processes,Phys. Rev.v.79 (1950), 469-480

[51] M Castagnino, R Id Betan, R Laura and R J Liota. Quantum decay processes and Gamov states. Journal of Physics A: Mathematical and General. vol. 35, (2002), p. 6055-6074.

[52] R. de la Madrid. The rigged Hilbert space approach to the Lippmann-Schwinger equation. Part I. J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 3949-3979.

[53] R. de la Madrid. The rigged Hilbert space approach to the Lippmann-Schwinger equation. Part II: The analytic continuation of the Lippmann-Schwinger bras and kets. J. Phys. A: Math. Gen. 39 (2006) 3981-4009

[54] A. Bohm,P. Kielanowski, S. Wickramasekara. Complex Energies and Beginnings of Time Suggest a Theory of Scattering and Decay. arXiv:quant-ph/0510060v1.

[55] Robert Grummt. On the Time-Dependent Analysis of Gamow Decay.arXiv:math-ph/0909.3251v1

[56] R de la Madrid. Rigged Hilbert Space Approach to the Schrodinger Equation.mp-arc 02-209. May 1, 2002

[57] R. de la Madrid, A. Bohm, M. Gadella. Rigged Hilbert Space Treatment of Continuous Spectrum. mp-arc 02-126 , 2002

[58] Kevin Rapedius. Calculating resonance positions and widths using the Siegert approximation method. arXiv:1105.5994v1

[59] М.Нагумо. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. Издательство “Мир”. Москва. 1967.

[60] А.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер. Уравнения с частными производными. Издательство “Мир”. Москва. 1966.

[61] Tosio Kato. Scattering Thery with Two Hilert Spaces. Journal of Functional Analysis. vol. 1. p.342-369. (1967).

[62] Wilcox, C. H. Wave operators and asymtotic solutions of wave propagation problems of classical physics. Arch. of Rat. Mech. Anal. 22. (1966) p. 37-78.

[63] Guido Parravicini and Vittorio Gorini, E.C.G. Sudrashan. Resonances, scattering theory, and rigged Hilbert spaces. J.Math. Phys. 21(8), 1980, p.2208-2226.

[64] Т.Като. Теория возмущений линейных операторов. Издательство "Мир". Москва. 1972.

[65] Н.И. Ахиезер и И.М.Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Издательство "Наука." Москва. 1966. 543 стр.

[66] A.Soffer and M.I.Weinstein. Time dependent resonance theory. Geometric And Functional Analysis. Vol. 8, 1998,p.1086-1128.

[67] O.Costin, A.Soffer. Resonance Theory for Schr΄o dinger Operators. Commun. Math. Phs. 224, 133-152 (2001).

[68] M. Gadella, G. Pronko.The Friedrichs Model and its use in resonance phenomen.arXiv:1106.5782v1 [mTath-ph]

[69] Claudy Canceler, André Martinz and Thierry Ramound. Quantum resonaces without analyticity.

`http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 04-251`

[70] M. Merkil, I.M.Sigal. A Time-Depended Theory of Quantum Resonances. Commun. Math. Phys. 201, p.549-576.(1999).

[71] G.Gamow. Zur Quantenteori des Atomkernel. Z.Phys., 51, 204-211, (1928).

[72] Г.А.Гамов. Очерк развития учения о строении атомного ядра. Теория радиоактивного распада. УФН. 1930, т.10, в.4, стр.531-544.

[73] К.Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. Издательство "Мир". Москва. 1969.

[74] Siu-Hung Tang and Maciej Zworski. Resonance Expansions of Scattered Waves. Commun. on Pure and Applied Math., Vol. 53, p.1305-1334.

[75] Mark S. Ashbaugh and Evans M. Harrell ll. Perturbation Theory for Shape Resonances and Large Barrier Potentials. Commun. Math. Phys., 83, 151-170. (1982).

[76] L. Nedelec. Resonanancs for Matrix Schrődinger Operators. Duke Math. Journal, vol.106, no 2, 209-236.

[77] Shimuel Agmon. A Perturbatin Theory of Resonances. Commun. on Pure and Applied Mathematics. Vol. 51, p. 1255-1309. (1998).

[78] Johannes Sjőstrand and Maciej Zworski. Complex Scailing and the Distribution of Scattering Poles. Jornal of the American Mathematical Society. Vol. 4. no. 4, p.729-768.(1991)

[79] Russell Brown and P.D.Hislop. Eigenvalues and Resonances for Domains with Tubes: Neumann Boundary Conditions. Journal of Differential Equations. 115, 458-476, (1985).

[80] Petr D. Hilsop and André Martinez. Scattering Resonances of a Helholtz Resonator. Indiana University Math. Journal, Vol.40, no 2, 767-788. (1991).

[81] Sergio Albeverio and Raphael Høegh-Krohn. Perturbation Resonances in Quantum Mechanics. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 101, 491-513. (1984).

[82] V. Jakšić, E.Krichevski, and C.-A.Pillet. Mathematical Theory of the Wigner-Weiskof Atom.

`http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 05-333`

[83] Nurulla Azamov.Absolutely continuous and singular spectral shift functions.arXiv:0810.2072v4 [math.SP]

[84] R. de la Madrid.The resonance amplitude associated with the Gamow states.arXiv:0810.0876v1 [nucl-th]

[85] L. Cattaneo, G. M. Graf, W. Hunziker.A general resonance theory based on Mourre's inequality.arXiv:math-ph/0507063.

[86] C.Cacciapuoti, R. Carlone and R.Figari. Resonances in models of spin-dependent point interactions. J.Phy. A:Math Ther. 42 (2009) 035202

[87] Johannes Sjőstrand. Lectures on resonances.

[88] Claudio A.Ferdández. Resonances in Scattering by Resonator. Indiana Univ. Math. Journal v.34, no.1 p. 115-125, (1985).

[89] Fujiwara D. A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equations // J. Analyse Math. 1979, V.35, pp41-96.

[90] Fujiwara D. Remarks on convergence of the Feynman path integrals // Duke Math. J. 1980, V47, pp559-600.

[91] Maurice A. de Gosson. Extended Weyl Calculus and Application to the Space-Schrödinger Equation // http://ru.arxiv.org/math/0503709.

[92] Maurice A. de Gosson. Elements of a Theory of Symplectic Covariant Schrödinger Equation in Phase Space // http://ru.arxiv.org/math-ph/0505073.

[93] Hagedorn G.A. Semiclassical quantum mechanics :The $\hbar \to 0$ limit for coherent states //Commun. Math. Phys. 1980. V71. pp77-93.

[94] Hagedorn G.A. Raising and lowering operators for semiclassical wave packets //Ann. Phys. 1998. V.269. pp77-94.

[95] Hagedorn G.A.,Joye A. Exponentially accurate semiclassical dynamics: Propagation, localization, Ehrenfest times, scattering, and more general states //Ann Henri Poincaré. 2000. V1, pp837-883.

[96] Herman M.F. Dynamics by semiclassical methods // Annu. Rev. Phys. Chem. 1994. V45. pp83-111.

[97] Sam L. Robinson. Semiclassical mechanics for time-dependent Wigner functions //J. Math. Phys. 1993. V.34., pp2185-2205.

[98] S.H.Fricke, A.B.Balantekin, T.Uzer. Uniform approximation and coherent state path integrals //J. Math. Phys. 1991. V32., pp3125-3129.

[99] Додонов В.В., Манько В.И. Инварианты и эволюция нестационарных квантовых систем // Труды Института физики АН СССР. 1987г., Т.183, С.182-288.

[100] Jens Bolte and Rainer Glaser. A semiclassical Egorov theorem and quantum ergodicity for matrix valued operators // http://ru.arxiv.org/math-ph/0204018.

[101] Wei-Min Zhang, Da Hsuan Feng, Robert Gilmore. Coherent states: Theory and some applications // Reviews of Modern Physics. 1990., V62. No4, pp867-927

[102] Folland G.B. Harmonic analysis in phase space. Princeton Univ., Princeton, 1989.

[103] André Martinez and Vania Sordoni. Microlocal WKB Expansions // Journal of Functional Analysis. V.168, P.380-402. (1999).

[104] Dariusz Chruściński and Krzystof Młodawski. Wigner function and Schrödinger equation in phase space representation // http://ru.arxiv/org/quant-ph/0501163.

[105] François Treves. Parametrices for a Class of Schrödinger Equations // Communications on Pure and Applied Mathematics V.48, P.13-78. (1995).

[106] Takashi Ichinose, Satoshi Takanobu. Estimate of the Difference between the Kac Operator and the Schrödinger Semigroup // Commun. Math. Phys. V.186, P.167-197. (1997).

[107] Айдагулов Г.Р. Применение преобразования Фурье-Гаусса к решению задачи Коши для уравнения Шредингера //ЖВМиМФ. 2002. Т.42. N12.С.1810-1815.

[108] Айдагулов Г.Р. Применение преобразования Фурье-Гаусса к решению задачи Коши для уравнения Шредингера: теоретический анализ численного алгоритма // Вычислительные методы и программирование. 2003. Т.4. N2. С.16-20.

[109] Айдагулов Г.Р. Метод подвижной сетки для решения нестационарного уравнения Шредингера // http://numeth.srcc.msu.su/.

[110] Е.М.Ландис. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Издательство "Наука 1971 г.237 стр.