

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

III

Под редакцией

В. В. Воеводина, А. Д. Горбунова, Г. П. Климова,
А. Г. Свешникова

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1965

Из содержания Т.3, 1965г.,

- В. И. Дмитриев.* Дифракция плоского электромагнитного поля на цилиндрических телах, расположенных в слоистых средах. 307
- В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров.* Решение некоторого класса интегральных уравнений на полупрямой. 317
- В. И. Дмитриев.* Расчет электромагнитного поля в методе частотного зондирования. 386

РАЗДЕЛ III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. И. ДМИТРИЕВ

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В теории развивающихся в настоящее время геофизических методов разведки, использующих переменные электромагнитные поля, большое значение имеет решение задач дифракции электромагнитного поля на телах, расположенных в слоистых средах. В данной работе получены интегральные уравнения для электромагнитного поля в случае дифракции на проводящем цилиндре, расположенном в плоскопараллельной слоистой среде, причем цилиндр полностью находится в некотором слое и образующая цилиндра параллельна плоскости границ раздела слоев.

1. Пусть дана плоскопараллельная слоистая среда. Область сечения m -ного слоя обозначим через S_m , а границу раздела между m -ым и $(m+1)$ -ым слоем — через L_m . Волновое число в m -ном слое равно k_m . Волновое число в слоистой среде обозначим $\tilde{k}(M) = k_m$ при $M \in S_m$. Пусть в некотором ν -том слое находится бесконечный проводящий цилиндр с сечением S_0 . Волновое число в цилиндре — k_a . Волновое число в среде с проводящим цилиндром обозначим:

$$K(M) = \begin{cases} k_a & \text{при } M \in S_0, \\ \tilde{k}(M) & \text{при } M \notin S_0. \end{cases}$$

Систему координат выберем так, чтобы плоскость XOZ совпадала с плоскостью границы раздела первого слоя, а ось OZ была направлена вдоль образующей цилиндра.

Если первичное поле от источников не зависит от координаты z , то в силу симметрии задачи мы получаем плоское электромагнитное поле. Хорошо известно, что в этом случае полное поле будет состоять из системы полей двух типов:

1) электрического $\vec{E} = \{0, 0, E_z\}$; $\vec{H} = \{H_x, H_y, 0\}$, причем

$$H_x = \frac{i}{k_0 \mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}; \quad H_y = -\frac{i}{k_0 \mu} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (1)$$

где μ — магнитная проницаемость, ω — частота, c — скорость света;

2) магнитного $\vec{E} = \{E_x, E_y, 0\}$; $\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$; причем

$$E_x = -\frac{ik_0 \mu}{k^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{ik_0 \mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2)$$

где $k = k_0 \sqrt{\mu \left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)}$ — волновое число в среде, ε — диэлектрическая постоянная, σ — проводимость.

Функции E_z и H_z являются решениями следующих краевых задач:

I.
$$\Delta_z E_z + k^2(M) E_z = -2\pi f_e(M). \quad (3)$$

На всех границах раздела E_z и $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ непрерывны, а в бесконечности E_z стремится к нулю. Так как мы считаем $\sigma_m \neq 0$, то последнего условия достаточно для единственности решения. Функция f_e определяет плотность источников электрического поля.

II.
$$\Delta_z H_z + k^2(M) H_z = -2\pi f_m(M). \quad (4)$$

На всех границах раздела H_z и $\frac{1}{k^2(M)} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial n}$ непрерывны, а в бесконечности H_z стремится к нулю. Функция f_m определяет распределения плотности источников магнитного поля.

При решении задачи удобнее пользоваться не полным полем E_z и H_z , а вторичным, возникающим в результате наличия в среде цилиндра:

$$\tilde{E}_z = E_z - E_z^0,$$

$$\tilde{H}_z = H_z - H_z^0,$$

где E_z^0 и H_z^0 соответственно первичные электрическое и магнитное поля, возбуждаемые источниками в среде в отсутствие цилиндра.

Функции E_z^0 , \tilde{E}_z и H_z^0 , \tilde{H}_z являются решениями следующих краевых задач.

Иа.
$$\Delta_2 E_z^0 + \tilde{k}^2(M) E_z^0 = -2\pi f_e. \quad (5)$$

На границе раздела слоев L_m непрерывны E_z^0 и $\frac{\partial E_z^0}{\partial n}$, а в бесконечности E_z^0 стремится к нулю.

Иб.
$$\Delta_2 \tilde{E}_z + k^2(M) \tilde{E}_z = -(k^2(M) - \tilde{k}^2(M)) \cdot E_z^0. \quad (6)$$

На границе раздела слоев L_m и контура C непрерывны \tilde{E}_z и $\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n}$, а в бесконечности \tilde{E}_z стремится к нулю.

Иа.
$$\Delta_2 H_z^0 + \tilde{k}^2(M) H_z^0 = -2\pi f_m. \quad (7)$$

На границе раздела слоев L_m непрерывны H_z^0 и $\frac{1}{\tilde{k}^2(M)} \cdot \frac{\partial H_z^0}{\partial n}$, а в бесконечности H_z^0 стремится к нулю.

Иб.
$$\Delta_2 \tilde{H}_z + k^2(M) \tilde{H}_z = -(k^2(M) - \tilde{k}^2(M)) \cdot H_z^0. \quad (8)$$

На границе раздела слоев L_m непрерывны \tilde{H}_z и $\frac{1}{\tilde{k}^2(M)} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n}$, а на контуре C непрерывна \tilde{H}_z и разрывна нормальная производная

$$\frac{1}{k_v^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} - \frac{1}{k_a^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} = \left(\frac{1}{k_a^2} - \frac{1}{k_v^2} \right) \frac{\partial H_z^0}{\partial n}. \quad (9)$$

2. Выведем интегральное уравнение для поля E_z . Для этого рассмотрим функцию источника электрического поля G_e , которая определяется как решение краевой задачи

$$\Delta_2 G_e + \tilde{k}^2(M) G_e = 0. \quad (10)$$

На границах раздела слоев L_m непрерывны G_e и $\frac{\partial G_e}{\partial n}$. В бесконечности G_e стремится к нулю, а при совпадении аргументов имеет особенность вида $G(M_1 M_0) \sim \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$, где r_{MM_0} — расстоя-

ние между точками M и M_0 . Аналитическое представление функции G_e получить легко. Выберем направление нормали к границам раздела таким образом: нормаль к L_m направлена от $(m+1)$ -го к m -ному слою, а нормаль к контуру C направлена внутрь слоя. Тогда, применяя вторую формулу Грина к функциям \tilde{E}_z и G_e в области S_m , получим:
при $m \neq \nu$

$$\int_{L_m} \left\{ \tilde{E}_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n} \right\} dl_M - \int_{L_{m+1}} \left\{ \tilde{E}_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n} \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} 2\pi \tilde{E}_z(M_0) & \text{при } M_0 \in S_m, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin S_m, \end{cases}$$

при $m = \nu$

$$\int_{L_\nu} \left\{ \tilde{E}_z \cdot \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \cdot \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n} \right\} dl_M - \int_{L_{\nu+1}} \left\{ \tilde{E}_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n} \right\} dl_M +$$

$$+ \oint_C \left\{ \tilde{E}_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n} \right\} dl_M = \begin{cases} 2\pi E_z(M_0) & \text{при } M_0 \in S_\nu - S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin S_\nu - S_0. \end{cases}$$

Сложив полученные равенства по всем слоям, учитывая непрерывность на границе \tilde{E}_z , $\frac{\partial E_z}{\partial n}$, G_e и $\frac{\partial G_e}{\partial n}$, найдем

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \left\{ \tilde{E}_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial n} \right\} dl_M = \begin{cases} \tilde{E}_z(M_0) & \text{при } M_0 \notin S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \in S_0. \end{cases} \quad (11)$$

Применим формулу Грина к функциям G_e и \tilde{E}_z [в области S_0 .

Тогда, учитывая, что в области S_0 согласно (6) и (10) выполняется равенство

$$\tilde{E}_z \Delta G_e - G_e \Delta \tilde{E}_z = [k^2(M) - \tilde{k}^2(M)] \cdot (E_z^0 + \tilde{E}_z) G_e = (k_a^2 - k_\nu^2) E_z \cdot G_e,$$

получим

$$\frac{k_a^2 - k_\nu^2}{2\pi} \iint_{S_0} \tilde{E}_z \cdot G_e \, d\tau_M - \frac{1}{2\pi} \oint_C \left\{ E_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \cdot \frac{\partial E_z}{\partial n} \right\} dl_m =$$

$$= \begin{cases} \tilde{E}_z(M_0) & \text{при } M_0 \in S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin S_0. \end{cases} \quad (12)$$

Сложив (11) и (12) и заменив $\tilde{E}_z(M_0) = E_z(M_0) - E_z^0(M_0)$, имеем окончательно:

$$E_z(M_0) = E_z^0(M_0) + \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \int_{S_0} E_z(M) \cdot G_e(M, M_0) d\tau_M. \quad (13)$$

Выражение (13) дает возможность определить функцию E_z в любой точке пространства, зная E_z внутри области S_0 . Для поля E_z внутри области S_0 получаем обычное интегральное уравнение Фредгольма. Данное интегральное уравнение для случая однородного пространства, когда

$$G_e(M, M_0) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(2)}(kr_{MM_0}),$$

совпадает с интегральным уравнением, полученным в работе [1] для случая дифракции на цилиндре, расположенном в однородном пространстве.

При вычислении поля вне цилиндра удобнее пользоваться не выражением (13), а (11), которое можно записать в виде

$$E_z(M_0) = \frac{1}{\partial\pi} \oint_C \left\{ E_z \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial E_z}{\partial n} \right\} dl_m + E_z^0(M_0) \quad \text{при } M_0 \notin S_0. \quad (13')$$

Получив из интегрального уравнения (13) распределение $E_z(M)$ внутри области S_0 , находим E_z и $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ на контуре C и согласно (13') вычисляем поле $E_z(M_0)$ в любой точке пространства. Вычисление интеграла по контуру вместо интеграла по области резко сокращает объем вычислений.

3. Выведем интегральное уравнение для поля H_z . Для этого рассмотрим функцию источника магнитного поля $G_m(M_1 M_0)$. Функция G_m определяется как решение краевой задачи

$$\Delta_2 G_m + \tilde{k}^2(M) G_m = 0,$$

на границе раздела слоев L_m непрерывны G_m , $\frac{1}{\tilde{k}^2(M)} \cdot \frac{\partial G_m}{\partial n}$. В бесконечности G_m стремится к нулю, а при совпадении аргументов имеет особенность вида $G_m(M, M_0) \sim \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$, где r_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0 .

Применив вторую формулу Грина в области S_m к функциям G_m и \tilde{H}_z , получим:
при $m \neq \nu$

$$\int_{L_m} \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_M - \int_{L_{m+1}} \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} 2\pi \tilde{H}_z(M_0) & \text{при } M_0 \in S_m, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin S_m, \end{cases}$$

при $m = \nu$

$$\int_{L_\nu} \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_M - \int_{L_{\nu+1}} \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_M +$$

$$+ \oint_C \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_m = \begin{cases} 2\pi \tilde{H}_z(M_0) & \text{при } M_0 \in S_\nu - S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin S_\nu - S_0. \end{cases}$$

Умножив полученные равенства на $\frac{1}{k_m^2}$ и сложив их, находим, учитывая непрерывность

$$\tilde{H}_z, \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n}, G_m, \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial G_m}{\partial n} :$$

$$\frac{1}{2\pi k_\nu^2} \oint_C \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_M = \begin{cases} \frac{1}{k(M_0)} \tilde{H}_z(M_0) & \text{при } M_0 \notin S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \in S_0. \end{cases} \quad (15)$$

Применим формулу Грина к функциям G_m и \tilde{H}_z в области S_0 . Учитывая, что в области S_0 , согласно (8) и (14), выполняется равенство

$$\tilde{H}_z \Delta G_m - G_m \Delta \tilde{H}_z = (k_a^2 - k_\nu^2) H_z \cdot G_m,$$

имеем

$$\frac{k_a^2 - k_\nu^2}{2\pi} \iint_{S_0} \tilde{H}_z \cdot G_m \cdot d\tau_M - \frac{1}{2\pi} \oint_C \left\{ \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right\} dl_M =$$

$$= \begin{cases} \tilde{H}_z(M_0) & \text{при } M_0 \in S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \in S_0. \end{cases} \quad (16)$$

Умножив (16) на $\frac{1}{k_a^2}$ и сложив с (15), получим, учитывая непрерывность на контуре C функций G_m , $\frac{\partial G_m}{\partial n}$ и \tilde{H}_z :

$$\frac{1}{k^2(M_0)} \tilde{H}_z(M_0) = \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2} \iint_{S_0} H_z G_m d\tau_M + \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2 k_v^2} \oint_C \tilde{H}_z \frac{\partial G_m}{\partial n} dl_M - \frac{1}{2\pi} \oint_C G_m \left[\frac{1}{k_v^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} - \frac{1}{k_a^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial n} \right] dl_M. \quad (17)$$

Учитывая краевое условие (9) и заменив $\tilde{H}_z = H_z - H_z^0$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2(M_0)} H_z(M_0) &= \frac{1}{k^2(M)} \cdot H_z^0(M_0) + \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2} \iint_{S_0} H_z \cdot G_m d\tau_M + \\ &+ \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2 k_v^2} \oint_C H_z \frac{\partial G_m}{\partial n} dl_M - \\ &- \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2 \cdot k_v^2} \oint_C \left\{ H_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial H_z^0}{\partial n} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя равенство

$$-\oint_C \left[H_z \frac{\partial G_m}{\partial n} - G_m \frac{\partial H_z^0}{\partial n} \right] dl_M = \begin{cases} 2\pi H_z^0(M_0) & \text{при } M_0 \in S_0, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin S_0, \end{cases}$$

имеем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2(M_0)} H_z(M_0) &= \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2} \iint_{S_0} H_z \cdot G_m d\tau_M + \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi k_a^2 k_v^2} \oint_C H_z \frac{\partial G_m}{\partial n} dl_M + \\ &+ \left[\frac{1}{k^2(M_0)} + \frac{k^2(M_0) - \tilde{k}^2(M_0)}{k_a^2 \cdot k_v^2} \right] H_z^0(M_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, зная поле в области S_0 , мы можем найти H_z в любой точке пространства по формуле

$$\begin{aligned} H_z(M_0) &= \frac{k^2(M_0)}{2\pi} \left[1 - \frac{k_v^2}{k_a^2} \right] \left\{ \iint_{S_0} H_z(M) \cdot G_m(M, M_0) d\tau_M + \right. \\ &\left. + \frac{1}{k_v^2} \oint_C H_z(M) \frac{\partial G_m(M, M_0)}{\partial n} dl_M \right\} + H_z^0(M_0), \quad M_0 \notin S_0, \end{aligned} \quad (20)$$

а для поля $H_z^0(M_0)$ внутри области S_0 имеем интегральное уравнение

$$H_z(M_0) = \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \left\{ \iint_{S_0} H_z(M) G_m(M, M_0) d\tau_M + \right. \\ \left. + \frac{1}{k_v^2} \oint_C H_z(M) \frac{\partial G_m(M, M_0)}{\partial n} \right\} + \frac{k_a^2}{k_v^2} H_z^0(M_0). \quad (21)$$

Соотношение (21) является нагруженным интегральным уравнением Фредгольма. В случае однородного пространства, когда

$$G_m(M, M_0) = \frac{\pi}{2i} H_0^2(kr_{MM_0}),$$

(21) совпадает с интегральным уравнением, полученным в работе [1].

Как и в случае электрического поля, удобнее вычислить поле $H_z(M_0)$ вне цилиндра не по формуле (20), а по формуле (15), которую можно записать:

$$H_z(M_0) = H_z^0(M_0) + \frac{k^2(M_0)}{2\pi k_v^2} \oint_C \left\{ H_z \frac{\partial G_m}{\partial n} dl_M - \right. \\ \left. - G_m \frac{\partial H_z}{\partial n} \right\} dl_M M_0 \notin S_0. \quad (22)$$

Здесь H_z и $\frac{\partial H_z}{\partial n}$ представляют собой предельные значения извне контура C . Из интегрального уравнения (21) H_z определяется внутри области S_0 , откуда можно найти предельные значения H_z и $\frac{\partial H_z}{\partial n}$ изнутри контура C . Тогда формула (22) должна быть записана в виде

$$H_z(M_0) = H_z^0(M_0) + \frac{\tilde{k}^2(M_0)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{k_v^2} \oint_C H_z \frac{\partial G_m}{\partial n} dl_M - \right. \\ \left. - \frac{1}{k_a^2} \oint_C G_m \frac{\partial H_z}{\partial n} dl_M \right\}. \quad (23)$$

Применение формулы (23) для расчета поля вне цилиндра резко сокращает объем вычислений.

4. Интересно отметить, что из интегральных уравнений для электрического поля (13) и магнитного поля (21) легко получаются простые представления электрических полей в случае, когда размеры цилиндра много меньше длины волны в окружающем пространстве и расстоянии, на котором производится измерение поля. Рассмотрим случай электрического поля. Если расстояние от цилиндра до точки измерения и длина волны в окружающей среде много больше размеров цилиндра, то, согласно (13), электрическое поле можно представить приближенно в виде

$$E_z(M_0) \simeq E_z^0(M_0) + G_e(\tilde{M}, M_0) \cdot \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \iint_{S_0} E_z(M) \cdot d\tau_M, \quad (24)$$

где \tilde{M} — некоторая средняя точка в области S_0 . Физически это означает, что на больших расстояниях поле от тока в цилиндре может быть представлено как поле бесконечного кабеля с некоторым эффективным током, определяемым через среднее поле по сечению цилиндра. В общем случае это среднее поле должно быть получено из решения интегрального уравнения (13), но при допущении, что максимальный диаметр сечения цилиндра много меньше длины волны в окружающем пространстве, можно получить для среднего поля простое выражение. Для этого проинтегрируем (13) по области S_0 . Тогда получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} E_z(M_0) d\tau_{M_0} &= \iint_{S_0} E_z(M_0) d\tau_{M_0} + \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \iint_{S_0} E_z(M) d\tau_M \times \\ &\times \iint_{S_0} G_e(M, M_0) d\tau_{M_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

При наших допущениях функция

$$\tilde{G}_e(M) = \iint_{S_0} G_e(M, M_0) d\tau_{M_0}$$

слабо изменяется в зависимости от точки M , поэтому выражение (25) можно приближенно записать в виде

$$\iint_{S_0} E_z(M_0) \cdot d\tau_{M_0} = \iint_{S_0} E_z^0(M_0) d\tau_{M_0} + \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \tilde{G}_e(\tilde{M}) \times$$

$$\times \iint_{S_0} E_z(M) \cdot d\tau_M, \quad (26)$$

где

$$\tilde{G}_e(\tilde{M}) = \iint_{S_0} G_e(\tilde{M}, M_0) d\tau_{M_0},$$

\tilde{M} — некоторая средняя точка в области S_0 . Отсюда сразу получаем среднее поле в цилиндре:

$$\iint_{S_0} E_z(M_0) d\tau_{M_0} = \frac{\iint_{S_0} E_z^0(M_0) d\tau_{M_0}}{1 - \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \tilde{G}_e(\tilde{M})}. \quad (27)$$

Подставив (27) в (24), находим окончательно приближенное выражение для электрического поля:

$$E_z(M_0) \simeq E_z^0(M_0) + \frac{2I_{\text{эф}}}{c} \cdot G_e(\tilde{M}, M_0), \quad (28)$$

где $I_{\text{эф}}$ — эффективный ток в цилиндре, создающий аномальное поле и равный

$$I_{\text{эф}} = \frac{c(k_a^2 - k_v^2)}{4\pi \left(1 - \frac{k_a^2 - k_v^2}{2\pi} \tilde{G}_e\right)} \cdot \iint_{S_0} E_z^0(M_0) d\tau_{M_0}. \quad (29)$$

Если источник первоначального поля находится на расстояниях, много больших размеров сечения цилиндра, то первичное поле E_z^0 практически остается в сечении цилиндра постоянным и можно приближенно записать

$$I_{\text{эф}} = \frac{E_z^0}{Z_{\text{эф}}}, \quad (30)$$

где

$$Z_{\text{эф}} = \frac{2[2\pi - (k_a^2 - k_v^2) \tilde{G}_e]}{S_0 \cdot c \cdot (k_a^2 - k_v^2)}, \quad (31)$$

есть импеданс цилиндра, зависящий от параметров цилиндра и окружающего пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. ГИТТЛ, М., 1950.

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что многие задачи математической физики приводятся к интегральным уравнениям вида

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} K(t-s)\varphi(s)ds = f(t). \quad (\text{A})$$

В частности, уравнения (A) находят важное применение при решении задач дифракции и исследовании процесса переноса лучистой энергии [1].

Хопфу и Винеру [2] удалось в 1931 г. разработать теорию решения однородного уравнения типа (A). В исследованиях этих авторов впервые использована идея факторизации функции голоморфной в полосе, т. е. представления ее в виде произведения $R_+(\lambda) \cdot R_-(\lambda)$, где $R_+(\lambda)$ и $R_-(\lambda)$ — некоторые функции голоморфные, соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Эта идея явилась решающей и для построения теории неоднородных интегральных уравнений типа (A). Уже Хопф [3] вывел ряд важных аналитических формул для решения неоднородного уравнения с симметричным ядром при специальных правых частях. Рейснер [4] показал, как можно, отправляясь от идеи Винера—Хопфа, получить процедуру решения уравнений типа (A) при любом ядре $k(t)$, удовлетворяющем условию

$$e^{\alpha|t|} k(t) \in L_2(-\infty, \infty) \text{ при } \alpha < a > 0.$$

Первое достаточно полное исследование уравнений типа (A) в предположении четности ядра было проведено Фо-

ком [5], [6], где доказано существование и единственность решения в классе абсолютно интегрируемых функций с ограниченной вариацией.

В настоящее время существует более общая теория уравнений типа (А). Основные результаты в этом направлении получены Крейном с привлечением гармонического анализа (теорема Винера и Винера—Леви) и теории операторов в банаховом пространстве. С помощью этих средств в работе [7] доказана теорема о существовании и единственности решения уравнения типа (А) в классе E . Ввиду того что мы в своей работе будем опираться на результаты, полученные в работе [7], то ниже дадим краткое изложение необходимых результатов.

В данной работе мы рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} \{k(t-s) + p(t,s)\} \varphi(s) ds = f(t). \quad (B)$$

Уравнение типа (В) отличается от уравнения типа (А) наличием в ядре регулярного добавка $p(t,s)$ — функции, ограниченной и непрерывной в $(0 \leq s, t < \infty)$. Уравнения подобного типа встречаются при решении задач дифракции в слоистом пространстве. Для примера будет рассмотрен частный случай уравнения типа (В), который встречается при решении задачи дифракции электромагнитного поля на проводящей пластине, погруженной в проводящее полупространство.

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА (А)

Прежде чем сформулировать теорему существования и единственности решения уравнения типа (А), доказанную в работе [7], заметим, что в формулировке теоремы будет фигурировать банахово пространство E комплекснозначных функций на положительной полуоси. Укажем, что, в частности, пространством E может быть любое пространство $L_p (1 \leq p < \infty)$, или пространство всех ограниченных измеримых функций; его подпространство ограниченных и непрерывных функций, а также $C(0, \infty)$, $C^0(0, \infty)$ — пространство непрерывных функций, для которых существует предел:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0, \text{ если } f(t) \in C^0(0, \infty).$$

В работе [7] доказана

Теорема 1. Пусть $k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда для того чтобы уравнение (А) при любом $f(t) \in E$ имело решение и притом только одно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1 - K(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (*)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \arg [1 - K(\lambda)] = 0, \quad (**)$$

где $K(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $k(t)$. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения получается по формуле

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} \gamma(t, s) f(s) ds. \quad (1)$$

Функция $\gamma(t, s)$ ($0 \leq s, t < \infty$) удовлетворяет соотношению

$$\gamma(t, s) = \gamma(t - s, 0) + \gamma(0, s - t) + \int_0^{\infty} \gamma(t - r, 0) \gamma(0, s - r) dr, \quad (2)$$

$$\gamma(t, 0) = \gamma(0, t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Функции $\gamma(t, 0)$ и $\gamma(0, t)$ принадлежат классу $L_1(0, \infty)$ и определены однозначно соотношениями

$$G_+(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} \gamma(t, 0) e^{i\lambda t} dt, \quad (3)$$

$$G_-(\lambda) = 1 + \int_0^{\infty} \gamma(0, t) e^{-i\lambda t} dt, \quad (4)$$

$$[1 - K(\lambda)]^{-1} = G_+(\lambda) \cdot G_-(\lambda), \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (5)$$

где функции $G_+(\lambda)$ и $G_-(\lambda)$ голоморфны и не имеют нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскости, причем $G_+(\infty) = 1$ и $G_-(\infty) = 1$.

Доказательство теоремы существенным образом использует возможность и единственность факторизации (5) функции $[1 - K(\lambda)]^{-1}$.

Заметим, что если функция $k(t)$ четная, то $K(\lambda) = K(-\lambda)$, и для выполнения теоремы достаточно условия (*). Тогда

$$G_-(\lambda) = G_+(-\lambda) \text{ при } \text{Im } \lambda \geq 0 \quad (5')$$

и

$$\gamma(t, 0) = \gamma(0, t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Резольвента $\gamma(t, s)$ при этом также будет симметрична и формула (2) примет вид

$$\gamma(t, s) = \gamma(|t-s|, 0) + \int_0^{\min(t,s)} \gamma(t-r, 0) \gamma(0, s-r) dr. \quad (6)$$

В дальнейшем нам понадобится линейный ограниченный оператор Γ , который порождается функцией $\gamma(t, s)$ в пространстве E :

$$\Gamma f = \int_0^\infty \gamma(t, s) f(s) ds. \quad (7)$$

Норму оператора Γ легко оценить:

$$\|\Gamma\|_E \leq \|h\|_{L_1},$$

где

$$h(t) = |\gamma(t, 0)| + \gamma(0, -t) + \int_{-\infty}^\infty |\gamma(t-r, 0) \cdot \gamma(0, -r)| f dr,$$

откуда

$$\begin{aligned} \|h\|_{L_1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(t, 0)| dt + \int_{-\infty}^\infty |\gamma(0, -t)| dt + \\ &+ \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |\gamma(t-r, 0) \gamma(0, -r)| dr dt \leq \\ &\leq \| \gamma_1 \|_{L_1} + \| \gamma_2 \|_{L_1} + \| \gamma_1 \|_{L_1} \cdot \| \gamma_2 \|_{L_1}, \end{aligned}$$

где

$$\| \gamma_1 \|_{L_1} = \int_0^\infty |\gamma(t, 0)| dt; \quad \| \gamma_2 \|_{L_1} = \int_0^\infty |\gamma(0, t)| dt. \quad (8)$$

Следовательно, имеем оценку нормы оператора Γ в пространстве E в виде

$$\|\Gamma\|_E \leq \|\gamma_1\|_{L_1} + \|\gamma_2\|_{L_1} + \|\gamma_1\|_{L_1} \cdot \|\gamma_2\|_{L_1}. \quad (9)$$

В случае четной функции $k(t)$ имеем

$$\|\gamma_1\|_{L_1} = \|\gamma_2\|_{L_1} = N \quad (10)$$

и

$$\|\Gamma\|_E \leq (N + 2). \quad (11)$$

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА (B)

Относительно уравнения (B) может быть сформулирована

Теорема 2. Если выполнены условия (*) и (**), а оператор P , порождаемый функцией $p(t, s)$ в E , вполне непрерывен в E и, кроме того, уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} A(t, s) \varphi(s) ds = 0, \quad (12)$$

где

$$A(t, s) = p(t, s) + \int_0^{\infty} \gamma(t, u) p(u, s) du, \quad (12')$$

имеет только тривиальное решение $\varphi \equiv 0$, то уравнение (B) разрешимо при любом $f(t) \in E$.

Доказательство. Перепишем уравнение (B) в операторной форме:

$$\varphi - K\varphi - P\varphi = f. \quad (13)$$

K и P — операторы, порождаемые соответственно функциями $k(t-s)$ и $p(t, s)$ в классе E .

Из условий (*) и (**) в силу теоремы 1 следует существование ограниченного обратного оператора

$$(E - K)^{-1} = E + \Gamma.$$

Поддействовав данным оператором на уравнение (13), получим

$$\varphi - A\varphi = g, \quad (14)$$

где

$$g = (E - K)^{-1} f = (E + \Gamma) f, \text{ причем } g \in E, \quad (15)$$

а

$$A = (E - K)^{-1} \cdot P = (E + \Gamma) \cdot P = P + \Gamma \cdot P. \quad (16)$$

Так как по предположению оператор P вполне непрерывен в E , то в силу ограниченности оператора $(E - K)^{-1}$ оператор A будет также вполне непрерывен в E . Уравнение (14) есть операторное уравнение с вполне непрерывным оператором в банаховом пространстве E . Согласно условиям (12) теоремы 2 $\lambda = 1$ не есть точка спектра, поэтому уравнение (14) разрешимо при любой $g \in E$, и его решение $\varphi \in E$ единственно. Таким образом теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае выполнения условий теоремы 2 можно использовать квадратурные формулы для приближенного решения уравнения (B), иными словами, заменить вполне непрерывный оператор A конечномерным, для которого (14) сводится к системе алгебраических уравнений. Заметим, что для решения уравнения (B) нам необходимо знать резольвенту $\gamma(t, s)$ соответствующего уравнения (A).

При решении конкретных уравнений типа (B) часто удобно пользоваться методом, основанным на процессе последовательных приближений для оператора A , уравнения (14).

Теорема 3. Если выполнены условия (*) и (**), а функция $p(t, s)$ такова, что оператор $P(E) \in E$ и $\|(E + \Gamma) \times \times P\| < 1$, то для любого $f \in E$ решение уравнения (B) существует и единственно.

Доказательство. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2, имеем, что в силу условий (*) и (**) справедливо уравнение (14), т. е.

$$(E - A)\varphi = g. \quad (17)$$

В отличие от теоремы 2 здесь оператор A не является вполне непрерывным в силу более слабых требований, накладываемых на оператор P . Но в силу условия (17) по теореме Банаха оператор $(E - A)$ имеет ограниченный обратный оператор, и ряд Неймана для него сходится по норме в E . Процесс последовательных приближений сходится при любом $f \in E$ и

$$\varphi = (E - A)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} A^n g,$$

откуда следует, что решение уравнения (B) при выполнении условий теоремы 3 существует и единственно.

При выполнении условий теоремы 3 мы получаем следующую схему решения уравнения (B):

$$\varphi(t) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} A_n(t, s) f(s) ds, \quad (18)$$

где

$$A_n(t, s) = \int_0^{\infty} A(t, u) A_{n-1}(u, s) du, \quad (19)$$

а

$$A_1(t, s) = A(t, s) = p(t, s) + \int_0^{\infty} \gamma(t, v) \cdot p(v, s) dv. \quad (20)$$

Ряд (18) сходится по норме пространства E . В частности, если E есть пространство $C^0(0, \infty)$, то ряд сходится абсолютно и равномерно, а норма оператора P оценивается неравенством

$$\|p\|_{C^0} \leq \max_{0 \leq t < \infty} \int_0^{\infty} |p(t, s)| ds. \quad (21)$$

Условие (17) согласно (11) и (21) для четной функции $k(t)$ будет иметь вид

$$[1 + N(2 + N)] \cdot \max_{0 \leq t < \infty} \int_0^{\infty} |p(t, s)| ds < 1, \quad (22)$$

где

$$N = \|\gamma\|.$$

Рассмотрим теперь для примера частный случай уравнения типа (B).

§ 3. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЕ, ПОГРУЖЕННОЙ В ПРОВОДЯЩЕЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Как показано в работе [8], задача дифракции электромагнитной волны на проводящей полубесконечной пластине, погруженной на глубину H в проводящее полупространство, сводится к решению интегрального уравнения

$$\varphi(t) - \frac{\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \{k_0 [(1-i)|t-s|] + p_0(t+s)\} \varphi(s) ds = e^{-(1-i)t}, \quad (23)$$

где $k_0 [(1-i)|t-s|]$ — функция Макдональда.

$$p_0(t) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t - 2H\mu} \frac{\mu - \tau}{\mu + \tau} \cdot \frac{d\tau}{\mu}; \quad \mu = \sqrt{\tau^2 - 2i} \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad (24)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{(\sin \delta - \operatorname{sh} \delta) + i(\operatorname{sh} \delta + \sin \delta)}{\operatorname{ch} \delta + \cos \delta}}, \quad (25)$$

ρ_1 и ρ_2 — соответственно удельное сопротивление проводящего полупространства и пластины, а δ — параметр, характеризующий толщину пластины в единицах длин волны в пластине.

Проверим выполнение условий (*) и (**). Условие (**) выполняется при выполнении условия (*) в силу четности функции $k(t) = \frac{\beta}{\pi} k_0[(1-i)|t|]$. Для проверки условия (*) возьмем преобразование Фурье от функции $k(t)$, получим

$$k(\lambda) = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda^2 - 2i}}; \quad (-\infty < \lambda < \infty) \quad \operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - 2i} > 0. \quad (26)$$

Из (25) видно, что $\operatorname{Re} \beta < 0$, поэтому

$$1 - K(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Для того чтобы применить теорему 3 к нашему уравнению (23), необходимо проверить, при каких условиях выполняется неравенство (17), которое при четной функции $k(t)$ имеет вид (22). Следовательно, мы должны вычислить

$$N = \int_0^{\infty} |\gamma(t, 0)| dt \quad (27)$$

и

$$\|p\| \leq \max_{0 < t < \infty} \frac{|\beta|}{\pi} \int_0^{\infty} |p_0(t+s)| ds. \quad (28)$$

Проведем оценку $\|P\|$. Для этого выражение (24) подставим в (28), тогда

$$\|P\| \leq \max_{0 \leq t < \infty} \frac{|\beta|}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} \left| e^{-\mu(t+s)-2H\mu} \frac{\mu - \tau}{\mu + \tau} \right| \frac{d\tau}{|\mu|}.$$

Так как $\operatorname{Re} \mu = \operatorname{Re} \sqrt{\tau^2 - 2i} = \sqrt{\frac{\sqrt{\tau^4 + 4 + \tau^2}}{2}} \geq 1$

при $0 \leq \tau < \infty$, то

$$\begin{aligned} \|P\| &\leq \frac{|\beta|}{\pi} \max_{0 \leq t < \infty} \int_0^{\infty} e^{-s} ds \int_0^{\infty} \left| e^{-\mu t - 2H\mu} \frac{\mu - \tau}{\mu + \tau} \right| \frac{d\tau}{|\mu|} = \\ &= \frac{|\beta|}{\pi_0} \int_0^{\infty} \left| \frac{e^{-2H\mu}}{\mu} \frac{\mu - \tau}{\mu + \tau} \right| d\tau \end{aligned}$$

или

$$\|P\| < |\beta| \cdot m(H), \quad (29)$$

где

$$m(H) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{mod} \left\{ \frac{e^{-2H\mu} (\mu - \tau)}{\mu (\mu + \tau)} \right\} d\tau. \quad (30)$$

Величина оценочного коэффициента $m(H)$ в зависимости от H представлена на рис. 1. Функция $m(H) < 0,2$ и убывает при возрастании H .

Проведем оценку величины N . Для этого нам необходимо найти $\gamma(t, 0)$. Рассмотрим функцию $G_+(\lambda)$. Согласно (5), (5') и (26) имеем

$$[1 - K(\lambda)]^{-1} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2i}}{\sqrt{\lambda^2 - 2i} - \beta} = G_+(\lambda) \cdot G_-(\lambda) = G_+(\lambda) \cdot G_+(-\lambda),$$

откуда

$$G_+(\lambda) = \frac{1}{G_+(-\lambda)} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2i}}{\sqrt{\lambda^2 - 2i} - \beta}. \quad (31)$$

Поскольку $\operatorname{Re} \beta < 0$ и $G_+(\lambda)$ голоморфна при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, то легко видеть из (31), что при $\operatorname{Im} \lambda < 0$ эта функция имеет только одну особую точку, точнее точку ветвления при $\lambda = -(1+i)$. Проведя разрез вдоль луча $-(1+i)S$ ($1 \leq S < \infty$), мы однознач-

но определим функцию $G_+(\lambda)$ формулой (31), выбрав ветвь этой функции, удовлетворяющую условию $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - 2i} > 0$.

Тогда можем представить функцию $G_+(\lambda) - 1 \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ в виде интеграла Коши:

$$G_+(\lambda) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{G_+(z) - 1}{z - \lambda} dz, \quad (32)$$

где контур C состоит из окружности радиуса R и разреза $z = -(1+i)s$ ($1 \leq s < R$). При $R \rightarrow \infty$, ввиду того что $G_+(z) - 1 \rightarrow 0$, получим интеграл только по правому и левому берегу разреза. Согласно (31) найдем

$$\begin{aligned} G_+(-(1+i)s - 0) - G_+(-(1+i)s + 0) &= \\ &= -\frac{2(1+i)\beta\sqrt{s^2-1}}{G_+[(1+i)s][2i(s^2-1) - \beta^2]}. \end{aligned} \quad (33)$$

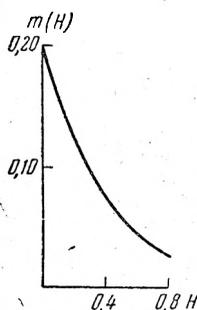


Рис. 1

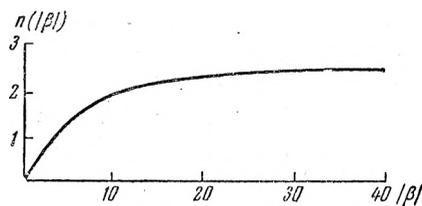


Рис. 2

Учитывая (32) и (33), получим

$$G_+(\lambda) = 1 - \frac{2\beta}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sqrt{s^2-1} ds}{G_+[(1+i)s][2i(s^2-1) - \beta^2][(1+i)s + \lambda]}. \quad (34)$$

Из сравнения формул (34) и (3) легко усматривается, что

$$\gamma(t, 0) = \frac{2\beta i}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-(1-i)s} \sqrt{s^2-1} ds}{G_+[(1+i)s][2i(s^2-1) - \beta^2]}. \quad (35)$$

Подставив полученное выражение для $\gamma(t, 0)$ в (27), найдем оценку

$$N \leq \frac{2|\beta|}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{s^2-1} ds}{|G_+[1+i]s| |2i(s^2-1) - \beta^2| \cdot s}. \quad (36)$$

Так как $G_+(\lambda)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости, то

$$\frac{1}{|G_+[1+i]s|} \leq C.$$

Ввиду того что $\operatorname{Re} \beta < 0$, а $\operatorname{Im} \beta > 0$, имеем

$$\begin{aligned} |2i(s^2-1) - \beta^2| &= \sqrt{(\operatorname{Re}^2 \beta - \operatorname{Im}^2 \beta)^2 + 4(s^2-1) - \operatorname{Im} \beta \cdot \operatorname{Re} \beta} \geq \\ &\geq \sqrt{4(s^2-1)^2 + |\beta|^4}. \end{aligned}$$

Тогда

$$N \leq C \cdot n(|\beta|); \quad n(|\beta|) = \frac{2|\beta|}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{s^2-1} ds}{s \sqrt{4(s^2-1)^2 + |\beta|^4}}. \quad (37)$$

Величина n в зависимости от $|\beta|$ приведена на рис. 2.

Константу C легко оценить непосредственно из аналитического представления функции $G_+(\lambda)$. Мы не будем давать эти довольно громоздкие выкладки, а приведем значение константы:

$$C = \sqrt{|\alpha| + 1}, \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\beta^2 + 2i}. \quad (38)$$

Зная оценку $\|P\|$ (29) и оценку N (37), можно согласно (17) и (22) получить

$$\|(E + \Gamma)P\| < \{1 + \sqrt{|\alpha| + 1} n(\beta) [2 + \sqrt{|\alpha| + 1} n(\beta)]\} |\beta| m(H) < 1. \quad (39)$$

Это условие дает возможность применять к нашему уравнению теорему 3 и, следовательно, решать его методом последовательных приближений.

Зная параметры задачи H и β , легко вычислить $n(|\beta|)$ и $m(H)$. Если при этом выполняется условие (39), то применяем метод последовательных приближений, причем неравенство (39), оценивая норму оператора $(E + \Gamma) \cdot p$, дает возможность оценить необходимое количество последовательных приближений для получения требуемой точности.

Так как каждое последовательное приближение требует решения уравнения типа (А), то применять метод последовательных приближений удобно, когда для получения требуемой точности достаточно взять не более двух приближений. Если необходимо брать много последовательных приближений, а также при невыполнении условия (39) при данных β и H , выгоднее пользоваться приближением оператора A конечномерным оператором (квадратурной формулой) и решать получаемую при этом систему алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. ИЛ, М., 1962.
2. Винер Н., Хопф Е. Über eine Klasse singularer Integralgleichungen. «Sitz. Acad. Wiss.», Berlin, 1931.
3. Хопф Е. Mathematical problems of radiative equilibrium. «Cambridge tracts.», 31, 1933.
4. Рейснер Е. On a class of singular intergral equations. «Journ. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.», 20, 1941.
5. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. ДАН СССР, 36, № 4—5, 1942.
6. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. «Матем. сборник», 14, № 1—2, 1944.
7. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. «Успехи матем. наук», XIII, вып. 5, 1958.
8. Дмитриев В. И. Дифракция электромагнитных волн на проводящей пластине, расположенной в проводящем полупространстве. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., № 6, 1962.

В. И. ДМИТРИЕВ

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В МЕТОДЕ ЧАСТОТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Метод частотного зондирования является методом геофизической разведки, основанным на исследовании изменений электромагнитного поля в зависимости от частоты при различных подстилающих основаниях. Источником поля в методе частотного зондирования служит заземленный кабель. Измеряемыми величинами являются горизонтальная составляющая электрического и вертикальная составляющая магнитного полей. Измерения производятся при различных фиксированных частотах в диапазоне инфранизких частот (от 200 $\mu\text{ц}$ и ниже). Полученная кривая частотного зондирования зависит от структуры подстилающего основания. Зная теоретическую зависимость кривой частотного зондирования от параметров среды, можно определить эти параметры методом сравнения теоретических кривых с полученной экспериментальной кривой. Расчет теоретических кривых при многослойной структуре очень сложен. В работе [1] был предложен алгоритм, позволяющий производить расчет электромагнитного поля в любой многослойной среде. На основании предложенного алгоритма в Вычислительном центре МГУ была создана программа, на основании которой проводились необходимые расчеты [2].

В настоящей работе предлагается алгоритм расчета электромагнитного поля в методе частотного зондирования, который позволяет резко сократить объем вычислений при сохранении той же степени точности.

1. Пусть среда представляет собой n -слойную структуру. Волновое число верхнего полупространства $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Границу раздела полупространства и проводящей слоистой среды

примем за плоскость $z=0$, m -ый слой находится при $z_m < z < z_{m-1}$, волновое число этого слоя k_m . В расчеты входит мощность слоя, равная $h_m = z_{m-1} - z_m$. Подстилающее основание представляет собой проводящее полупространство при $z < z_{n-1}$ с волновым числом k_n . В проводящей среде мы будем пренебрегать током смещения по сравнению с током проводимости, т. е. считать

$$K_m \approx (1 + i) \frac{2\pi}{\Lambda_m}, \quad \Lambda = \frac{c}{\sqrt{\sigma_m \nu}}, \quad (1)$$

где σ_m — проводимость m -го слоя, ν — частота в герцах.

На поверхности слоистой среды в начале координат находится электрический диполь длины l , направленный по оси OX , в котором задан ток

$$I = I_0 e^{-i\omega t}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (2)$$

Как известно, электромагнитное поле при этом может быть выражено через электрический вектор Герца, имеющий две компоненты

$\bar{\Pi} = \{\Pi_x, 0, \Pi_z\}$, по формулам

$$\bar{H} = \frac{l_0 l}{c} \operatorname{rot} \bar{\Pi}, \quad (3)$$

$$\bar{E} = \frac{i\omega l_0 l}{c^2} \left\{ \bar{\Pi} + \frac{1}{k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{\Pi} \right\}, \quad (4)$$

где k^2 — кусочно-постоянная функция $k^2 = k_m^2$ при $z_{m-1} > z > z_m$.

Вектор Герца является решением краевой задачи

$$\Delta \bar{\Pi} + k^2 \bar{\Pi} = 0,$$

на границах раздела сред при $z = z_m$ должны выполняться краевые условия непрерывности функций:

$$\Pi_x; \Pi_z; \frac{\partial \Pi_x}{\partial z}; \frac{1}{k^2} \operatorname{div} \bar{\Pi}.$$

В начале координат Π_x имеет особенность типа $\frac{1}{r}$, а на бесконечности должен удовлетворяться принцип излучения.

Как показано в работе [1], если представить составляющие вектора Герца в виде

$$\Pi_x = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cdot X(\lambda, z) d\lambda, \quad (5)$$

$$\Pi_z = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cdot Z(\lambda, z) d\lambda, \quad (6)$$

то подынтегральные функции $X(z)$ и $Z(z)$ определяются как решения следующих краевых задач:

$$I \quad X(z) - \alpha^2 X(z) = 0, \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

при $z=0$ функция $X(z)$ непрерывна, а ее производная терпит разрыв

$$X'(z = -0) - X'(z = +0) = 2\lambda, \quad (7)$$

на других границах раздела при $z=z_m$ ($m=1, 2, \dots, n-1$) $X(z)$ и $X'(z)$ непрерывны, а на бесконечности функция $X(z)$ стремится к нулю.

$$II \quad Z''(z) - \alpha^2 Z(z) = 0,$$

на всех границах раздела при $z=z_m$ ($m=0, 1, \dots, n-1$) непрерывны функции $Z(z)$ и $1/k^2 \{X(z) + Z'(z)\}$, а на бесконечности $Z(z)$ стремится к нулю.

Решение задачи II затруднено тем, что условия сопряжения при $z=z_m$ являются неоднородными и зависят от функции $X(z)$. Как показано в работе [3], удобнее вместо функции $Z(z)$ ввести функцию $Y(z)$, связанную с $Z(z)$ соотношением

$$Y(z) = Z(z) + \frac{1}{\lambda^2} \cdot X'(z). \quad (8)$$

Тогда для функции $Y(z)$ будет более простая краевая задача:

$$III \quad Y''(z) - \alpha^2 Y(z) = 0,$$

при $z=0$ функция $\frac{1}{k^2} Y'(z)$ непрерывна, $Y(z)$ терпит разрыв

$$Y(z = -0) - Y(z = +0) = \frac{2}{\lambda}, \quad (9)$$

на других границах раздела при $z=z_m$ ($m=1, 2, \dots, n-1$) непрерывны функции $Y(z)$ и $1/k^2 Y'(z)$. Полученная задача для $Y(z)$ не зависит от решения $X(z)$, поэтому задачи I и III могут решаться независимо.

Мы несколько видоизменим задачи I и III, учитывая, что необходимо вычислять только E_x и H_z при $x=0$, $z=0$, которые, согласно (3)–(6), равны

$$H_z = -\frac{I_0 l}{c} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cdot X(z) d\lambda, \quad (10)$$

$$E_x = \frac{i\omega I_0 l}{c^2} \left\{ \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) X(z) d\lambda + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) [X(z) + Z'(z)] d\lambda \right\}, \quad (11)$$

причем будем рассчитывать поля в квазистационарной зоне, т. е. положим $k_0 = 0$. При $x = 0$, $z = 0$, учитывая непрерывность функций $X(z)$ и $\frac{1}{k^2} [X(z) + Z'(z)]$ и заменяя

$$Z'(z) = Y'(z) - \frac{1}{\lambda^2} X''(z) = Y'(z) + \left(\frac{k^2}{\lambda^2} - 1 \right) X(z),$$

получим

$$H_z = \frac{I_0 l}{c} \int_0^{\infty} J_1(\lambda y) \cdot X_0(\lambda) d\lambda, \quad (12)$$

$$E_x = \frac{i\omega I_0 l}{c^2} \left\{ \int_0^{\infty} J_0(\lambda y) X_0(\lambda) d\lambda - \right. \\ \left. - \frac{1}{k_1^2 y} \int_0^{\infty} J_1(\lambda y) \left[Y_0'(\lambda) + \frac{k_1^2}{\lambda^2} X_0(\lambda) \right] d\lambda \right\}, \quad (13)$$

где $X_0(\lambda) = X(z=0)$; $Y_0'(\lambda) = Y'(z=0)$.
Введем функции $u(z)$ и $v(z)$ такие, что

$$X(z) = 2\lambda u(z); \quad V(z) = \frac{2}{\lambda} v(z),$$

и определим граничные условия для функций $u(z)$ и $v(z)$ при $z = 0$:

$$u(z = +0) = u(z = -0); \quad v(z = -0) - v(z = +0) = 1;$$

$$u'(z = -0) - u'(z = +0) = 1;$$

$$\frac{1}{k_0^2} v'(z = +0) = \frac{1}{k_1^2} v'(z = -0).$$

При $z \geq 0$ функции $u(z)$ и $v(z)$ имеют вид:

$$u(z) = Ae^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z},$$

$$v(z) = Be^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} z}.$$

Следовательно,

$$u'(z = +0) = -\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} u(z = +0),$$

$$v'(z = +0) = -\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} v(z = +0).$$

Подставив эти соотношения в граничные условия и исключив $u(z = +0)$ и $v(z = +0)$, получим граничные условия

$$u'(z = -0) + \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} u(z = -0) = 1,$$

$$v'(z = -0) \frac{k_0^2}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} + v(z = -0) = 1.$$

Так как мы рассматриваем поле в квазистационарной зоне, т. е. $k_0 = 0$, то окончательно краевые условия будут иметь вид

$$u' + \lambda u = 1, \quad v = 1 \quad \text{при } z = 0.$$

После проведенных выше преобразований получим, что поля вычисляются по формулам:

$$H_z = \frac{2I_0 l}{c} \int_0^{\infty} J_1(\lambda y) \cdot u_0(\lambda) \lambda^2 d\lambda, \quad (14)$$

$$E_x = \frac{2i\omega I_0 l}{c^3} \left\{ \int_0^{\infty} J_0(\lambda y) \cdot u_0(\lambda) \lambda d\lambda - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{k_1^2 y} \int_0^{\infty} J_1(\lambda y) [v_0'(\lambda) + k_1^2 u_0(\lambda)] d\lambda \Big\} = \\
 & = \frac{2i\omega I_0 l}{c^2} \left\{ \frac{1}{y} \int_0^{\infty} \frac{dJ_1(\lambda y)}{d\lambda} \cdot u_0(\lambda) \lambda d\lambda - \frac{1}{k_1^2} \int_0^{\infty} J_1(\lambda y) v_0'(\lambda) d\lambda \right\}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где $u_0 = u(z=0)$, $v_0' = v'(z=0)$, а функции $u(z)$ и $v(z)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$IV \quad u''(z) - \alpha^2 u(z) = 0 \text{ при } z \leq 0; \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

k — кусочно-постоянная функция; $k = k_m$ при $z_{m-1} > z > z_m$.
При $z = 0$ имеем граничное условие

$$u' + \lambda u = 1, \quad (16)$$

а на границах раздела, т. е. при $z = z_m$ ($m=1, 2, \dots, n-1$) функция $u(z)$ и ее производная $u'(z)$ непрерывны. На бесконечности функция $u(z)$ стремится к нулю.

$$V \quad v''(z) - \alpha^2 v(z) = 0, \text{ при } z \leq 0, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

k — кусочно-постоянная функция, $k = k_m$ при $z_{m-1} > z > z_m$.
При $z = 0$ имеем граничное условие

$$v = 1, \quad (17)$$

а на границах раздела, т. е. при $z = z_m$ ($m=1, 2, \dots, n-1$) функции $v(z)$ и $\frac{1}{k^2} v'(z)$ непрерывны. На бесконечности функция $v(z)$ стремится к нулю.

2. Функции $u(z)$ и $v(z)$ можно представить в виде:

$$u(z) = \frac{u_m}{1 + a_{m+1}} \{e^{\alpha_{m+1}(z-z_m)} + a_{m+1} e^{-\alpha_{m+1}(z-z_m)}\},$$

$$v(z) = \frac{v_m}{1 + b_{m+1}} \{e^{\alpha_{m+1}(z-z_m)} + a_{m+1} e^{-\alpha_{m+1}(z-z_m)}\}$$

при $z_{m+1} < z < z_m$, где $\alpha_m = \sqrt{\lambda^2 - k_m^2}$, u_m , v_m , a_m , b_m — константы, зависящие от параметра λ . Так как на бесконечности $u(z)$ и $v(z)$ должны стремиться к нулю, то $a_n \equiv 0$ и $b_n \equiv 0$.

Нам необходимо знание функций u_0 и v_0 . Используя граничные условия (16) и (17), легко получим

$$u_0 = \frac{1 + a_1}{\lambda + \alpha_1 + (\lambda - \alpha_1) a_1}, \quad (18)$$

$$v_0 = \alpha_1 \frac{1 - b_1}{1 + b_2}. \quad (19)$$

Для расчета a_1 и b_1 нетрудно получить рекуррентные формулы. Для этого используем граничные условия при $z = z_m$, тогда

$$\frac{u_{m-1}}{1 + a_m} \{e^{-\alpha_m h_m} + a_m e^{\alpha_m h_m}\} = u_m,$$

$$\frac{\alpha_m u_{m-1}}{1 + a_m} \{e^{-\alpha_m h_m} - a_m e^{\alpha_m h_m}\} = \frac{\alpha_{m+1} u_m (1 - a_{m+1})}{1 + a_{m+1}}.$$

Отсюда

$$a_m = \frac{(\alpha_m - \alpha_{m+1}) + a_{m+1}(\alpha_m + \alpha_{m+1})}{(\alpha_m + \alpha_{m+1}) + a_{m+1}(\alpha_m - \alpha_{m+1})} e^{-2\alpha_m h_m}, \quad (20)$$

где

$$h_m = z_{m-1} - z_m; \quad \alpha_m = \sqrt{\lambda^2 - k_m^2}; \quad a_n \equiv 0.$$

Аналогично имеем

$$\frac{v_{m-1}}{1 + b_m} \{e^{-\alpha_m h_m} + b_m e^{\alpha_m h_m}\} = v_m,$$

$$\frac{\alpha_m v_{m-1}}{k_m^2 (1 + b_m)} \{e^{-\alpha_m h_m} - b_m e^{\alpha_m h_m}\} = \frac{\alpha_{m+1} v_m (1 - b_{m+1})}{k_{m+1}^2 (1 + b_{m+1})},$$

откуда

$$b_m = \frac{(k_{m+1}^2 \alpha_m - k_m^2 \alpha_{m+1}) + b_{m+1} (k_{m+1}^2 \alpha_m + k_m^2 \alpha_{m+1})}{(k_{m+1}^2 \alpha_m + k_m^2 \alpha_{m+1}) + b_{m+1} (k_{m+1}^2 \alpha_m - k_m^2 \alpha_{m+1})} e^{-2\alpha_m h_m}, \quad (21)$$

где

$$h_m = z_{m-1} - z_m; \quad \alpha_m = \sqrt{\lambda^2 - k_m^2}; \quad b_n \equiv 0.$$

3. Для получения расчетных формул перейдем к безразмерным параметрам $r = y/h_1$; $\xi = \lambda_1/h$; $v_m = h_m/h_1$; $\mu_m = \sigma_m/\sigma_1$. Для этого в интегралах (14), (15) сделаем замену переменного $\lambda = t/h_1$:

$$H_z = \frac{2I_0 l}{c y^2} \cdot r^2 \int_0^{\infty} J_1(rt) \cdot u_0(t) t^2 dt, \quad (22)$$

$$E_x = \frac{2i\omega I_0 l}{c^2 y} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dJ_1(rt)}{dt} \cdot n_0(t) t dt + \frac{i\xi^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} J_1(rt) v_0'(t) dt \right\}, \quad (23)$$

где согласно (18) — (19) имеем

$$u_0(t) = \frac{1 + a_1(t)}{(t + \beta_1) + (t - \beta_1) a(t)}, \quad (24)$$

$$v_0'(t) = \beta_1 \cdot \frac{1 - b_1(t)}{1 + b_1(t)}, \quad (25)$$

а функции $a_1(t)$ и $b_1(t)$ находим, согласно (20), (21), из рекуррентных соотношений

$$a_m = \frac{(\beta_m - \beta_{m-1}) + a_{m-1}(\beta_m + \beta_{m-1})}{(\beta_m + \beta_{m-1}) + a_{m-1}(\beta_m - \beta_{m-1})} e^{-2\beta_m v_m}; \quad a_n \equiv 0, \quad (26)$$

$$b_m = \frac{(\mu_{m+1} \beta_m - \mu_m \beta_{m+1}) + b_{m+1}(\mu_{m+1} \beta_m + \mu_m \beta_{m+1})}{(\mu_{m+1} \beta_m + \mu_m \beta_{m+1}) + b_{m+1}(\mu_{m+1} \beta_m - \mu_m \beta_{m+1})} e^{-2\beta_m v_m}; \quad (27)$$

$$b_n \equiv 0,$$

где

$$\beta_m = \sqrt{t^2 - i\mu_m \frac{8\pi^2}{\xi^2}}.$$

Из полученных соотношений видно, что при больших t функции $a(t)$ и $b_1(t)$ будут монотонными быстроубывающими, точнее

$$a_1 \sim 0 (e^{-2t}),$$

$$b_1 \sim 0 (e^{-2t}).$$

Функции $u_0(t)$ и $v_0'(t)$ можно представить в виде

$$u_0(t) = \frac{1}{t + \beta_1} + U(t), \quad (28)$$

где

$$V(t) = \frac{2a_1 \cdot \beta_1}{(t + \beta_1) [(t + \beta_1) + (t - \beta_1) a_1]}, \quad (29)$$

$$v_0(t) = \beta_1 - V(t), \quad (30)$$

а

$$V(t) = \frac{2\beta_1 b_1}{1 + \beta_1}. \quad (31)$$

В случае однородного полупространства ($n=1$) имеем $a_1=b_1=0$, тогда $V(t) \equiv V(t) \equiv 0$, откуда и находим поля для однородного полупространства

$$H_z^0 = \frac{2I_0 l}{cy^2} \cdot r^2 \int_0^\infty J_0(rt) \frac{t^2 dt}{t + \beta_1},$$

$$E_x^0 = \frac{2i\omega I_0 l}{c^2 y} \left\{ \int_0^\infty \frac{dJ_1}{dt} \cdot \frac{t dt}{t + \beta_1} + \frac{i\xi^2}{8\pi^2} \int_0^\infty J_1(rt) \cdot \beta_1 dt \right\}.$$

Интегралы легко вычисляются, и мы получаем

$$H_z^0 = \frac{3I_0 l c}{2\pi\sigma_1 \omega y^4} \cdot F_0; \quad F_0 = i - \left[i + (1 + i) \frac{2\pi r}{\xi} + \frac{8\pi^2 r^2}{3\xi^2} \right] \cdot e^{-(1-i)\frac{2\pi r}{\xi}}; \quad (32)$$

$$E_x^0 = \frac{I_0 l}{\pi\sigma_1 y^3} \cdot \Phi_0; \quad \Phi_0 = -1 + \left[0,5 + (1 - i) \frac{\pi r}{\xi} \right] e^{-(1-i)\frac{2\pi r}{\xi}}. \quad (33)$$

Используя (28)—(33), согласно (22), (23), имеем окончательно выражения для полей:

$$H_z = \frac{3I_0 l c}{2\pi\sigma_1 \omega y^4} \{F_0 + F\}, \quad F_x = \frac{I_0 l}{\pi\sigma_1 y^3} \{\Phi_0 + \Phi\}, \quad (34)$$

$$F = \frac{8\pi^2 r^2}{3\xi^2} \int_0^\infty J_1(rt) U(t) t^2 dt, \quad (35)$$

$$\Phi = \frac{r^2}{2} \int_0^{\infty} J_1(rt) V(t) dt + i \frac{4\pi^2 r^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} \frac{dJ_1(rt)}{dt} \cdot U(t) t dt, \quad (36)$$

где мнимые и действительные части функций $V(t) \cdot t^2$, $V(t)$ и $V(t) \cdot t$ являются монотонно стремящимися к нулю функциями при $t \gg 1$. Таким образом мы приходим к необходимости расчета интегралов вида

$$N_1 = \int_0^{\infty} J_1(rt) \cdot f(t) t^2 dt, \quad (37)$$

$$N_2 = \int_0^{\infty} J_1(rt) \cdot \varphi(t) dt, \quad (38)$$

$$N_3 = \int_0^{\infty} \frac{dJ_1(rt)}{dt} \cdot \psi(t) t dt, \quad (39)$$

причем $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — ограниченные медленно меняющиеся функции, не обращающиеся в нуль при $t=0$ и ведущие себя при $t \gg 1$ так, что $f(t)t^2$, $\varphi(t)$ и $\psi(t) \cdot t$ монотонно стремятся к нулю на бесконечности. Рассмотрим способы вычислений подобных интегралов.

4. Рассмотрим для примера подробно метод расчета и оценку точности вычислений для интеграла N_1 . Так как при численном интегрировании мы должны ограничить участок интегрирования, т. е. вычислить интеграл

$$N_1 = \int_0^T J_1(rt) \cdot f(t) t^2 dt, \quad (40)$$

то внесем ошибку

$$\Delta_1 N_1 = |N_1 - \tilde{N}_1| = \text{mod} \int_T^{\infty} J_0(rt) t^2 dt.$$

Оценку этой погрешности получить легко, считая T достаточно большим, поэтому $f(t)t^2$ при $t \geq T$ является монотонно убывающей функцией. Тогда, интегрируя по частям, имеем

$$\Delta_1 N_1 \leq \text{mod} \left\{ \frac{f(T)T^2}{r} \cdot J_0(rT) + \frac{1}{r} \int_T^{\infty} J_0(rt) \cdot \frac{d}{dt} [f(t) t^2] dt \right\}.$$

Так как $|I_0(rt)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi r T}}$ при $t \geq T$, то

$$\Delta_1 N_1 \leq \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi r T}} \left\{ |f(T) T^2 + \int_T^\infty \left| \frac{d}{dt} (ft^2) \right| dt \right\}.$$

Если функция $f(t) \cdot t^2$ монотонно убывающая, то производная от нее знакпостоянна. Отсюда получим окончательно

$$\Delta_1 N_1 \leq \frac{2T}{r} \sqrt{\frac{2T}{\pi r}} \cdot |f(T)|. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь расчет интеграла \tilde{N}_1 , определяемого формулой (40). Функция $J_1(rt)$ при больших r будет быстроосциллирующей, поэтому при применении обычных квадратурных формул, например формулы Симпсона, нам придется брать очень малый шаг интегрирования. Это неэффективно, так как требует расчета функции $f(t)$ в очень большом числе точек, а функция $f(t)$ в нашем случае считается по рекуррентным формулам значительно дольше, чем $J(rt)$, в особенности при большом числе слоев. В связи с этим выгодно использовать тот факт, что функция $f(t)$ является медленноменяющейся, поэтому вычислив ее в сравнительно небольшом числе точек, можно приближенно заменить на данном отрезке степенным полиномом $\tilde{f}(t)$, который мы и подставим для расчета в интеграл (40), т. е. вычислим

$$\tilde{N}_1 = \int_0^T J_1(rt) \cdot \tilde{f}(t) \cdot t^2 \cdot dt. \quad (42)$$

Ошибка от замены функции $f(t)$ аппроксимирующим полиномом $\tilde{f}(t)$ для всех r равна

$$\Delta_2 \tilde{N} < \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_0^T |f(t) - \tilde{f}(t)| \cdot t \sqrt{t} \cdot dt, \quad (43)$$

здесь мы учли, что $|J_1(rt)| < \sqrt{\frac{2}{\pi r t}}$.

Полученный интеграл N_4 при этом выражается через линейную комбинацию интегралов вида

$$\int_0^T J_1(rt) \cdot t^n dt = \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{Tr} J_1(\tau) \tau^n \cdot d\tau. \quad (44)$$

Функции $I_n(x) = \int_0^x J_1(\tau) \tau^n d\tau$ легко вычисляются по рекуррентной формуле

$$I_n(x) = -x^n J_0(x) + nx^{n-1} J_1(x) - n(n-2) I_{n-2}(x). \quad (45)$$

При этом

$$I_0(x) = 1 - J_0(x)$$

$$I_{-1} = \int_0^x \frac{J_1(\tau)}{\tau} d\tau \quad (\text{интегральная функция Бесселя}).$$

Расчетные формулы для функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$ и для интегральной функции Бесселя $\int_0^x \frac{J_1(\tau)}{\tau} d\tau$ хорошо известны.

Часто бывает удобным строить аппроксимирующий полином не для всего участка $(0, T)$, а разбить $(0, T)$ на некоторое число отрезков (T_i, T_{i+1}) и строить полином отдельно для каждого отрезка, что дает возможность понизить порядок полинома, сохраняя заданную точность вычислений.

Совершенно аналогично проводится расчет интегралов N_2 и N_3 . Оценка точности производится так же, как и для N_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Методы расчета электромагнитных полей в слоистых средах. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., № 3, 1956.
2. Жоголев Е. А., Трифонов Н. П., Шахсуваров Д. Н. Расчет электромагнитных полей в слоистых средах. Сб. «Вычисл. методы и программирование», вып. I. Изд-во МГУ, 1962.
3. Ваньян Л. Л. Новый способ определения электромагнитного поля диполя, заземленного на поверхности многослойной изотропной среды. СО АН СССР. «Геология и геофизика», № 12, 1962.