

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

XVI

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

*Под редакцией*

В. И. ДМИТРИЕВА, А. С. ИЛЬИНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
1971

## *Из содержания Т.16, 1971г.,*

<i>В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров.</i> Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред.	<b>48</b>
<i>В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров, И. В. Ильин.</i> Метод решения основной задачи теории индукционного каротажа.	<b>72</b>
<i>Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов, Л.А. Шалкина.</i> Алгоритм численного решения осесимметричной задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей поверхности вращения.	<b>147</b>
<i>В. И. Дмитриев, А. В. Чечкин.</i> О корректных постановках задач синтеза антенн.	<b>164</b>
<i>А. В. Чечкин.</i> Метод заданных диаграмм.	<b>177</b>
<i>А. В. Чечкин.</i> Решения задач синтеза для основных видов антенн.	<b>191</b>
<i>А. В. Чечкин.</i> Решение одной смешанной задачи	<b>203</b>
<i>И. М. Денисова, Г. А. Кокотушкин.</i> О влиянии непроводящей тонкой прослойки на магнито-теллурическое поле в слое переменной мощности.	<b>208</b>
<i>Г. А. Кокотушкин, Э. Л. Шиханович.</i> Магнито-теллурическое поле в слое со скачкообразным изменением мощности.	<b>217</b>

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕКОТОРОГО КЛАССА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Во многих задачах современной электродинамики возникает необходимость расчета электромагнитных полей в изотропных, но неоднородных средах. В частности, решение целого ряда таких задач служит основой теории различных электромагнитных методов, применяемых в геофизических исследованиях. Наиболее эффективным аппаратом численного решения этого класса задач с применением электронных вычислительных машин стали интегральные уравнения. Поэтому важной проблемой является редукция соответствующих граничных задач для уравнений Максвелла к возможно более простым интегральным уравнениям, а также исследование получаемых интегральных операторов и уравнений с точки зрения их конечномерной аппроксимации и возможности численного решения.

В настоящей работе предлагается метод редукции граничных задач электродинамики к системам интегральных уравнений второго рода при некоторых естественных ограничениях относительно электромагнитных характеристик среды. Для упрощения выкладок метод применяется к электродинамическим задачам в средах, параметры которых не зависят от одного избранного направления, что, однако, не ограничивает его общности.

Пусть пространство заполнено изотропной средой с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ , магнитной проницаемостью  $\mu_0$  и проводимостью  $\sigma_0$ , которые будем считать кусочно-дифференцируемыми функциями координат  $y, z$ . Для дальнейшего удобно среду характеризовать всего двумя комплексными кусочно-дифференцируемыми функциями координат  $y, z$ :

$$\epsilon(y, z) = \epsilon_0 + \frac{i\sigma_0}{\omega}; \quad \mu(y, z) = \mu_0 + \frac{i\sigma'_0}{\omega},$$

где  $\omega$  — частота возбуждаемого поля, а  $\sigma'_0$  — магнитная проводимость, введенная в целях симметризации задачи ( $\sigma'_0 \geq 0$ ). В рассматриваемых нами физических задачах  $\sigma'_0 = 0$ .

Рассмотрим гармоническое во времени электромагнитное поле (зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$ ), возбуждаемое в данной среде произвольной системой источников с плотностью  $\vec{j}(M) = \vec{j}(x, y, z)$ . Необходимо найти векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , удовлетворяющие уравнениям Максвелла  $\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu\vec{H}$ ,  $\text{rot } \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} + \vec{j}$ , условию непрерывности касательных компонент на поверхностях разрыва параметров  $\epsilon$  и  $\mu$  и условиям на бесконечности. Предположим далее, что плотность  $\vec{j}(M)$  не зависит от  $x$ . При этом поле  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  может быть составлено из полей двух типов:

1. E-поляризация  $\vec{E}\{E_x, 0, 0\}$   $\vec{H}\{0, H_y, H_z\}$

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (1)$$

Компонента  $E_x$  является решением следующей задачи:

$$\mu \text{div} \left( \frac{1}{\mu} \text{grad } E_x \right) + k^2(M) E_x = i\omega\mu j_x(y, z), \quad (2)$$

где  $k^2(M) = \omega^2\mu(M)\epsilon(M)$ .

На всех границах разрыва параметра  $\mu$  непрерывны  $E_x$  и  $\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial n}$  ( $n$  — нормаль к границе разрыва  $\mu(y, z)$ );  $E_x(y, z)$  удовлетворяет условиям на бесконечности.

2. H-поляризация  $\vec{E}\{0, E_y, E_z\}$   $\vec{H}\{H_x, 0, 0\}$

$$E_y = \frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (3)$$

Компонента  $H_x(y, z)$  является решением следующей задачи:

$$\epsilon \text{div} \left( \frac{1}{\epsilon} \text{grad } H_x \right) + k^2(M) H_x = \left( \text{rot } \frac{1}{\epsilon} \vec{j} \right)_x. \quad (4)$$

На всех границах разрыва параметра  $\epsilon$  непрерывны  $H_x$ ,  $\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_x}{\partial n}$ .

Очевидно, что задача для  $H_x$  переходит в задачу для  $E_x$ , если  $\mu$  заменить на  $(-\epsilon)$ . Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться следующая задача:

$$\frac{1}{\gamma} \text{div } \gamma \text{ grad } u + k^2(M) u = f(M), \quad (5)$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{\mu(M)} & \text{для поляризации } E, \\ \frac{1}{\varepsilon(M)} & \text{для поляризации } H, \end{cases}$$

или, иначе,

$$\Delta u + k^2(M)u + \left(\frac{1}{\gamma} \operatorname{grad} \gamma \operatorname{grad} u\right) = f(M). \quad (5, a)$$

На всех границах разрыва параметров непрерывны  $u$  и  $\gamma \frac{\partial u}{\partial n}$ . На бесконечности если  $\sigma_0 \neq 0$ , то достаточно потребовать, чтобы  $\lim_{R \rightarrow \infty} Ru = 0$ .

Поставленная задача в общем случае (при произвольной зависимости параметров  $\varepsilon$  и  $\mu$  от координат  $y$  и  $z$ ) достаточно сложна, и сведение ее к интегральным уравнениям затруднительно. Предлагаемый метод дает возможность редуцировать задачи типа (5) к сравнительно простым интегральным уравнениям 2-го рода при некоторых дополнительных условиях на параметры среды. Основная идея метода заключается в следующем.

Предположим, что плоскость  $yOz$  можно разбить на  $N$  областей  $V_p$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ), ограниченных достаточно гладкими контурами  $S_p$ , в каждой из которых обозначим параметр  $\gamma = \gamma_p(y, z)$ . При этом параметр  $\gamma_p(y, z)$ , рассматриваемый в данной области  $V_p$ , должен допускать непрерывное продолжение на всю плоскость  $yOz$ . Результат продолжения обозначим  $\tilde{\gamma}^p(M)$ . От функции  $\tilde{\gamma}^p(M)$  требуем, чтобы она позволяла определить функцию Грина  $G_p(M, M_0)$  для уравнения вида

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}^p} \operatorname{div} \tilde{\gamma}^p \operatorname{grad} u + k^2(M)u = 0 \quad (6)$$

на всей плоскости. Функция Грина  $G_p(M, M_0)$  является функцией координат двух точек плоскости  $M(y, z)$  и  $M_0(y_0, z_0)$ , удовлетворяет по координатам каждой из них уравнению (6), граничным условиям на границе разрыва параметра  $\tilde{\gamma}^p: [G_p] = \left[ \tilde{\gamma}^p \frac{\partial G_p}{\partial n} \right] = 0$ , а также условиям на бесконечности. При совпадении точек  $M$  и  $M_0$  функция  $G_p(M, M_0)$  имеет особенность типа  $\frac{1}{\tilde{\gamma}^p} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ . Таким образом, получается набор  $N$  задач на плоскости, для каждой из которых должна быть известна функция Грина  $G_p(M, M_0)$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ).

Если определить функции  $G_p(M, M_0)$  для всех  $p$ , то нетрудно редуцировать исходную задачу (5) к системе интегральных уравнений по контурам  $S_p$ , которые являются границами раздела об-

ластей  $V_p$ . При выводе воспользуемся формулой Грина для уравнения (5):

$$\int_V \{u \operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} v - v \operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} u\} d\tau = \int_S \gamma(M) \left[ u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right] ds_M, \quad (*)$$

где  $V$  — некоторая область на плоскости  $yOz$ , ограниченная кусочно-гладким контуром  $S$ ,  $u$  и  $v$  — регулярные функции,  $\gamma(M)$  — непрерывно дифференцируемая функция.

Формула (\*) получается непосредственно из теоремы Гаусса — Остроградского, если ее применить к векторам  $\vec{A} = \gamma u \operatorname{grad} v$  и  $\vec{B} = \gamma v \operatorname{grad} u$ . Заметим, что формулу (\*) можно применять и с кусочно дифференцируемой функцией  $\gamma$  при условии, что выполнены соответствующие граничные условия для функций  $u$  и  $v$ .

Чтобы получить интегральные соотношения и уравнения, применим формулу (\*) к функциям  $u(M)$  и  $G_p(M, M_0)$  в области  $V_p$ . Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S_p} \gamma_p(M) \left\{ u \frac{\partial G_p}{\partial n} - G_p \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds_M + u_p^0 = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in V_p, \\ 0, & M_0 \notin V_p. \end{cases} \quad (7)$$

где

$$u_p^0(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{V_p} G_p(M, M_0) f(M) d\tau_M.$$

Просуммировав теперь выражение (7) по всем областям  $V_p$ , получим

$$u(M_0) = \sum_{p=1}^N \int_{S_p} \gamma_p(M) \left[ u \frac{\partial G_p}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} G_p \right] ds_M + \sum_{p=1}^N u_p^0(M_0). \quad (8)$$

В выражение (8) каждая граница раздела областей  $V_p$  входит дважды, как граница двух соседних областей. Рассмотрим отдельно члены в сумме (8), содержащие интегралы по контуру  $S_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, \dots, N$ ) ( $S_{pq}$  — граница раздела двух областей с номером  $p$  и  $q$  соответственно). Если нормаль к контуру  $S_{pq}$  выбрать внешней к области  $p$ , то будем иметь следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} & \int_{S_{pq}} \gamma_p(M) \left[ (u)_p \frac{\partial G_p}{\partial n} - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p G_p \right] ds - \\ & - \int_{S_{pq}} \gamma_q(M) \left[ (u)_q \frac{\partial G_q}{\partial n} - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_q G_q \right] ds = \\ & = \int_{S_{pq}} (u)_p \left[ \gamma_p(M) \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q(M) \frac{\partial G_q}{\partial n} \right] ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_{pq}} \gamma_p(M) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p [G_p - G_q] ds = \\
& = \int_{S_{pq}} (u)_p \left[ \gamma_p(M) \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q(M) \frac{\partial G_q}{\partial n} \right] ds - \\
& - \int_{S_{pq}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p [\gamma_p(M) G_p - \gamma_q(M) G_q] ds + \\
& + \int_{S_{pq}} [\gamma_p(M) - \gamma_q(M)] G_q(M, M_0) \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p ds_M,
\end{aligned}$$

где  $(u)_p$  и  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p$  — предельные значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на контуре  $S_{pq}$  изнутри области  $V_p$ .

С учетом последних соотношений представление (8) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
u(M_0) = & \sum_{p,q} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{pq}} \left\{ (u)_p \left[ \gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q \frac{\partial G_q}{\partial n} \right] - \right. \\
& \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p [\gamma_p G_p - \gamma_q G_q] \right\} ds_M + \\
& + \sum_{p,q} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{pq}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p [\gamma_p - \gamma_q] G_q(M, M_0) ds_M + \sum_{p=1}^N u_p^0(M_0). \quad (9)
\end{aligned}$$

Заметим, что в сумме по  $p$  и  $q$  содержатся только члены, соответствующие граничным областям.

Функции

$$\gamma_p(M) G_p - \gamma_q(M) G_q \text{ и } \gamma_p(M) \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q(M) \frac{\partial G_q}{\partial n}$$

непрерывны при пересечении точкой  $M_0$  контуров  $S_{pq}$ , а следовательно соответствующие интегралы допускают дифференцирование по нормали к контуру  $S_{pq}$  по точке  $M_0$ . Интеграл с ядром  $G_q$  представляет собой потенциал простого слоя, нормальная производная которого разрывна при переходе через контур  $S_{pq}$ . Возьмем точку  $M_0$  в представлении (9) в областях  $V_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) и  $V_m$  вблизи контура  $S_{mn}$  и продифференцируем выражение (9) по нормали  $n_0$ , проходящей через точку  $M_0$ .

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_0} = \sum_{p,q} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{pq}} \left\{ (u)_p \left[ \gamma_p \frac{\partial^2 G_p}{\partial n_0 \partial n} - \gamma_q \frac{\partial^2 G_q}{\partial n_0 \partial n} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \left[ \gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n_0} - \gamma_q \frac{\partial G_q}{\partial n_0} \right] \right\} ds + \\
& + \sum_{p,q} \frac{1}{2\pi} \int_{S_{pq}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p (\gamma_p - \gamma_q) \frac{\partial G_q}{\partial n_0} ds_M + \sum_{p=1}^N \frac{\partial u_p^0(M_0)}{\partial n_0}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Если теперь точку  $M_0$  в соотношении (9) и в соотношении (10) опустить на контур  $S_{mn}$  (изнутри той области, для которой  $n_0$  внешняя нормаль), то получим следующую систему интегральных уравнений относительно  $(u)_m$  и  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_m$  на контуре  $S_{mn}$  ( $m, n = 1, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned}
(u)_m = & \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q} \int_{S_{pq}} \left\{ (u)_p \left[ \gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q \frac{\partial G_q}{\partial n} \right] \right\} ds_M - \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q} \int_{S_{pq}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p [\gamma_p (G_p - G_q)] ds_M + \sum_{p=1}^N u_p^0(M_0), \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_m}{\gamma_n} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial n_0} \right)_m = & \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q} \int_{S_{pq}} (u)_p \left[ \gamma_p \frac{\partial^2 G_p}{\partial n_0 \partial n} - \gamma_q \frac{\partial^2 G_q}{\partial n_0 \partial n} \right] ds_M - \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{p,q} \int_{S_{pq}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \left[ \gamma_p \left( \frac{\partial G_p}{\partial n_0} - \frac{\partial G_q}{\partial n_0} \right) \right] ds_M + \sum_{p=1}^N \frac{\partial u_p^0}{\partial n_0}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Полученная система является системой интегральных уравнений 2-го рода. Если все  $S_{pq}$  ограничены, то она является фредгольмовской и эквивалентна исходной граничной задаче. Можно показать, что в классе непрерывных функций эта система имеет единственное решение. В общем случае она будет содержать интегралы по бесконечному промежутку, единственность задачи сохраняется, но методы нахождения решения могут отличаться от обычных численных методов, применяемых для уравнений Фредгольма. Система (11) наиболее проста в том смысле, что она максимально учитывает специфику задачи, используя функции Грина  $G_p(M, M_0)$ , к знанию которых и свелось в конечном итоге решение исходной задачи. Естественно, что функции  $G_p$  для всего набора  $N$  задач типа (6) должны вычисляться достаточно просто, ибо трудности первоначальной задачи не должны заменяться трудностями в нахождении функций Грина. Исходя из этого наиболее удобно использовать явные выражения для функций Грина или хотя бы иметь достаточно простой алгоритм для их вычисления. Достаточно большой круг задач, для которых функции Грина  $G_p$  могут быть вычислены, выделяется следующим априор-

ным предположением. Пусть параметр  $\gamma_p$  меняется лишь вдоль одного избранного направления. Тогда пространство с параметрами  $\epsilon_p, \mu_p$  представляет собой одномерную слоистую среду, параметры которой зависят лишь от одной декартовой координаты  $z_p$  (соответствующая система декартовых координат  $x_p, y_p, z_p$  выбирается таким образом, чтобы ось  $z_p$  была направлена вдоль направления изменения параметров  $\epsilon_p(z_p)$  и  $\mu_p(z_p)$ ). С помощью интегральных преобразований для указанного класса задач возможно либо явное построение функций Грина, либо их вычисление можно свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

Одной из наиболее простых, но в то же время достаточно важных для электродинамики задач указанного типа является задача дифракции на системе однородных цилиндрических тел, погруженных в слоистую среду с кусочно-постоянными параметрами. В этом случае в каждой области  $V_p$  среда кусочно-постоянна (внутри тел постоянна). Параметры  $\epsilon$  и  $\mu$ , рассматриваемые в каждой области  $V_p$ , занимаемой телом с параметрами  $\epsilon_p, \mu_p$ , естественным образом продолжаются на всю плоскость

$$\tilde{\epsilon}_p(M) = \epsilon_p(z_p), \quad \tilde{\mu}_p(M) = \mu_p(z_p), \\ (p = 2, 3, \dots, N).$$

Соответствующие функции Грина есть хорошо известные функции Грина для уравнения Гельмгольца  $\Delta u + k^2(M)u = 0$  на плоскости

$$G_p(M, M_0) = \frac{1}{\gamma_p} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_p r_{MM_0}) \quad (p = 2, 3, \dots, N). \quad (13)$$

Продолжение параметров вмещающей среды также не представляет затруднений, ибо достаточно положить параметры  $\tilde{\epsilon}(M)$  и  $\tilde{\mu}(M)$  внутри тел равными величине параметров слоя, в котором эти тела находятся:

$$\tilde{\epsilon}(M) = \epsilon_{\text{слоя}}, \quad \tilde{\mu}(M) = \mu_{\text{слоя}} \quad M \in V_p \quad (p = 2, 3, \dots, N),$$

после чего соответствующая функция Грина  $G_1(M, M_0)$  легко может быть найдена методом интегральных преобразований.

Построенные функции Грина позволяют записать системы интегральных уравнений рассматриваемой задачи по контурам  $S_{1p}$ , которые в данном случае играют роль границ раздела областей  $V_p$ . Для примера выишем систему для  $N=2$  (одно тело). Полагая в системе  $N=2$  и учитывая специфику задачи, будем иметь следующую систему по контуру  $S_{12} \equiv C$ :

$$\left. \begin{aligned} u(M_0) - \frac{1}{2\pi} \oint_C u(M) \left[ \gamma_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} - \gamma_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right] dl_M + \\ + \frac{\gamma_2}{2\pi} \oint_C \frac{\partial u(M)}{\partial n} [G_2 - G_1] dl_M = u^0(M_0), \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \cdot \frac{\partial u(M_0)}{\partial n_0} - \frac{1}{2\pi} \oint_C u(M) \left[ \gamma_2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_0 \partial n} - \right. \\ \left. - \gamma_1 \frac{\partial G_1}{\partial n_0 \partial n} \right] dl_M + \frac{\gamma_2}{2\pi} \oint_C \frac{\partial u(M)}{\partial n} \left[ \frac{\partial G_2}{\partial n_0} - \frac{\partial G_1}{\partial n_0} \right] dl_M = \frac{\partial u^0(M_0)}{\partial n_0}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Полученная система уравнений (14) является системой уравнений Фредгольма 2-го рода. Численное решение этой системы (а также соответствующей системы для  $N > 2$ ) может быть получено сведением их к системе линейных алгебраических уравнений, с использованием блочного метода. Ограничением здесь может служить лишь величина системы линейных алгебраических уравнений, которую можно решить на современных вычислительных машинах.

Рассмотрим более сложный пример, позволяющий судить о возможностях предлагаемого метода. Пусть комплексная диэлектрическая проницаемость магнитооднородной среды меняется по следующему закону:

$$\epsilon(M) = \begin{cases} \epsilon_1(z) & \text{при } z < 0, \\ \epsilon_2(z \cos \alpha + y \sin \alpha) & \text{при } 0 < z < h, \\ \epsilon_3(y) & \text{при } z > h, \end{cases}$$

где  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — комплекснозначные функции своих аргументов. Плоскость  $yOz$  разбивается естественным образом на три области ( $N=3$ ):

$$V_1(z < 0), \quad V_2(0 < z < h), \quad V_3(z > h).$$

После соответствующего продолжения  $\epsilon_p(M)$  ( $p=1, 2, 3$ ) пространство представляет собой слоистую среду со следующими параметрами  $\tilde{\epsilon}_p(M)$ :

$$\tilde{\epsilon}_1(M) = \begin{cases} \epsilon_1(z) & \text{при } z \leq 0, \\ \epsilon_1(z=0) & \text{при } z > 0; \end{cases} \\ \tilde{\epsilon}_2(M) = \begin{cases} \epsilon_2(y \sin \alpha + z \cos \alpha) & \text{при } 0 < z < h, \\ \epsilon_2(y \sin \alpha + z \cos \alpha) & \text{при } z < 0 \text{ и при } z > h; \end{cases} \\ \tilde{\epsilon}_3(M) = \begin{cases} \epsilon_3(y) & \text{при } z > h, \\ \epsilon_3(y) & \text{при } z < h. \end{cases}$$

Имеют место две задачи, соответствующие  $E$  и  $H$ -поляризациям:

1)  $E$ -поляризация. Функция  $u$  в соответствии с (2) будет удовлетворять уравнению

$$\Delta u + k^2(M)u = f_e(M)$$

с условием

$$[u] = 0, \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0.$$

Соответствующие функции Грина  $G_p^e(M, M_0)$  определяются как решения следующих уравнений во всей плоскости:

$$\Delta G_p^e + k_p^2(y, z)G_p^e = -2\pi\delta(r_{MM_0})$$

с условиями в бесконечности. Эти функции легко определяются как функции источника соответствующей одномерной слоистой среды. Границами раздела областей  $V_p$  являются две прямые  $z = 0, z = h$ . Если нормаль выбрать по направлению оси  $z$ , то согласно (9) в любой точке плоскости  $yOz$ , не лежащей на линиях раздела, функция  $u \equiv E_x(y, z)$  выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} u(y_0, z_0) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \left[ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \right] dy + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(y) \left[ \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial z} \right] dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) [G_1 - G_2] dy - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) [G_2 - G_3] dy + u^0(M_0), \\ u^0(M_0) = & \sum_{p=1}^3 u_p^0(M_0), \end{aligned}$$

где  $\varphi_0(y) = \lim_{z \rightarrow +0} u(y, z)$ ;  $\varphi_h(y) = \lim_{z \rightarrow +h} u(y, z)$ ;  $\psi_0(y) = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial z}$ ;  $\psi_h(y) = \lim_{z \rightarrow +h} \frac{\partial u}{\partial z}$ . Относительно значений  $\varphi_0(y), \psi_0(y), \varphi_h(y), \psi_h(y)$  в соответствии с (11) и (12) имеет место следующая система интегральных уравнений:

$$\varphi_0(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \frac{\partial G_{12}}{\partial z} \Big|_{z=0, z_0=0} - \psi_0 G_{12} \Big|_{z=0, z_0=0} \right\} dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_h \frac{\partial G_{23}}{\partial z} \Big|_{z=h, z_0=0} - \psi_h G_{23} \Big|_{z=h, z_0=0} \right\} dy = u^0(y_0, z_0 = 0), \quad (15, a)$$

$$\varphi_h(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \frac{\partial G_{12}}{\partial z} \Big|_{z=0, z_0=h} - \psi_0 G_{12} \Big|_{z=0, z_0=h} \right\} dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_h \frac{\partial G_{23}}{\partial z} \Big|_{z=h, z_0=h} - \psi_h G_{23} \Big|_{z=h, z_0=h} \right\} dy = u^0(y_0, z_0 = h), \quad (15, б)$$

$$\psi_0(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial z_0 \partial z} \Big|_{z=0, z_0=0} - \psi_0 \frac{\partial G_{12}}{\partial z_0} \Big|_{z=0, z_0=0} \right\} dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_h \frac{\partial^2 G_{23}}{\partial z_0 \partial z} \Big|_{z=h, z_0=0} - \psi_h \frac{\partial G_{23}}{\partial z_0} \Big|_{z=h, z_0=0} \right\} dy = \frac{\partial u^0}{\partial z_0}(y_0, z_0 = 0), \quad (15, в)$$

$$\psi_h(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_0 \frac{\partial^2 G_{12}}{\partial z_0 \partial z} \Big|_{z=0, z_0=h} - \psi_0 \frac{\partial G_{12}}{\partial z_0} \Big|_{z=0, z_0=h} \right\} dy -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi_h \frac{\partial^2 G_{23}}{\partial z_0 \partial z} \Big|_{z=h, z_0=h} - \psi_h \frac{\partial G_{23}}{\partial z_0} \Big|_{z=h, z_0=h} \right\} dy = \frac{\partial u^0}{\partial z_0}(y_0, z_0 = h); \quad (15, г)$$

$$(G_{12} \equiv G_1 - G_2, G_{23} \equiv G_2 - G_3)$$

2)  $H$ -поляризация. Функция  $u \equiv H_x$  согласно (3) удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon(M) \operatorname{div} \frac{1}{\varepsilon(M)} \operatorname{grad} u = f_m(M)$$

на границах раздела  $[u] = 0$  и  $\left[ \frac{1}{\varepsilon(M)} \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0$ . Функции Грина  $G_p^m(M, M_0)$  определяются как решения следующих уравнений во всей плоскости:

$$\operatorname{div} \frac{1}{\varepsilon_p} \operatorname{grad} G_p^m(M, M_0) = -2\pi\delta(r_{MM_0})$$

с условием на бесконечности,  $[G_p^m] = \left[ \frac{1}{\varepsilon(M)} \frac{\partial G_p^m}{\partial n} \right] = 0$ . Интегральное представление (9) в этом случае дает

$$u(y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right] dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial G_3}{\partial z} \right] dy - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} G_1 - \frac{1}{\varepsilon_3} G_2 \right] dy - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} G_2 - \frac{1}{\varepsilon_3} G_3 \right] dy + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) G_2 dy + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(y) \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) G_3 dy + u^0(M_0).
\end{aligned}$$

Система интегральных уравнений может быть получена из (11) и (12) и имеет вид

$$\begin{aligned}
\varphi_0(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right] \Big|_{z=0, z_0=0} dy - \\
- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial G_3}{\partial z} \right] \Big|_{z=h, z_0=0} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} (G_1 - G_2) \right] \Big|_{z=0, z_0=0} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} (G_2 - G_3) \right] \Big|_{z=0, z_0=h} dy = u^0(y_0, z_0 = 0), \quad (16, a) \\
\varphi_h(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial z} \right] \Big|_{z=0, z_0=h} dy - \\
- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial G_3}{\partial z} \right] \Big|_{z=h, z_0=h} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} (G_1 - G_2) \right] \Big|_{z=0, z_0=h} dy +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} (G_2 - G_3) \right] \Big|_{z=h, z_0=h} dy = u^0(y_0, z_0 = h), \quad (16, б) \\
\psi_0(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_0 \partial z} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_0 \partial z} \right] \Big|_{z=0, z_0=0} dy - \\
- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_0 \partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial^2 G_3}{\partial z_0 \partial z} \right] \Big|_{z=h, z_0=0} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{\partial G_1}{\partial z_0} - \frac{\partial G_2}{\partial z_0} \right) \right] \Big|_{z=0, z_0=0} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{\partial G_2}{\partial z_0} - \frac{\partial G_3}{\partial z_0} \right) \right] \Big|_{z=h, z_0=0} dy = \frac{\partial u^0}{\partial z_0}(y_0, z_0 = 0), \quad (16, в) \\
\psi_h(y_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 G_1}{\partial z_0 \partial z} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_0 \partial z} \right] \Big|_{z=0, z_0=h} dy - \\
- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z_0 \partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial^2 G_3}{\partial z_0 \partial z} \right] \Big|_{z=h, z_0=h} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \left( \frac{\partial G_1}{\partial z_0} - \frac{\partial G_2}{\partial z_0} \right) \right] \Big|_{z=0, z_0=h} dy + \\
+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_h(y) \left[ \frac{1}{\varepsilon_2} \left( \frac{\partial G_2}{\partial z_0} - \frac{\partial G_3}{\partial z_0} \right) \right] \Big|_{z=h, z_0=h} dy = \frac{\partial u^0}{\partial z_0}(y_0, z_0 = h), \quad (16, г)
\end{aligned}$$

Как видно, для обеих поляризации задача редуцирована к системе интегральных уравнений относительно значений  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$  на двух прямых  $z = 0$  и  $z = h$ , т. е. интегральные уравнения написаны по бесконечному промежутку. При решении систем (15) и (16) могут возникнуть определенные вычислительные трудности, вызванные необходимостью замены бесконечного интервала интегрирования конечным, а также тем обстоятельством, что алгоритм вычисления ядер интегральных операторов содержит процедуру численного решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Отметим некоторые пути преодоления указанных трудностей. В теории электромагнитных методов, применяемых как в рудной,

так и в структурной геофизике, чаще всего требуется исследование поведения электромагнитных полей в неоднородных средах с кусочно-постоянным распределением проводимости. Нетрудно указать большое количество структур, достаточно интересных для геофизических исследований, в которых функции Грина  $G_p(M, M_0)$  для всех  $p$  могут быть выписаны в явном виде (однократные интегралы от элементарных функций). При решении систем типа (15) и (16) для сред с кусочно-постоянным распределением проводимости удобно выделять часть решения, соответствующую поведению решения на бесконечности, а затем заменить бесконечный интервал интегрирования конечным. Во многих случаях можно воспользоваться методом частичного обращения интегрального оператора [1] с последующим решением уравнений методом последовательных приближений или сведением его к системе линейных алгебраических уравнений.

Возможность применения предлагаемого метода к векторным задачам, чтобы не загромождать изложения, покажем на одном достаточно простом примере, представляющем тем не менее и самостоятельный интерес. Рассмотрим задачу о вертикальном контакте, которую сформулируем следующим образом: имеется магнито-однородная среда с кусочно-постоянным распределением проводимости:  $\sigma_0$  при  $z < 0$ ,  $\sigma_1$  при  $z > 0, y < 0$ ,  $\sigma_2$  при  $z > 0, y > 0$ ; необходимо найти векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\sigma} \vec{E} + \vec{j}, \quad (17)$$

где

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } z < 0, \\ \sigma_1 & \text{при } z > 0, y < 0, \\ \sigma_2 & \text{при } z > 0, y > 0. \end{cases}$$

На границе раздела  $z = 0$  непрерывны  $E_x, E_y, H_x, H_y$ , а на границе  $y = 0$  ( $z > 0$ ) непрерывны  $E_z, E_x, H_z, H_x$ . Кроме того, будем считать, что все источники электромагнитного поля расположены в области  $z < 0$ .

В данной задаче наиболее удобно разбить пространство на две области ( $z < 0$ ) и ( $z > 0$ ). Продолжение параметра  $\delta$  на все пространство из первой области дает однородную среду с проводимостью  $\delta_0$ , а из второй — слоистую среду, состоящую из двух полупространств с проводимостями  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , разделенных плоскостью  $y = 0$ . Для полученных таким образом двух задач возможно явное построение тензоров Грина  $G_p^{e,m}(M, M_0)$  ( $p = 1, 2$ ) при этом индексы «e» и «m» соответствуют двум, вообще говоря, различ-

ным тензорам Грина  $G^e$  и  $G^m$  с матричными элементами  $g_{\alpha\beta}^{e,m,p}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ), (зависящими от координат двух точек пространства):

$$\hat{G}_p^{e,m}(M, M_0) = \begin{pmatrix} g_{11}^{e,m,p} & g_{12}^{e,m,p} & g_{12}^{e,m,p} \\ g_{21}^{e,m,p} & g_{22}^{e,m,p} & g_{23}^{e,m,p} \\ g_{31}^{e,m,p} & g_{32}^{e,m,p} & g_{33}^{e,m,p} \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы  $g_{\alpha\beta}$  имеют особенность типа  $\frac{1}{R_{MM_0}}$ , а остальные регулярны. Элементы  $g_{\alpha\beta}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца и определенным граничным условиям (2). Матрицы  $\hat{G}_p^{e,m}(M, M_0)$ , которые имеют диагональный вид, выписываются сразу же:

$$g_{\alpha\alpha}^{e,m,1} = \varphi(M, M_0) = \frac{e^{ik_0 R_{MM_0}}}{R_{MM_0}}; \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$k_0^2 = i\omega\mu\sigma_0.$$

Матричные элементы тензоров  $\hat{G}_2^{e,m}(M, M_0)$  представляются в следующем виде:

$$g_{\alpha\beta}^{e,m,2}(M, M_0) = \delta_{\alpha\beta} \frac{e^{ik(M_0)R_{MM_0}}}{R_{MM_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda(x-x_0) + iv(z-z_0) - l(M_0)|y-y_0|\} F_{\alpha\beta}^{e,m} d\lambda dv,$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad l(M) = \sqrt{\lambda^2 + v^2 - k^2(M)},$$

если точки  $M$  и  $M_0$  в одном полупространстве, и

$$g_{\alpha\beta}^{e,m,2}(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda(x-x_0) + iv(z-z_0) -$$

$$-l(M)|y| - l(M_0)|y_0|\} \Phi_{\alpha\beta}^{e,m}(\lambda, v) d\lambda dv,$$

если точки  $M$  и  $M_0$  в разных полупространствах.

Для функций  $F_{\alpha\beta}^{e,m}(\lambda, v)$  и  $\Phi_{\alpha\beta}^{e,m}(\lambda, v)$  получаются системы линейных алгебраических уравнений и их явные выражения выписаны в [2]. Отметим, что у тензора  $G_2^e(M, M_0)$  элементы  $g_{\alpha\beta}^e$  при  $\alpha \neq \beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) равны нулю, тогда как у тензора  $\hat{G}_2^m(M, M_0)$  все элементы отличны от нуля.

Основную роль при выводе интегральных уравнений будут играть интегральные представления для декартовых компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Если обозначить  $\vec{g}_{\alpha,m}^{\alpha} = \{g_{1\alpha}^{\alpha,m}, g_{2\alpha}^{\alpha,m}, g_{3\alpha}^{\alpha,m}\}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), то в области  $z < 0$  будем иметь

$$E_{\alpha}(M_0) = E_{\alpha}^0(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \{i\omega\mu \vec{g}_{e,1}^{\alpha} [\vec{z} \times \vec{H}] + [\vec{z} \times \vec{H}] \operatorname{rot} \vec{g}_{e,1}^{\alpha} + (\vec{z} \cdot \vec{E}) \operatorname{div} \vec{g}_{e,1}^{\alpha}\} |_{z=0} dx dy, \quad (18)$$

$$H_{\alpha}(M_0) = H_{\alpha}^0(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \{\sigma_0 \vec{g}_{m,1}^{\alpha} [\vec{z} \times \vec{E}] + [\vec{z} \times \vec{H}] \operatorname{rot} \vec{g}_{m,1}^{\alpha} + (\vec{z} \cdot \vec{H}) \operatorname{div} \vec{g}_{m,1}^{\alpha}\} |_{z=0} dx dy, \quad (19)$$

где  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  — поле, возбуждаемое заданными источниками в однородной среде с проводимостью  $\delta_0$ ,

$\vec{z}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси,  
 $V$  — объем области задания источников;  $\alpha = 1, 2, 3$ ;

$$E_1 \equiv E_x \quad E_2 \equiv E_y \quad E_3 \equiv E_z,$$

$$H_1 \equiv H_x \quad H_2 \equiv H_y \quad H_3 \equiv H_z.$$

Если  $z_0 > 0$ , то правые части представлений (18) и (19) равны нулю. В области  $z > 0$  имеют место следующие представления:

$$E_{\alpha}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \{i\omega\mu \vec{g}_{e,2}^{\alpha} [\vec{z} \times \vec{H}] + [\vec{z} \times \vec{E}] \operatorname{rot} \vec{g}_{e,2}^{\alpha} + (\vec{z} \cdot \vec{E}) \operatorname{div} \vec{g}_{e,2}^{\alpha}\} |_{z=0} dx dy, \quad (20)$$

$$H_{\alpha}(M_0) = \frac{\sigma(M_0)}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \vec{g}_{m,2}^{\alpha} [\vec{z} \times \vec{E}] + [\vec{z} \times \vec{H}] \frac{1}{\sigma(M)} \operatorname{rot} \vec{g}_{m,2}^{\alpha} + \frac{(\vec{z} \cdot \vec{H})}{\sigma(M)} \operatorname{div} \vec{g}_{m,2}^{\alpha} \right\} dx dy, \quad (21)$$

$$\text{где } \sigma(M_0) = \begin{cases} \sigma_1, & y_0 < 0, \\ \sigma_2, & y_0 > 0. \end{cases}$$

Сложим выражения (18) и (20), (19) и (21) соответственно и получим представление декартовых компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  через их значения на плоскости  $z = 0$ :

$$E_{\alpha}(M_0) = E_{\alpha}^0(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} i\omega\mu [\vec{z} \times \vec{H}] (\vec{g}_{e,1}^{\alpha} - \vec{g}_{e,2}^{\alpha}) |_{z=0} dx dy - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} [\vec{z} \times \vec{E}] (\operatorname{rot} \vec{g}_{e,1}^{\alpha} - \operatorname{rot} \vec{g}_{e,2}^{\alpha}) |_{z=0} dx dy - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (\vec{z} \cdot \vec{E}) \left[ \operatorname{div} \vec{g}_{e,1}^{\alpha} - \frac{\sigma_0}{\sigma(M)} \operatorname{div} \vec{g}_{e,2}^{\alpha} \right] |_{z=0} dx dy, \quad (22)$$

$$H_{\alpha}(M_0) = H_{\alpha}^0(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (\sigma_0 \vec{g}_{m,1}^{\alpha} - \sigma(M_0) \vec{g}_{m,2}^{\alpha}) \cdot [\vec{z} \times \vec{E}] dx dy - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} [\vec{z} \times \vec{H}] \left( \operatorname{rot} \vec{g}_{m,1}^{\alpha} - \frac{\sigma_0(M_0)}{\sigma(M)} \operatorname{rot} \vec{g}_{m,2}^{\alpha} \right) dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (\vec{z} \cdot \vec{H}) (\operatorname{div} \vec{g}_{m,1}^{\alpha} - \operatorname{div} \vec{g}_{m,2}^{\alpha}) dx dy, \quad (23)$$

где  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  — первичное поле в среде с постоянной проводимостью  $\sigma_0$ .

Если учесть, что  $[\vec{n} \times \vec{E}] = -E_y \vec{x} + E_x \vec{y}$ ,  $[\vec{n} \times \vec{H}] = -H_y \vec{x} + H_x \vec{y}$ ,  $i\omega\mu H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ ;  $\sigma E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$ , и записать соотношения (22) и (23) покомпонентно, то получим следующие четыре выражения для касательных к плоскости векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$E_x(x_0, y_0, z_0) = E_x^0(M_0) + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} H_y(x, y) [\varphi(M, M_0) - g_{11}^{\alpha,2}(M, M_0)] |_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_y \frac{\partial g_{31}^{\alpha,2}(M, M_0)}{\partial y} |_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_x \frac{\partial g_{31}^{\alpha,2}(M, M_0)}{\partial x} |_{z=0} dx dy -$$

$$-\frac{1}{4\pi\sigma_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma_0}{\sigma(M)} \frac{\partial g_{11}^{e,2}}{\partial x} \right] \Big|_{z=0} dx dy, \quad (24)$$

$$E_y(x_0, y_0, z_0) = E_y^0(M_0) - \frac{i\omega\mu}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} H_x(x, y) [\varphi(M, M_0) - g_{22}^{e,2}(M, M_0)] \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_y \frac{\partial g_{32}^{e,2}}{\partial y}(M, M_0) \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y) \frac{\partial g_{32}^{e,2}}{\partial x}(M, M_0) \Big|_{z=0} dx dy - \frac{1}{4\pi\sigma_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\sigma_0}{\sigma(M)} \frac{\partial g_{22}^{e,2}}{\partial y} \right] \Big|_{z=0} dx dy, \quad (25)$$

$$H_x(x_0, y_0, z_0) = H_x^0(M_0) + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_y(x, y) [\sigma_0 \varphi(M, M_0) - \sigma(M_0) g_{11}^{m,2}] \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y) [\sigma(M_0) g_{21}^{m,2}(M, M_0)] \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} H_y \frac{\sigma(M_0)}{\sigma(M)} \frac{\partial g_{31}^{m,2}}{\partial y} \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} H_x \frac{\sigma(M_0)}{\sigma(M)} \frac{\partial g_{31}^{m,2}}{\partial x} \Big|_{z=0} dx dy - \frac{i}{4\pi\omega\mu} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \left( \frac{\partial g_{11}^{m,2}}{\partial x} + \frac{\partial g_{21}^{m,2}}{\partial y} \right) \right] \Big|_{z=0} dx dy, \quad (26)$$

$$H_y(x_0, y_0, z_0) = H_y^0(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y) [\sigma_0 \varphi(M, M_0) - \sigma(M_0) g_{22}^{m,2}] \Big|_{z=0} dx dy - \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E_y [\sigma(M_0) g_{12}^{m,2}(M, M_0)] \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} H_y \frac{\sigma(M_0)}{\sigma(M)} \frac{\partial g_{32}^{m,2}}{\partial y} \Big|_{z=0} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} H_x \frac{\sigma(M_0)}{\sigma(M)} \frac{\partial g_{32}^{m,2}}{\partial x} \Big|_{z=0} dx dy -$$

$$-\frac{i}{4\pi\omega\mu} \iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left( \frac{\partial g_{12}^{m,2}}{\partial x} - \frac{\partial g_{22}^{m,2}}{\partial y} \right) \right] \Big|_{z=0} dx dy. \quad (27)$$

Чтобы получить окончательную систему интегральных уравнений плоскости  $z=0$  в данном случае достаточно положить в представлениях (24—27)  $z_0=0$  и проинтегрировать по частям интегралы, содержащие производные от искомых функций.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численных методах решения некоторого класса дифракционных задач. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
2. Захаров Е. В., Ильин И. В. Метод расчета электромагнитных полей в плоскопараллельной слоистой среде с локальными неоднородностями. Настоящий сборник.

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ, И. В. ИЛЬИН

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА

Как известно, теория распространения электромагнитных полей в неоднородных средах является основой различных электромагнитных методов, применяемых в геофизических исследованиях. В частности многие задачи такого типа достаточно важны для теории индукционного каротажа, где до настоящего времени рассматривались лишь наиболее простые модели, такие, как плоскопараллельная слоистая среда или цилиндрическая слоистая среда [1]. Тем не менее для интерпретации данных наблюдений наибольшее значение имеют комбинированные задачи, в которых структура среды содержит цилиндрические и плоские границы раздела.

В настоящей работе рассматривается общая постановка и метод решения задачи указанного типа: две цилиндрические границы раздела и четыре плоские границы раздела. Электромагнитное поле в данной среде возбуждается произвольной локальной системой источников. В общей постановке задача сводится к интегральным уравнениям по цилиндрическим поверхностям раздела относительно касательных к ним компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Подробно рассмотрен случай осесимметричного магнитного возбуждения, наиболее интересного с точки зрения теории индукционного каротажа.

Пусть имеется трехслойная слоистая среда, два полупространства, разделенные слоем толщины  $h$  с горизонтальными границами раздела  $L_1, L_2$  и с кусочно-постоянными параметрами  $\sigma_n, \epsilon_n^0$  ( $\epsilon_n^0$  — диэлектрическая проницаемость и  $\sigma_n$  ( $\sigma_n > 0$ ) — электрическая проводимость ( $n = 1, 2, 3$ )). В среде находятся бесконечные области  $V$  и  $D$  ( $V \subset D$ ), ограниченные произвольными цилиндрическими поверхностями  $S$  и  $F$ , образующие которых параллельны. Область  $V$  заполнена однородной средой, параметры которой обозначим  $\epsilon$  и  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ). Пространство между цилиндрическими поверхностями заполнено трехслойной слоистой средой с горизонтальными границами раздела  $L_3, L_4$  и параметрами  $\epsilon_n^0$  и  $\sigma_n$  ( $n = 4, 5, 6$ ). Средний слой имеет толщину  $h_1$ . Введем декартову

систему координат  $x, y, z$  таким образом, чтобы плоскость  $XOY$  проходила через середину среднего слоя вмещающей среды. Ось  $OZ$  направим от нижнего полупространства к верхнему. Тогда границы раздела сред  $L_1$  и  $L_2$  являются плоскостями  $z = h/2$  и  $z = -h/2$ . Образующие цилиндрических поверхностей составляют с осью  $OZ$  угол  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi/2$ ).

В данной неоднородной среде возбуждается гармоническое во времени электромагнитное поле (зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$ ) произвольной системой источников электрического или магнитного типа с плотностями токов  $\vec{I}, \vec{I}'$ . Источники электромагнитного поля занимают некоторую область  $\Omega$  ( $\Omega \subset V$ ) с поверхностью  $\Sigma$ .

Требуется найти напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей, удовлетворяющих в области  $V$  уравнениям Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} + i\omega\epsilon \vec{E} = \vec{I}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E} - i\omega\mu \vec{H} = -\vec{I}',$$

а вне области  $V$  однородным уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} + i\omega\epsilon_n \vec{E} = 0, \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} - i\omega\mu \vec{H} = 0,$$

где  $\epsilon_n = \epsilon_n^0 + i \frac{\sigma_n}{\omega}$  ( $n = 1-6$ ). На горизонтальных границах разрыва параметров слоистой среды непрерывны  $E_x, E_y, H_x, H_y$ , а на цилиндрических поверхностях  $S$  и  $F$  непрерывны касательные составляющие полей  $E_\varphi, E_z, H_\varphi, H_z$ . Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют условиям на бесконечности  $\lim_{R \rightarrow \infty} R\vec{H} = 0, \lim_{R \rightarrow \infty} R\vec{E} = 0$ , где

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Задача заключается в том, чтобы определить поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в произвольной точке пространства  $M_0$ . Методом работы [2] поставленная задача в дальнейшем будет сведена к интегральным уравнениям по цилиндрическим границам раздела, которые естественным образом разбивают пространство на три области.

Продолжение параметров каждой из областей на все пространство достаточно очевидно: из области  $V$  продолжение дает однородную среду с параметрами  $\epsilon$  и  $\sigma$ , а из области  $D$  и вмещающей среды получают трехслойные среды с соответствующими параметрами. Метод решения предполагает, что для полученных

трех задач во всем пространстве можно построить тензоры Грина. Это действительно возможно методом работы [3].

Итак, для решения поставленной задачи введем четыре системы функций  $\hat{G}(M, M_0)$  и  $\hat{Q}(M, M_0)$ ,  $\hat{R}(M, M_0)$  и  $\hat{P}(M, M_0)$  — тензорные функции Грина слоистой среды (электрические и магнитные тензоры соответственно). Для магнитооднородной среды — это матрицы следующего вида, например:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix},$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Введенные функции в декартовой системе координат можно представить как сумму трех векторов-строк, например:

$$\hat{G} = \vec{i}_x \vec{g}_1 + \vec{i}_y \vec{g}_2 + \vec{i}_z \vec{g}_3, \quad \hat{Q} = \vec{i}_x \vec{q}_1 + \vec{i}_y \vec{q}_2 + \vec{i}_z \vec{q}_3.$$

Здесь  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  — орты декартовой системы координат. Сопряженные тензоры будем представлять аналогично, но с индексами наверху. Для однородного пространства, например, полученного продолжением параметров области  $V$  на все пространство, введенные функции вырождаются в диагональные матрицы  $\hat{G}_0 = \hat{Q}_0$  с элементами  $g_0 = e^{ikR_{MM_0}}/R_{MM_0}$ , где  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ . Как показано в [3], введенные функции удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца для точек  $M \neq M_0$ , например,

$$\Delta \vec{g}^p + k^2(M) \vec{g}^p = 0 \quad (p = 1, 2, 3)$$

в точках  $M = M_0$  имеют особенность типа  $1/R$ , а на горизонтальных границах раздела  $L_n$  ( $n=1 \div 4$ ) удовлетворяют определенным условиям по точкам  $M_0$  и  $M$ . Для кусочно-постоянной и магнитооднородной среды условия по точке  $M$ , например, для элементов тензоров  $\hat{G}$  и  $\hat{Q}$  будут следующими (при  $z = \pm \frac{h}{2}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{g}^p &= 0, \quad [\epsilon_n \vec{q}^p] = 0, \\ [\text{rot}_{x,y} \vec{g}^p] &= 0, \quad [\text{rot}_{x,y} \vec{q}^p] = 0, \quad (p = 1 \div 3) \\ \left[ \frac{1}{\epsilon_n} \text{div} \vec{g}^p \right] &= 0, \quad [\text{div} \vec{q}^p] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда для произвольной точки  $M_0$  внутри области  $V$  справедливы следующие интегральные представления [3]:

$$\vec{E}(M_0) = \vec{E}^0(M_0) - \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \hat{G}_0 + [\vec{n} \vec{E}] \text{rot} \hat{G}_0 + (\vec{n} \vec{E}) \text{div} \hat{G}_0\} ds_M, \quad (4)$$

$$\vec{H}(M_0) = \vec{H}^0(M_0) + \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\epsilon [\vec{n} \vec{E}] \hat{Q}_0 - [\vec{n} \vec{H}] \text{rot} \hat{Q}_0 - (\vec{n} \vec{H}) \text{div} \hat{Q}_0\} ds_M,$$

где  $\vec{n}$  — вектор внешней для области  $V$  единичной нормали к цилиндрической поверхности  $S$ . Первичные поля  $\vec{E}^0$  и  $\vec{H}^0$  выражаются следующим образом:

$$\vec{E}^0(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \{i\omega\vec{I} \hat{G}_0 - \vec{I} \text{rot} \hat{G}_0 + \frac{i}{\omega\epsilon} (\vec{I} \nabla) \text{div} \hat{G}_0\} dv_M, \quad (5)$$

$$\vec{H}^0(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \{i\omega\epsilon \vec{I} \hat{Q}_0 + \vec{I} \text{rot} \hat{Q}_0 + \frac{i}{\omega\mu} (\vec{I} \nabla) \text{div} \hat{Q}_0\} dv_M.$$

В области внешней к области  $D$

$$\vec{E}(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_F \{i\omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \hat{G} + [\vec{n} \vec{E}] \text{rot} \hat{G} + (\vec{n} \vec{E}) \text{div} \hat{G}\} ds_M, \quad (6)$$

$$\vec{H}(M_0) = - \frac{1}{4\pi} \int_F \{i\omega\epsilon_n(M) [\vec{n} \vec{E}] \hat{Q} - [\vec{n} \vec{H}] \text{rot} \hat{Q} - (\vec{n} \vec{H}) \text{div} \hat{Q}\} ds_M,$$

где  $\vec{n}$  — вектор внешней для области  $D$  нормали к цилиндрической поверхности  $F$ . Для области, заключенной между цилиндрическими поверхностями  $S$  и  $F$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E}(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \hat{R} + [\vec{n} \vec{E}] \text{rot} \hat{R} + (\vec{n} \vec{E}) \text{div} \hat{R}\} ds_M - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_F \{i\omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \hat{R} + [\vec{n} \vec{E}] \text{rot} \hat{R} + (\vec{n} \vec{E}) \text{div} \hat{R}\} ds_M, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_F \{i\omega\epsilon_m(M) [\vec{n} \vec{E}] \hat{P} - [\vec{n} \vec{H}] \text{rot} \hat{P} - (\vec{n} \vec{H}) \text{div} \hat{P}\} ds_M - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\epsilon_m(M) [\vec{n} \vec{E}] \hat{P} - [\vec{n} \vec{H}] \text{rot} \hat{P} - (\vec{n} \vec{H}) \text{div} \hat{P}\} ds_M. \end{aligned}$$

Используя интегральные представления (4) — (7), можно написать векторную систему линейных интегральных уравнений по цилиндрическим поверхностям  $S$  и  $F$  [3].

$$\begin{aligned} (\vec{n}_{M_0} \times \vec{E}(M_0))_S &= \frac{2\varepsilon}{(\varepsilon + \varepsilon_m)} (\vec{n}_{M_0} \times \vec{E}^0(M_0))_S - \\ &- \frac{1}{2\pi(\varepsilon + \varepsilon_m)} \left( \int_S \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_S \operatorname{rot}(\varepsilon_m \vec{R} - \varepsilon \vec{G}_0) ds_M - \right. \\ &\quad \left. - \int_F \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_F \operatorname{rot} \varepsilon_m \vec{R} ds_M \right) + \\ &+ \frac{i}{2\pi\omega(\varepsilon + \varepsilon_m)} \left( \int_S \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_S (k_m^2 \vec{R} - k^2 \vec{G}_0) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{H})_S \nabla) \operatorname{div}(\vec{R} - \vec{G}_0) \} ds_M - \right. \\ &\quad \left. - \int_F \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_F k_m^2 \vec{R} + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{H})_F \nabla) \operatorname{div} \vec{R} \} ds_M \right); \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{n}_{M_0} \times \vec{H}(M_0))_S &= (\vec{n}_{M_0} \times \vec{H}^0(M_0))_S - \\ &- \frac{1}{4\pi} \left( \int_S \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_S \operatorname{rot}(\vec{P} - \vec{Q}_0) ds_M - \int_F \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_F \operatorname{rot} \vec{P} ds_M \right) + \\ &+ \frac{i}{4\pi\omega\mu} \left( \int_S \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_F k_m^2 \vec{P} + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{E})_F \nabla) \operatorname{div} \vec{P} \} ds_M - \right. \\ &\quad \left. - \int_S \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_S (k_m^2 \vec{P} - k^2 \vec{Q}_0) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{E})_S \nabla) \operatorname{div}(\vec{P} - \vec{Q}_0) \} ds_M \right); \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{n}_{M_0} \times \vec{E}(M_0))_F &= \frac{1}{2\pi(\varepsilon_n + \varepsilon_m)} \left( \int_F \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_F \operatorname{rot}(\varepsilon_n \vec{G} - \varepsilon_m \vec{R}) ds_M + \right. \\ &\quad \left. + \int_S \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_S \operatorname{rot} \varepsilon_m \vec{R} ds_M \right) + \\ &+ \frac{i}{2\pi\omega(\varepsilon_n + \varepsilon_m)} \left( \int_F \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_F (k_n^2 \vec{G} - k_m^2 \vec{R}) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{H})_F \nabla) \operatorname{div}(\vec{G} - \vec{R}) \} ds_M + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \int_S \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_S k_m^2 \vec{R} + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{H})_S \nabla) \operatorname{div} \vec{R} \} ds_M \right); \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\vec{n}_{M_0} \times \vec{H}(M_0))_F &= \frac{1}{4\pi} \left( \int_S \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_S \operatorname{rot} \vec{P} ds_M - \right. \\ &\quad \left. - \int_F \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{H})_F \operatorname{rot}(\vec{Q} - \vec{P}) ds_M \right) + \\ &+ \frac{i}{4\pi\omega\mu} \left( \int_F \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_F (k_n^2 \vec{Q} - k_m^2 \vec{P}) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{E})_F \nabla) \operatorname{div}(\vec{Q} - \vec{P}) \} ds_M - \right. \\ &\quad \left. - \int_S \{ \vec{n}_{M_0} \times (\vec{n}_M \times \vec{E})_S \cdot k_m^2 \vec{P} + \vec{n}_{M_0} \times ((\vec{n}_M \times \vec{H})_S \nabla) \operatorname{div} \vec{P} \} ds_M \right). \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{n}$  — вектор внешней относительно областей  $V$  и  $D$  единичной нормали к поверхностям  $S$  или  $F$ , а  $[\vec{n} \vec{E}]$  и  $[\vec{n} \vec{H}]$  — касательные к поверхностям  $S$  и  $F$  составляющие полных полей. Итак, в общем случае необходимо решать систему из четырех векторных интегральных уравнений (8) — (11).

Численное решение этой системы в общем виде в настоящее время достаточно сложно. Поэтому в дальнейшем подробно рассмотрим более простую задачу, которая сводится к системе из двух интегральных уравнений.

Пусть в трехслойной среде находится только одна цилиндрическая область с круговой направляющей радиуса  $a$ , образующая которой перпендикулярна к горизонтальным границам  $L_1, L_2$  слоя толщины  $h$ . На оси цилиндрической поверхности  $S$  находится источник электромагнитного поля (возбуждение осесимметричное). Так как среда обладает осевой симметрией, а возбуждение поля осесимметричное, то последнее можно разбить на две независи-

мые системы, вытекающие из уравнений (1)  $\left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0 \right)$ :

1. Магнитное возбуждение  $\vec{H}\{H_r, 0, H_z\}$  и  $\vec{E}\{0, E_\varphi, 0\}$ .

$$H_r = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi).$$

2. Электрическое возбуждение  $\vec{H}\{0, H_\varphi, 0\}$  и  $\vec{E}\{E_r, 0, E_z\}$ .

$$E_r = -\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = \frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi).$$

При магнитном возбуждении можно написать систему скалярных интегральных уравнений относительно  $E_\varphi$  и  $H_z$ , а при электрическом — относительно  $E_z$  и  $H_\varphi$ .

Уравнения (8), (9) запишем в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Взяв соответствующие компоненты из уравнений, получаем скалярные системы из двух интегральных уравнений для магнитного возбуждения

$$H_z(z_0) = H_z^0(z_0) + \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(z) M_1(z, z_0) dz - \frac{ia}{4\pi\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(z) M_2(z, z_0) dz, \quad (12)$$

$$E_\varphi(z_0) = \frac{2\varepsilon}{(\varepsilon_n + \varepsilon)} E_\varphi^0(z_0) + \frac{a}{2\pi(\varepsilon_n + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(z) M_3(z, z_0) dz - \frac{ia}{2\pi\omega(\varepsilon_n + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(z) M_4(z, z_0) dz$$

и для электрического возбуждения

$$H_\varphi(z_0) = H_\varphi^0(z_0) + \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\varphi(z) N_1(z, z_0) dz - \frac{ia}{4\pi\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(z) N_2(z, z_0) dz, \quad (13)$$

$$E_z(z_0) = \frac{2\varepsilon}{(\varepsilon_n + \varepsilon)} E_z^0(z_0) + \frac{a}{2\pi(\varepsilon_n + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(z) N_3(z, z_0) dz + \frac{i}{2\pi\omega(\varepsilon_n + \varepsilon)} \int_{-\infty}^{+\infty} H_\varphi(z) N_4(z, z_0) dz.$$

Ядра уравнений в системах (12) и (13) есть интегралы по  $\varphi$  от элементов всех тензорных функций Грина, например,

$$M_4(z, z_0) = \int_0^{2\pi} (k_n^2(M) g_{22} - k^2 g_0) \cos \varphi d\varphi.$$

Вычислительную сторону описанного выше метода можно упростить в некоторых частных случаях, если использовать только один тензор Грина (электрический или магнитный). При магнитном возбуждении магнитооднородной среды удобнее использовать электрический тензор  $\hat{G}$ , так как часть его членов равна нулю.

Пусть распределение проводимости во вмещающей среде таково:

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_3, & \text{для } |z| > \frac{h}{2}, \\ \sigma_2, & \text{для } |z| < \frac{h}{2}. \end{cases}$$

На оси цилиндрической поверхности на высоте  $H$  от начала координат находится вертикальный магнитный диполь с моментом  $m = IS$ . Токами смещения по сравнению с токами проводимости всюду в пространстве пренебрегаем. При этом  $k^2 = i\omega\sigma\mu$ ,  $k_n^2 = i\omega\sigma_n\mu$ . Система интегральных уравнений (12) принимает следующий вид:

$$E_\varphi(z_0) = E_\varphi^0(z_0) + \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(z) M_3(z, z_0) dz - \frac{i\omega\mu a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(z) M_4(z, z_0) dz, \quad (14)$$

$$H_z(z_0) = H_z^0(z_0) - \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(z) M_1(z, z_0) dz - \frac{ia}{4\pi\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(z) M_2(z, z_0) dz,$$

где величины

$$M_1 = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{a} (g_{22} - g_0) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial r} (g_{22} - g_0) \right] d\varphi;$$

$$M_2 = \int_0^{2\pi} \left[ k_n^2(M) g_{22} - k^2 g_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (g_{22} - g_0) \right] d\varphi; \quad (15)$$

$$M_3 = \int_0^{2\pi} (g_{22} - g_0) \cos \varphi d\varphi;$$

$$M_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (g_{22} - g_0) d\varphi.$$

Как видно, ядра интегральных уравнений содержат только один элемент  $g_{22}$  тензора  $\hat{G}$ .

К решению системы (14) возможны два подхода. Первый заключается в том, что решение системы интегральных уравнений на бесконечном промежутке сводится к решению системы интегральных уравнений на некотором конечном промежутке. При этом необходимо учитывать характер поведения решения на бесконечности (при  $|z| \rightarrow \infty$ ). С использованием блочного метода система интегральных уравнений (14) сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Второй подход заключается в применении метода частичного обращения оператора с дальнейшим применением метода последовательных приближений [4]. И в том и в другом случае необходимо иметь решение рассматриваемой задачи в отсутствие среднего слоя (при  $h=0$  или  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ ), которое можно считать первым приближением в решении рассматриваемой задачи. Обозначим его через  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{H}_1$  и получим решение системы (14) в этом частном случае. Заметим, что тензор  $\vec{G}$  принимает диагональный вид, ядра уравнений (14) зависят от модуля разности аргументов и принимают следующий вид:

$$M_1 = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{e^{ik_1 R}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \right) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ik_1 R}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] d\varphi,$$

$$M_2 = \int_0^{2\pi} \left[ k_1^2 \frac{e^{ik_1 R}}{R} - k^2 \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{ik_1 R}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] d\varphi. \quad (16)$$

$$M_3 = \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{ik_1 R}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \right) \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$M_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{ik_1 R}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \right) d\varphi.$$

Здесь  $R^2 = 2a[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] + (z - z_0)^2$ . В силу осевой симметрии рассматриваемой задачи можно положить  $\varphi_0 = 0$  и тогда

$$R^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (z - z_0)^2.$$

Применяя преобразование Фурье

$$h_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}_z(z) e^{iu(z_0-H)} dz_0,$$

$$e_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(z) e^{iu(z_0-H)} dz_0 \quad (17)$$

к уравнениям (14), получим систему

$$e_\varphi = e_\varphi^0 + \frac{a}{4\pi} e_\varphi \vec{M}_3 - \frac{i\omega\mu a}{4\pi} h_z \vec{M}_4, \quad (18)$$

$$h_z = h_z^0 - \frac{a}{4\pi} h_z \vec{M}_1 - \frac{ia}{4\pi\omega\mu} e_\varphi \vec{M}_2,$$

имеющую решение

$$e_\varphi = \frac{i\omega\mu m}{4\pi a} \left\{ \eta K_1(a\eta) + \eta I_1(a\eta) \frac{[\eta K_0(a\eta) K_1(a\eta_1) - \eta_1 K_0(a\eta_1) K_1(a\eta)]}{[\eta I_0(a\eta) K_1(a\eta_1) + \eta_1 I_1(a\eta) K_0(a\eta_1)]} \right\}, \quad (19)$$

$$h_z = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \eta^2 K_0(a\eta) - \eta^2 I_0(a\eta) \frac{[\eta K_0(a\eta) K_1(a\eta_1) - \eta_1 K_0(a\eta_1) K_1(a\eta)]}{[\eta I_0(a\eta) K_1(a\eta_1) + \eta_1 I_1(a\eta) K_0(a\eta_1)]} \right\},$$

где  $\eta_1^2 = u^2 - k_1^2$ ,  $\eta^2 = u^2 - k^2$ . Применяв обратное преобразование Фурье и проделав не сложные, но громоздкие выкладки, можно выписать окончательный результат, т. е. поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на цилиндрической поверхности раздела (при  $r = a$ )

$$E_\varphi(z_0) = -\frac{i\omega\mu m}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \eta I_1(a\eta) \frac{[\eta K_0(a\eta) K_1(a\eta_1) - \eta_1 K_0(a\eta_1) K_1(a\eta)]}{[\eta I_0(a\eta) K_1(a\eta_1) + \eta_1 I_1(a\eta) K_0(a\eta_1)]} \cos u(z_0 - H) du \right\}, \quad (20)$$

$$H_z(z_0) = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \eta^2 I_0(a\eta) \frac{[\eta K_0(a\eta) K_1(a\eta_1) - \eta_1 K_0(a\eta_1) K_1(a\eta)]}{[\eta I_0(a\eta) K_1(a\eta_1) + \eta_1 I_1(a\eta) K_0(a\eta_1)]} \cos u(z_0 - H) du \right\}.$$

Чтобы получить поля  $\vec{E}_1$  и  $\vec{H}_1$  внутри цилиндрической поверхности, необходимо найденные значения полей подставить в (4):

$$E_{1\varphi}(M_0) = E_\varphi^0(M_0) + \frac{i\omega\mu m}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \cos \varphi d\varphi dz -$$

$$- \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(z) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) d\varphi dz, \quad (21)$$

$$H_{1z}(M_0) = H_z^0(M_0) + \frac{ia}{4\pi\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} E_\varphi(z) \int_0^{2\pi} \left[ k^2 \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] d\varphi dz -$$

$$- \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_z(z) \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) \cos \varphi \right] d\varphi dz.$$

Итак, предлагаемый метод позволяет свести задачу к интегральным уравнениям, допускающим численное решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кауфман А. А. Теория индукционного каротажа. Новосибирск, «Наука», 1965.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. Настоящий сборник.
3. Захаров Е. В., Ильин И. В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. «Изв. АН СССР», сер. «физика Земли», 1970, № 8.
4. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численных методах решения некоторого класса дифракционных задач. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.

Е. В. ЗАХАРОВ, И. В. ИЛЬИН

### МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В работе [1] получены интегральные представления электромагнитных полей в горизонтально-слоистой среде с кусочно-постоянными параметрами, позволившие для тела, расположенного в полупространстве, свести задачу к интегральным уравнениям. В настоящей работе предложенный в [1] метод обобщается на случай среды с кусочно-дифференцируемыми параметрами. Построены и исследованы тензоры Грина такой среды, с помощью которых задача для уравнений Максвелла при наличии неоднородности сведена к интегральным уравнениям.

**Постановка задачи.** Пусть имеется среда с кусочно-дифференцируемыми параметрами,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая и  $\mu_0$  — магнитная проницаемости соответственно,  $\sigma$  — проводимость, которые изменяются в каком-то одном направлении. Данная среда имеет  $(n-1)$  границу разрыва параметров  $L_p$  ( $p=1, 2, \dots, n-1$ ) и содержит некоторую произвольную область  $V$  с достаточно гладкой границей  $S$ . Выберем систему координат  $xuz$  таким образом, чтобы ось  $z$  совпадала с направлением изменения параметров среды  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  и  $\sigma$  (т. е. ось  $z$  перпендикулярна границам разрыва параметров среды), а плоскость  $XOY$  совпадала с первой границей разрыва параметров среды  $L_1$ . Среду удобно характеризовать комплексными кусочно-дифференцируемыми функциями  $\epsilon_p(z)$ ,  $\mu_p(z)$ :

$$\epsilon_p(z) = \epsilon_p^0(z) + \frac{i\sigma_p(z)}{\omega}, \quad \mu_p(z) = \mu_p^0(z) + \frac{i\sigma'_p(z)}{\omega},$$

$$\sigma_p(z) \geq 0, \quad \sigma'_p(z) \geq 0, \quad (p=1, 2, \dots, n),$$

где  $\sigma'_p$  — магнитная проводимость, которая вводится для симметрии уравнений.

Обозначим параметры области  $V$  через  $\epsilon(M)$  и  $\mu(M)$ . Будем рассматривать два случая:

Если включить минус и  $\alpha_0$  в  $\Phi(\psi)$ , сделать замену  $\xi a = \rho$  и устремить  $N \rightarrow \infty$ , то мы получим

$$u(\xi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) \Phi_n \sqrt{a} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 a)}{2 \sqrt{\rho} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(k_0 a)} P_n(\cos \psi).$$

Этот ряд совпадает с дифракционным рядом, полученным методом разделения переменных.

В случае второй краевой задачи коэффициенты  $A_n$  определяются аналогичным образом. В этом случае

$$u_N = - \sum_{n=0}^N \frac{\Phi_n (2n+1) a \sqrt{\lambda} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\lambda \xi) P_n(\cos \psi)}{\alpha_0 [2\lambda H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\lambda) - H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\lambda)] \sqrt{\xi}}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г. Дифракция на ограниченном теле. ДАН СССР, 1969, т. 184, № 1.
2. Свешников А. Г. Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах. Докт. дисс. Физ. ф-т МГУ, 1963.
3. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. I. М., Физматгиз, 1964.
4. Уиттеккер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М., «Мир», 1967.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1968.

Е. В. ЗАХАРОВ, Ю. В. ПИМЕНОВ, Л. А. ШАЛКИНА

### АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Как известно, параметры антенны (диаграмма направленности, входное сопротивление и др.) зависят не только от свойств самой антенны, но также и от свойств объекта, на котором или вблизи которого они располагаются. Задача определения влияния объекта на параметры антенны по существу сводится к задаче дифракции электромагнитных волн на теле сложной конфигурации. Решение такой задачи в строгой постановке сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому обычно объект аппроксимируют телом или поверхностью более простой формы, а вместо реальной антенны рассматривают простейшие антенны: элементарный электрический и элементарный магнитный вибраторы. Если объект, вблизи которого располагается антенна, является металлическим, его, как правило, считают идеально проводящим. Такое допущение, существенно упрощая решение, дает достаточно высокую точность. Кроме того, в ряде случаев металлическая поверхность (экран), вблизи которой находится излучатель, сама является частью антенны.

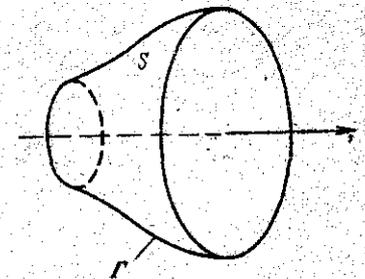


Рис. 1

В настоящей работе рассматривается осесимметричная задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих, бесконечно тонких поверхностях вращения. В этом случае интегральные уравнения будут одномерными, а логарифмическая особенность ядра при совпадении аргументов позволяет применять метод саморегуляризации [1]. В работе на основе метода саморегуляризации предлагается алгоритм численного решения соответствующих уравнений, который учитывает характер поведения решения на концах интервала. Проведен анализ алгоритма в зависимости от формы поверхности и частоты.

Рассмотрим осесимметричную задачу дифракции монохроматических электромагнитных волн на бесконечно тонкой, идеально проводящей поверхности  $S$  (рис. 1), образованной вращением контура  $\Gamma$  вокруг оси  $z$  цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ . Контур  $\Gamma$  зададим уравнениями

$$r = \rho(t); \quad z = \zeta(t); \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (1)$$

а угол  $\varphi$  будем отсчитывать от плоскости, проходящей через ось  $z$  и точку наблюдения ( $M$ ). Зависимость от времени примем в виде  $e^{i\omega t}$ . Как известно, в случае осевой симметрии уравнения Максвелла распадаются на две независимые группы, в одну из которых входят только составляющие  $E_\varphi, H_r, H_z$ , а в другую —  $E_r, E_z, H_\varphi$ . Произвольное первичное поле, обладающее симметрией вращения, также можно представить в виде суперпозиции двух независимых полей:

$$\vec{E}^0 = \vec{\varphi}_0 E_\varphi^0; \quad \vec{H}^0 = \vec{r}_0 H_r^0 + \vec{z}_0 H_z^0 \quad (a)$$

и

$$\vec{E}^0 = \vec{r}_0 E_r^0 + \vec{z}_0 E_z^0; \quad \vec{H}^0 = \vec{\varphi}_0 H_\varphi^0. \quad (b)$$

Поэтому в случае осевой симметрии решение задачи дифракции произвольного монохроматического электромагнитного поля на идеально проводящей поверхности вращения сводится к решению двух независимых задач дифракции, соответствующих первичным полям типа (a) и (b). В настоящей работе в основном мы ограничимся рассмотрением полей типа (a).

Если поверхность  $S$  возбуждается полем (a), то на ней наводятся только кольцевые токи с плотностью

$$\vec{j} = \vec{\varphi}_0 j(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (2)$$

Соответствующий этим токам векторный потенциал  $\vec{A}$  также будет иметь только  $\varphi$ -тую составляющую, которая в точках поверхности выражается в виде

$$A(r, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} j(t) \rho(t) \sqrt{\rho'^2(t) + \zeta'^2(t)} dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikQ}}{Q} \cos \varphi d\varphi, \quad (3)$$

где

$$Q = \{\rho^2(\tau) + \rho^2(t) + [\zeta(\tau) - \zeta(t)]^2 - 2\rho(\tau)\rho(t) \cos \varphi\}^{1/2},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ — волновое число.}$$

Напряженность вторичного электрического поля  $\vec{E}$  связана с векторным потенциалом  $\vec{A}$  соотношением

$$\vec{E} = -i\omega \vec{A}. \quad (4)$$

Учитывая граничное условие

$$E_\varphi|_S = -E_\varphi^0|_S, \quad (5)$$

приходим к интегральному уравнению Фредгольма первого рода для плотности тока  $j(t)$ :

$$E_\varphi^0|_S = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} j(t) \rho(t) \sqrt{\rho'^2(t) + \zeta'^2(t)} dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikQ}}{Q} \cos \varphi d\varphi. \quad (6)$$

В случае, когда первичное поле создается элементарным магнитным вибратором (рамкой с током  $J_0$  и площадью  $s$ ), расположенным на оси  $z$  на расстоянии  $H$  от начала координат,

$$E_\varphi^0|_S = -\frac{\omega\mu J_0 s}{4\pi} \left( \frac{k}{R} - \frac{i}{R^2} \right) \frac{\rho(\tau)}{R} e^{-ikR}, \quad (7)$$

где

$$R = \sqrt{\rho^2(\tau) + [\zeta(\tau) - H]^2}.$$

В результате получили интегральное уравнение

$$J_0 s \left( k - \frac{i}{R} \right) \frac{\rho(\tau) e^{-ikR}}{R^2} = i \int_{t_1}^{t_2} j(t) \rho(t) \sqrt{\rho'^2(t) + \zeta'^2(t)} dt \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikQ}}{Q} \cos \varphi d\varphi.$$

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого выразим все величины в долях некоторого характеристического размера поверхности  $S$ . Пусть « $a$ » — такой размер, тогда

$$\eta(t) = \frac{\rho(t)}{a}, \quad \xi(t) = \frac{\zeta(t)}{a}, \quad \gamma = ka,$$

$$h = \frac{H}{a}, \quad D = \frac{Q}{a}, \quad R_0 = \frac{R}{a}.$$

Кроме того, введем безразмерную функцию  $u(t)$ :

$$u(t) = \frac{ia^3}{J_0 s} j(t).$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) \eta(t) \sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)} dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \\ = \left( \gamma - \frac{i}{R_0} \right) \frac{\eta(\tau)}{R_0^2} e^{-i\gamma R_0}. \quad (8)$$

Рассмотрим более подробно некоторые конкретные типы поверхности  $S$ :

1. **Коническая поверхность.** Пусть поверхность  $S$  представляет собой идеально проводящую, бесконечно тонкую коническую поверхность. Угол при вершине обозначим  $2\alpha$ . Выберем в качестве параметра расстояние вдоль образующей конуса от его вершины до рассматриваемой точки. Тогда

$$\begin{aligned} t_1 &= 0; \quad t_2 = 1; \\ \xi(t) &= t \cos \alpha; \quad \eta(t) = t \sin \alpha; \\ R_0 &= (\tau^2 + h^2 - 2\tau h \cos \alpha)^{1/2}; \\ D &= [\tau^2 + t^2 - 2\tau t (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi)]^{1/2} \end{aligned} \quad (9)$$

и интегральное уравнение (8) примет вид

$$\int_0^1 u(t) t dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \left( \gamma - \frac{i}{R_0} \right) \frac{\pi}{R_0^2} e^{-i\gamma R_0}. \quad (10)$$

Отметим, что из физических соображений очевидно, что искомая функция  $u(t)$  в точке  $t=0$  должна обращаться в нуль, а при  $t=1$  имеет особенность вида  $(1-t)^{-1/2}$ .

2. **Бесконечно тонкий диск.** В случае  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  коническая поверхность вырождается в бесконечно тонкий диск, расположенный в плоскости  $z=0$ .

В качестве интегрального уравнения задачи можно использовать уравнение (10), если считать, что

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{\tau^2 + h^2}; \quad D = [\tau^2 + t^2 - 2\tau t \cos \varphi]^{1/2}, \\ \eta(t) &= t; \quad \xi(t) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функция  $u(t)$  также имеет особенность только при  $t=1$ , а при  $t=0$  обращается в нуль.

3. **Усеченная коническая поверхность.** В случае усеченной конической поверхности ( $b \leq t \leq 1$ ) уравнение (10) записывается в виде

$$\int_b^1 u(t) t dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \left( \gamma - \frac{i}{R_0} \right) \frac{\pi}{R_0^2} e^{-i\gamma R_0}. \quad (12)$$

Все величины, входящие в (12), определяются формулами (9). Функция  $u(t)$  в этом случае имеет при  $t=b$  и  $t=1$  особенность вида  $[(t-b)(1-t)]^{-1/2}$ .

4. **Плоское кольцо.** Если угол  $\alpha$  положить равным  $\frac{\pi}{2}$ , то усеченная коническая поверхность вырождается в плоское кольцо

с внутренним радиусом, равным « $b$ », и внешним, равным 1, расположенное в плоскости  $z=0$ . В этом случае также может быть использовано уравнение (12), но при этом величины  $D$  и  $R_0$  должны быть определены из формул (11).

5. **Сферическая поверхность.** Пусть поверхность  $S$  представляет собой идеально проводящую, бесконечно тонкую сферическую поверхность. Выберем в качестве параметра  $t$  угол, отсчитываемый от оси  $z$  до рассматриваемой точки. Тогда

$$\begin{aligned} t_1 &= 0; \quad t_2 = \alpha; \\ \eta(t) &= \sin t; \quad \xi(t) = \cos t; \\ R_0 &= \left[ (1+h)^2 - 4h \cos^2 \frac{\tau}{2} \right]^{1/2}; \\ D &= [2(1 - \sin t \sin \tau \cos \varphi - \cos \tau \cos t)]^{1/2} \end{aligned}$$

и интегральное уравнение (8) будет иметь вид

$$\int_0^\alpha u(t) \sin t dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \sin \tau \frac{e^{-i\gamma R_0}}{R_0^2} \left( \gamma - \frac{i}{R_0} \right). \quad (13)$$

В этом случае функция  $u(t)$  в точке  $t=0$  должна обращаться в нуль, а при  $t=\alpha$  имеет особенность вида  $(\alpha-t)^{-1/2}$ .

В случае сферического пояса ( $\alpha_1 \leq t \leq \alpha_2$ ) уравнение (13) принимает вид

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u(t) \sin t dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \sin \tau \frac{e^{-i\gamma R_0}}{R_0^2} \left( \gamma - \frac{i}{R_0} \right). \quad (14)$$

Функция  $u(t)$  в этом случае имеет особенность вида

$$[(t-\alpha_1)(\alpha_2-t)]^{-1/2}.$$

6. **Цилиндрическая поверхность.** Пусть поверхность  $S$  представляет собой идеально проводящую, бесконечно тонкую цилиндрическую поверхность радиуса  $a$  и длины  $L=ab$ . Выберем в качестве параметра  $t$  расстояние вдоль образующей цилиндра от его основания до рассматриваемой точки. Тогда

$$\begin{aligned} t_1 &= 0; \quad t_2 = b; \\ \eta(t) &= 1; \quad \xi(t) = t; \\ D &= [(\tau-t)^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}]^{1/2}; \\ R_0 &= [1 + (h-\tau)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

и интегральное уравнение (8) будет иметь вид

$$\int_0^b u(t) dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \left( \gamma - \frac{i}{R_0} \right) \frac{e^{-i\gamma R_0}}{R_0^2} \quad (15)$$

В этом случае  $u(t)$  при  $t=0$  и  $t=b$  имеет особенность вида  $[t(b-t)]^{-1/2}$ .

Перейдем к описанию алгоритма решения интегрального уравнения и анализу некоторых численных результатов.

Итак, необходимо решить интегральное уравнение

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) K(\tau, t) dt = F(\tau), \quad (16)$$

где

$$K(\tau, t) = \eta(t) \sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi,$$

а функции  $F(\tau)$  — правая часть уравнения (8). Как видно, уравнение (16) представляет собой интегральное уравнение первого рода, ядро которого имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов [3]. Метод решения подобных уравнений был предложен в [1] и основан на предположении, что искомое решение слабо меняется на некотором интервале. Чтобы выяснить характер поведения ядра интегрального уравнения, представим ядро  $K(\tau, t)$  следующим образом:

$$K(\tau, t) = \eta(t) \sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)} \left( \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D} - 1}{D} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{D} \right).$$

Первый интеграл, входящий в эту сумму, является непрерывной функцией, а для второго интеграла найдем первые члены разложения, которое справедливо при любых  $\tau$  и  $t$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{D} = \frac{4}{\sqrt{[\eta(\tau) + \eta(t)]^2 + [\xi(\tau) - \xi(t)]^2}} \times \\ \times \left[ \frac{\eta^2(\tau) + \eta^2(t) + [\xi(\tau) - \xi(t)]^2}{2\eta(\tau)\eta(t)} K(k) - \frac{[\eta(\tau) + \eta(t)]^2 + [\xi(\tau) - \xi(t)]^2}{2\eta(\tau)\eta(t)} E(k) \right],$$

где  $K(k)$ ;  $E(k)$  — эллиптические интегралы I и II рода соответственно,

$$k = \frac{2\sqrt{\eta(\tau)\eta(t)}}{\sqrt{[\eta(\tau) + \eta(t)]^2 + [\xi(\tau) - \xi(t)]^2}}$$

Воспользовавшись разложением для функций  $K(k)$  и  $E(k)$ , получим следующее асимптотическое разложение при  $\tau \rightarrow t$ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{D} \approx \frac{2}{\eta(\tau)} \left[ 3 \ln 2 - 2 + \ln \frac{\eta(\tau)}{\sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)}} - \ln |\tau - t| \right].$$

Как видно, ядро имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов  $\tau$  и  $t$ .

Решение уравнения (16) можно представить следующим образом [1]:

$$u(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{(t-t_1)(t_2-t)}}, \quad \text{где } g(t) \in H \text{ на } [t_1, t_2].$$

Тогда интегральное уравнение (16) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) K(\tau, t) dt = F(\tau), \quad (17)$$

где

$$K(\tau, t) = \frac{\eta(t) \sqrt{\eta'^2(t) + \xi'^2(t)}}{\sqrt{(t-t_1)(t_2-t)}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi.$$

Используя результаты работы [1], можно от рассматриваемого интегрального уравнения перейти к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^N K_{ik} g_k = f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где

$$f_i = f(t_{i+1/2}), \quad K_{ik} = \int_{t_k}^{t_{k+1/2}} K(t_{i+1/2}, t) dt, \\ g_k = g(t_{k+1/2}).$$

Решая для данного  $N$  систему линейных алгебраических уравнений, можно получить приближенное решение в  $N$  точках. Для решения этой системы использовалась стандартная программа решения систем линейных алгебраических уравнений до 78 порядка с комплексной матрицей. Сделаем несколько замечаний относительно вычисления элементов матрицы  $\|K_{ik}\|$ . Так как диагональные элементы имеют логарифмическую особенность, то эта особенность выделяется, а затем вычисляются интегралы от логарифма. Остальные интегралы заменяются формулой средних прямоугольников. Интегралы же, входящие в функцию  $K(\tau, t)$ ,

вычисляются с заданной точностью методом Симпсона с автоматическим выбором шага. Так как была введена функция  $g(t)$  вместо  $u(t)$ , то удлинились вычисления

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{\sqrt{(t-t_1)(t_2-t)}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t_{k+1/2}-t_1}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{\sqrt{t_2-t}} \sqrt{t-t_1} > \sqrt{t_2-t}, \\ \frac{1}{\sqrt{t_2-t_{k+1/2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{\sqrt{t-t_1}} \sqrt{t-t_1} < \sqrt{t_2-t}. \end{cases}$$

Описанный алгоритм был реализован в виде программы на ЭВМ БЭСМ-4 для максимального порядка стандартной программы решения систем линейных алгебраических уравнений. Некоторые из полученных численных результатов приведены в таблицах и на графиках.

Представляет интерес сравнение численных результатов при малых значениях параметра  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) с полученной аналитически низкочастотной асимптотикой решения интегрального уравнения (17) при  $\gamma \rightarrow 0$ . Для диска эта асимптотика была получена в [2]:

$$u(t) = -\frac{iht}{\pi^2 R_0^4} \left( \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+h^2} + \frac{3}{R_0} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-t^2}}{R_0} \right),$$

но

$$u(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

Следовательно,

$$g(t) = -\frac{iht}{\pi^2 R_0^4} \left[ \frac{2h^2 - t^2 + 3}{(1+h^2)\sqrt{1+t}} + \frac{3\sqrt{1-t}}{R_0} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-t^2}}{R_0} \right]. \quad (18)$$

Низкочастотная асимптотика для сферической поверхности может быть получена из уравнения (13) на основе метода, предложенного в работе [2]. Опуская преобразования, выпишем окончательный результат, когда излучатель находится в центре сферической поверхности:

$$g(t) = -\frac{i}{\pi^2} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}} \left[ \frac{\sqrt{t(\alpha-t) \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} \right)}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{t(\alpha-t)}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}} + \frac{3\sqrt{t(\alpha-t)}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}} \right] \quad (19)$$

Отметим, что в формулах (18) и (19)  $\operatorname{Re} g(t) = 0$ . Было проведено сравнение асимптотик (диск и сферическая поверхность) с соответствующими численными решениями для различных положений источника (диск) и параметра  $\alpha$  (сферическая поверхность).

Для диска при  $\gamma = 0,01$  погрешность вычисления составляет 0,0001, а при  $\gamma = 1-0,01$ . При уменьшении  $h$  совпадение с асимптотикой ухудшается, так как решение уравнения сильно возрастает в окрестности центра диска. В случае сферической поверхности при увеличении  $\alpha$  (рис. 2) совпадение с асимптотикой ухудшается, так как увеличивается расстояние между точками разбиения. Как видно из графиков (рис. 3-4), когда диполь приближается к диску ( $h \rightarrow 0$ ), решение интегрального уравнения (17) сильно возрастает в окрестности центра диска и перестает удовлетворять априорному предположению. Поэтому при уменьшении  $h$  необходимо, вообще говоря, уменьшать расстояние между точками разбиения (в окрестности центра диска).

В заключение сделаем несколько замечаний относительно алгоритма решения в случае полей типа (б), рассмотрев только случай диска.

Интегральное уравнение для этого случая было получено в [3]:

$$\int_0^1 u(t) t dt \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\gamma D}}{D} \cos \varphi d\varphi = \frac{d}{\gamma} J_1(\gamma\tau) - \int_0^1 P(\tau, t) F(t) t dt, \quad (20)$$

где

$$D = \sqrt{\tau^2 + t^2 - 2\tau t \cos \varphi},$$

$$P(\tau, t) = \begin{cases} N_1(\gamma\tau) J_1(\gamma t), & \tau > t, \\ N_1(\gamma\tau) J_1(\gamma\tau), & \tau = t, \\ N_1(\gamma t) J_1(\gamma\tau), & \tau < t, \end{cases}$$

$$F(t) = \left( \gamma^2 - \frac{3t\gamma}{R_0} - \frac{3}{R_0^2} \right) \frac{\tau e^{-i\gamma R_0}}{R_0^3},$$

$$R_0 = \sqrt{\tau^2 + h^2},$$

$$u(t) = \frac{2a^2}{\pi i \omega I_0 h} j(t).$$

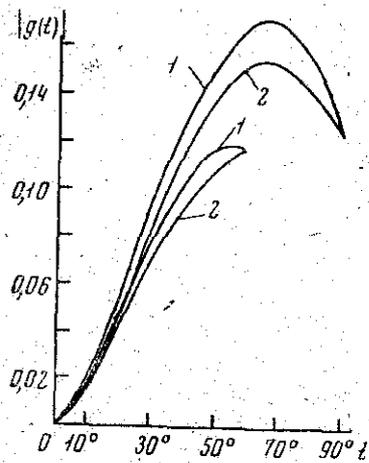


Рис. 2. 1 — решение  $\gamma=0,01$ ;  
2 — асимптотика

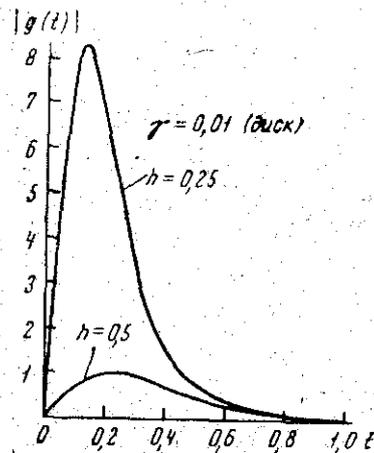


Рис. 3

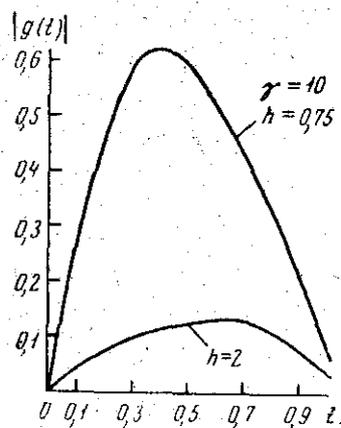


Рис. 4

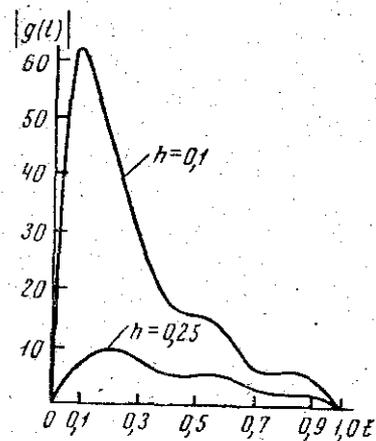


Рис. 5

Уравнение (20) отличается от уравнения (10) только правой частью, которая содержит неопределенную константу  $d$ . Эта константа определяется из условия

$$u(1) = 0, \quad (21)$$

которое следует из условия на ребре ( $u(t) \sim \sqrt{1-t}$  при  $t \rightarrow 1$ ). Эта дополнительная трудность в реализации описанного алгоритма может быть преодолена следующим образом. Решение представим в виде

$$u(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

Очевидно, что  $g(t) \sim A(1-t)$  при  $t \rightarrow 1$ . Поэтому для определения константы  $d$  можно применить линейную интерполяцию в окрестности ребра. Так как правая часть уравнения (20) состоит из двух слагаемых, то необходимо найти решение для каждого слагаемого в правой части в отдельности, потом через две ближайшие к ребру точки провести прямую, найти значения этих решений на конце интервала и из условия (21) определить  $d$ . Было проведено сравнение численных результатов при  $\gamma \rightarrow 0$  с низкочастотной асимптотикой, полученной аналитически в работе [2]:

$$u(t) = -\frac{2t}{\pi^2 R_0^2 h} \left( \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+h^2} + \frac{1}{\sqrt{h^2+t^2}} \arctg \sqrt{\frac{1-t^2}{h^2+t^2}} \right),$$

но

$$u(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{1-t}},$$

значит

$$g(t) = -\frac{2t}{\pi^2 R_0^2 h} \left[ \frac{(1-t)\sqrt{1+t}}{1+h^2} + \frac{\sqrt{1-t}}{R_0} \arctg \frac{\sqrt{1-t^2}}{R_0} \right]. \quad (22)$$

Отметим, что функция  $g(t)$  в формуле (22) не зависит от  $\gamma$  и  $\text{Im} g(t) = 0$ . Сравнение численного решения с асимптотическим показало, что разность их составляет в среднем 0,0001 при  $\gamma = 0,01$ . Улучшение совпадения асимптотики с численным решением по сравнению с результатами работы [3] по всей видимости связано с усовершенствованием алгоритма решения интегрального уравнения. На рис. 5 приведены  $|g(t)|$  для различных значений  $h$ . Как видно, характер зависимости плотности тока от высоты подъема электрического диполя остается тем же самым, что и для магнитного диполя.

Таким образом, используя описанный алгоритм, можно найти из интегральных уравнений (17) или (20) плотность тока на поверхности  $S$ , после чего нетрудно вычислить диаграмму направ-

ленности излучателя в присутствии идеально проводящей поверхности вращения, что дает возможность определить влияние экрана на характер излучения.

В качестве иллюстраций на рис. 6 и 7 приведены нормированные диаграммы направленности для случая диска, возбуждае-

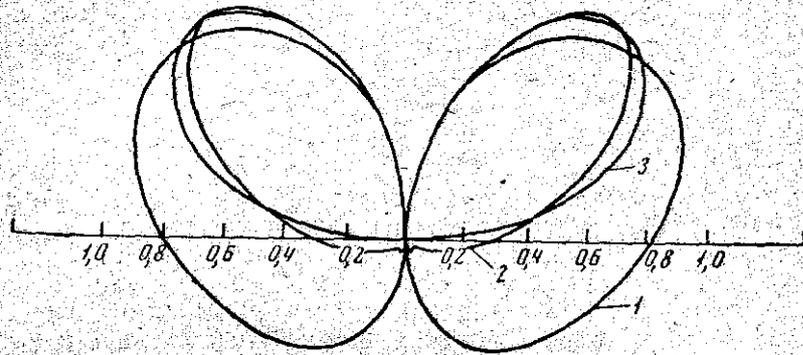


Рис. 6. 1 —  $\gamma=2$ ;  $h=0,5$ ; 2 —  $\gamma=10$ ;  $h=0,1$ ; 3 — диполь над плоскостью

мого магнитным (рис. 6) и электрическим (рис. 7) диполями. На рис. 6 приведены диаграммы направленности при фиксированных частотах и положениях диполя в зависимости от размеров диска. Один из графиков соответствует случаю диска бесконечно боль-

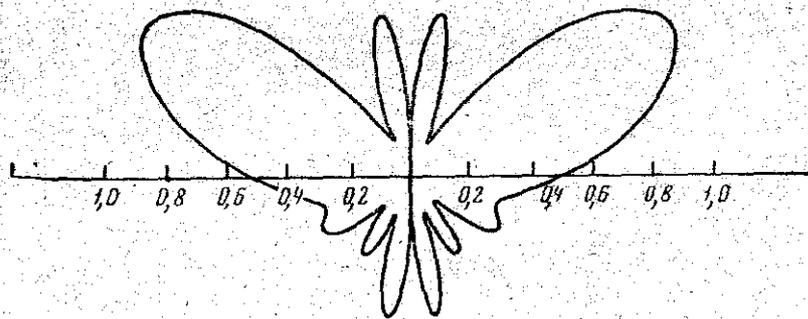


Рис. 7.  $\gamma=10$ ;  $h=0,1$

шого радиуса (плоскость). Если радиус диска составляет 10 расстояний диполя до диска, то характер диаграмм практически совпадает с соответствующей диаграммой диполя над плоскостью. Отметим, что в случае электрического диполя (рис. 7) диаграмма сильно изрезана, имеет достаточно высокий уровень излучения в области тени, чем резко отличается от соответствующей диаграммы (кривая 2, рис. 6) для магнитного диполя.

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I рода. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
2. Гринберг Г. А., Пименов Ю. В. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих плоских экранах. ЖТФ, 1957, т. 27, вып. 10.
3. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Дифракция электромагнитных волн, излучаемых вертикальным электрическим диполем, на идеально проводящем диске. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АНТЕНН

В. И. ДМИТРИЕВ, А. В. ЧЕЧКИН

О КОРРЕКТНЫХ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АНТЕНН

В статье рассматриваются различные корректные постановки задач синтеза антенн. Приводится одна из самых ранних корректных постановок, предложенная Вольманом И. И. и связанная с методом интеграла Фурье. Подробно разбирается постановка, связанная с методом регуляризации Тихонова А. Н. Рассматривается наиболее общая постановка задачи синтеза антенн, связанная с методом функциональных пространств.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим антенну, т. е. некоторую область  $V$  трехмерного пространства, в которой известно распределение тока  $\vec{j}$ . Тогда основные уравнения электродинамики в практической системе единиц будут следующими:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= i\omega\epsilon \vec{E} + \vec{j}, \\ \text{rot } \vec{E} &= -i\omega\mu \vec{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

В них предполагается зависимость от времени  $t$  в виде множителя  $e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  — угловая частота. Далее,  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  — электрический и магнитный векторы поля.

Решение уравнений (1) выражается через вектор Герца  $\vec{\Pi}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div } \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi}, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \\ \vec{H} &= i\omega\epsilon \text{rot } \vec{\Pi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для случая свободного пространства, т. е. когда  $\epsilon$  и  $\mu$  постоянные, вектор Герца имеет вид

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi i\omega\epsilon} \int_V \vec{j} \frac{e^{-ikr}}{r} dv.$$

Здесь  $r$  — расстояние от точки наблюдения до точки интегрирования.

Введем систему координат с центром во внутренней точке области, т. е. в такой точке, чтобы к области  $V$  принадлежал некоторый куб с центром в той же точке, рис. 1. Через  $\vec{R}(M)$  и

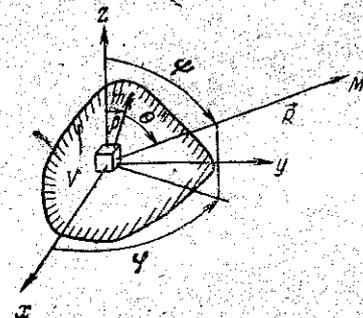


Рис. 1

$\vec{\rho}(m)$  обозначим радиусы-векторы точки наблюдения  $M$  и точки интегрирования  $m$ . Область трехмерного пространства, где одновременно выполняются условия  $R \gg D$ ,  $R \gg kD^2$ ,  $D$  — диаметр  $V$ , называется дальней зоной. В этой зоне выражение для вектора Герца упрощается:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi i\omega\epsilon} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} \vec{N}.$$

Вектор  $\vec{N}$ , который в дальнейшем будет играть основную роль, зависит только от угловых координат

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_V \vec{j}(m) e^{ik\rho \cos \theta} dv. \quad (3)$$

Функция  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  называется диаграммой направленности антенны по полю.

Обозначим сферические координаты вектора диаграммы направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  (3) через  $N_\varphi(\varphi, \psi)$ ,  $N_\psi(\varphi, \psi)$ ,  $N_R(\varphi, \psi)$ . Тогда векторы поля  $\vec{E}(\varphi, \psi, R)$  и  $\vec{H}(\varphi, \psi, R)$  (2) в дальней зоне определяются выражениями

$$\vec{E} = \frac{\omega\mu}{4\pi i} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} (N_\varphi \vec{i}_\varphi + N_\psi \vec{i}_\psi), \quad (4)$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\vec{i}_R \vec{E}] = \frac{k}{4\pi i} \cdot \frac{e^{-ikR}}{R} [\vec{i}_R (N_\varphi \vec{i}_\varphi + N_\psi \vec{i}_\psi)].$$

Вектор Умова—Пойнтинга в дальней зоне имеет вид

$$\vec{S}(\varphi, \psi, R) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E} \vec{H}^*] = \\ = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{\mu}} \cdot \frac{\omega^2 |\mu|^2}{32\pi R^2} (|N_\varphi|^2 + |N_\psi|^2) \vec{i}_R.$$

Поэтому величина плотности излучаемой мощности  $P_{00}(\varphi, \psi)$  выражается только через координаты  $N_\varphi$  и  $N_\psi$  вектора  $\vec{N}$  в сферической системе координат.

$$P_{00}(\varphi, \psi) = C(|N_\varphi|^2 + |N_\psi|^2), \quad C = \text{const.} \quad (5)$$

Выпишем выражение для мощности, излучаемой антенной в телесном секторе  $(\varphi, \varphi + \alpha; \psi, \psi + \beta)$

$$P_{\alpha\beta}(\varphi, \psi) = \int_{\varphi}^{\varphi+\alpha} \int_{\psi}^{\psi+\beta} P_{00}(\xi, \eta) \sin \eta d\xi d\eta. \quad (6)$$

Важной характеристикой антенны является коэффициент направленного действия, определяемый формулой

$$\text{к.н.д.} = \frac{4\pi P_{00}(\varphi, \psi)}{P_{2\pi\Omega}(\varphi, \psi)}, \quad (7)$$

а также показатель направленности излучения, характеризующий излучение в некотором фиксированном телесном секторе, так называемом секторе главного лепестка

$$\text{п.н.и.} = \frac{P_{\alpha\beta}(\varphi, \psi)}{P_{2\pi\Omega}(\varphi, \psi)}. \quad (8)$$

Заметим попутно, что п.н.и. характеризует и величину уровня боковых лепестков.

Коэффициент полезного действия антенны определяется следующим отношением:

$$\text{к.п.д.} = \frac{P_{2\pi\Omega}(\varphi, \psi)}{W}. \quad (9)$$

В знаменателе стоит величина полной мощности потерь антенны, определяемая выражением

$$W = C \int_V |\vec{j}(m)| dv.$$

Напишем еще один показатель, а именно реактивную мощность излучения антенны

$$R = W - P_{2\pi\Omega}(\varphi, \psi). \quad (10)$$

Из приведенных формул следует, что из трех координат вектора  $\vec{N} = \{N_\varphi; N_\psi; N_R\}$  в сферической системе координат, наиболее важными являются только две  $N_\varphi$  и  $N_\psi$ . Наконец отметим, что функция  $(|N_\varphi|^2 + |N_\psi|^2)$  называется диаграммой направленности антенны по мощности.

Векторное соотношение (3) между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и плотностью тока  $\vec{j}(m)$  распадается на три независимых скалярных соотношения:

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_V j_i(m) e^{i\rho \cos \theta} dv, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11)$$

между декартовыми координатами вектора  $\vec{N}(\varphi, \psi) = \{N_1(\varphi, \psi); N_2(\varphi, \psi); N_3(\varphi, \psi)\}$  и вектора  $\vec{j}(m) = \{j_1(m); j_2(m); j_3(m)\}$ .

Выпишем связь между декартовыми координатами вектора

$$\vec{N} = N_1 \vec{i}_x + N_2 \vec{i}_y + N_3 \vec{i}_z$$

и сферическими координатами этого же вектора

$$\vec{N} = N_\varphi \vec{i}_\varphi + N_\psi \vec{i}_\psi + N_R \vec{i}_R.$$

Так как

$$\vec{i}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i}_x + \cos \varphi \vec{i}_y + 0 \vec{i}_z; \quad \vec{i}_\psi = \cos \psi \cos \varphi \vec{i}_x + \cos \psi \sin \varphi \vec{i}_y - \\ - \sin \psi \vec{i}_z; \quad \vec{i}_R = \sin \psi \cos \varphi \vec{i}_x + \sin \psi \sin \varphi \vec{i}_y + \cos \psi \vec{i}_z,$$

то

$$\begin{cases} N_1 = -\sin \varphi N_\varphi + \cos \psi \cos \varphi N_\psi + \sin \psi \cos \varphi N_R, \\ N_2 = \cos \varphi N_\varphi + \cos \psi \sin \varphi N_\psi + \sin \psi \sin \varphi N_R, \\ N_3 = -\sin \psi N_\psi + \cos \psi N_R. \end{cases} \quad (12)$$

Определитель этой системы  $\Delta = -1 \neq 0$ .

В дальнейшем нам придется все время работать с соотношениями вида (11), поэтому упростим их запись. Пусть системе  $Oxyz: m(\xi, \eta, \zeta)$ , а  $\vec{\rho} = \{\xi; \eta; \zeta\}$ , тогда

$$\rho \cos \theta = \xi \sin \psi \cos \varphi + \eta \sin \psi \sin \varphi + \zeta \cos \psi.$$

Для удобства сделаем в (11) замену переменных

$$x = \{x_1; x_2; x_3\} = k\{\xi; \eta; \zeta\}, \quad (13)$$

$$z = \{z_1; z_2; z_3\} = \{\sin \psi \cos \varphi; \sin \psi \sin \varphi; \cos \psi\}.$$

После замены переменных (13) область  $V$  перейдет в некоторую область  $\sigma$ . Вместо функций  $j_i(m) = j_i(\xi, \eta, \zeta)$  и  $N_i(\varphi, \psi)$  мы бу-

дем рассматривать функции трех переменных  $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$  и  $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z_1, z_2, z_3)$ , определяемых формулами

$$j_i(\xi, \eta, \zeta) = |J| f(k\xi, k\eta, k\zeta) = |J| f(x), \quad (14)$$

$$N_i(\varphi, \psi) = \mathcal{F}(\sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi, \cos \psi) = \mathcal{F}(z),$$

где  $J$  — якобиан, определяющий связь  $d\sigma = |J| dV$ . Соотношение (11) тогда переписывается в виде

$$\mathcal{F}(z) = \int_{\sigma} f(x) e^{ixz} d\sigma = g[f], \quad (15)$$

где  $xz = x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3$ ,  $g[f]$  — интегральный оператор.

Из соотношения (15) видно, что функция  $\mathcal{F}(z)$  может быть определена во всем трехмерном пространстве  $R^3$ . Из соотношения (14) мы видим, что для определения диаграммы направленности достаточно знать функцию  $\mathcal{F}(z)$  на единичной сфере  $\Omega$ ,

$$\Omega = \{z : |z|^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\}. \quad (16)$$

Ядро  $e^{ixz}$  оператора  $g[f]$  в (15) будем считать заданным для  $x \in \sigma$ ,  $z \in \Omega$ . Относительно формулы (15) необходимо отметить следующее. Область антенны  $V$ , где рассматривается плотность тока  $\vec{j}(m)$ , может быть трехмерной частью, некоторой поверхностью, т. е. двумерной, а также частью кривой линии, т. е. одномерной. Поэтому каждый раз надо следить за элементом области  $dV$ . В результате замены (13) у нас размерность образа  $\sigma$  та же, что и у прообраза  $V$ . Поэтому мы должны каждый раз оговаривать, что понимается под  $d\sigma$ .

Например, если область  $V$ , а следовательно  $\sigma$ , — линейный отрезок, тогда при  $\sigma = [-l, l]$

$$\mathcal{F}(z) = \int_{-l}^l f(x) e^{ixz} dx = g[f], \quad -1 \leq z \leq 1, \quad (17)$$

где  $z = \sin \psi \cos \varphi$ ,  $x = k\xi$ ,  $|l| = k$ .

Мы пока говорили о соотношении между диаграммой направленности и плотностью тока. Какие задачи решают в теории антенн? Имеются две основные задачи — это прямая задача и задача синтеза антенн.

Прямая задача теории антенн заключается в определении излучаемого антенной электромагнитного поля в дальней зоне, если известно распределение тока  $\vec{j}$  в области  $V$ . Такая задача не представляет больших математических трудностей, так как связана только с интегрированием и дифференцированием функций.

В задаче синтеза антенн, которая много сложнее прямой, требуется определить плотность тока  $\vec{j}$  по известному желаемому

электромагнитному полю в дальней зоне. Определение тока в этом случае является неустойчивым по отношению к входной информации. Это связано с тем, что мало отличающиеся электромагнитные поля могут излучаться сколь угодно различными токами. Все это является причиной того, что обычная математическая постановка задачи синтеза приводит к некорректной задаче, а именно к решению интегрального уравнения первого рода (3).

Если же дополнить входную информацию (например, помимо желаемого электромагнитного поля в дальней зоне задавать определенные ограничения на ток), то можно получить устойчивую задачу на отыскание тока в антенне. В этом случае удается дать корректную математическую постановку задачи синтеза антенн и далее развить эффективные методы решения такой задачи. Сделаем одно замечание по поводу задания желаемой диаграммы направленности. В виду того что векторы поля в дальней зоне выражаются через сферические координаты вектора диаграммы направленности  $N_\varphi(\varphi, \psi)$  и  $N_\psi(\varphi, \psi)$  (4), то естественно задавать желаемые координаты  $N_\varphi$  и  $N_\psi$ .

С другой стороны, скалярные соотношения (11) связаны у нас с декартовыми координатами вектора диаграммы направленности  $N_1(\varphi, \psi)$ ,  $N_2(\varphi, \psi)$  и  $N_3(\varphi, \psi)$ , так что не менее естественно задавать эти желаемые координаты. Из этого положения мы выйдем, если вспомним, что координаты  $N_\varphi$  и  $N_\psi$  могут быть однозначно выражены через  $N_1, N_2, N_3$  из формулы (12) и тем самым векторы поля  $\vec{E}(\varphi, \psi, R)$  и  $\vec{H}(\varphi, \psi, R)$  можно выразить через  $N_i(\varphi, \psi)$ , ( $i=1, 2, 3$ ). Таким образом, с этого момента мы будем считать, что желаемая диаграмма направленности задается тремя желаемыми координатами  $N_i(\varphi, \psi)$ , ( $i=1, 2, 3$ ).

## § 1. ДВЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АНТЕНН

Сама корректная постановка задачи синтеза встречалась и прежде. Например, в чем заключается метод интеграла Фурье, предложенный Вольманом И. И. [1]? Разберем его для случая линейной антенны (17). Требуется получить решение задачи синтеза, если известна желаемая диаграмма направленности

$$G(z), \quad |z| \leq 1.$$

Тогда поступают следующим образом. Строится функция  $F(z)$ ,  $-\infty < z < \infty$ ,

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} G(z), & |z| \leq 1 \\ 0, & |z| > 1. \end{cases} \quad (18)$$

Затем считается, что эта функция является желаемым преобразованием Фурье  $F[f]$  от решения  $f(x)$ ,  $x \in [-l, l]$

$$F[f] = \int_{-l}^l f(x) e^{ixz} dx, \quad -\infty < z < \infty \quad (19)$$

и в качестве решения задачи синтеза берется обратное преобразование Фурье от (18) для  $x \in [-l, l]$ , т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(z) e^{-ixz} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 G(z) e^{-ixz} dz, \quad |x| \leq l. \quad (20)$$

Заметим, что формула (20) дает решение следующей вариационной задачи:

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F[f] - \mathcal{F}(z)|^2 dz \right\}, \quad (21)$$

или, в другой записи,

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \int_{-1}^1 |g[f] - G(z)|^2 dz + \int_{|z|>1} |F[f]|^2 dz \right\}. \quad (22)$$

Отметим без доказательства, что задача (22) представляет корректную постановку задачи синтеза линейной антенны. Причем первое слагаемое в (22) это условие на диаграмму направленности, а второе это ограничение на решение, т. е. на ток. Таким образом, мы видим, что метод интеграла Фурье, предложенный Вольманом И. И., опирается на корректную постановку задачи синтеза антенн (22). Причем в ней учитывается как требование к полю, так и требование к току.

Правда, этот метод не удовлетворяет самому важному условию. С его помощью нельзя получать решения с большинством требуемых диаграмм направленности.

Другой метод решения задач синтеза антенн, также приводящийся к форме типа (22), можно получить исходя из метода регуляризации А. Н. Тихонова для решения интегральных уравнений первого рода [3]. Следуя Тихонову А. Н. [2, 3], напишем вариационную задачу

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \int_{-1}^1 |g[f] - G(z)|^2 dz + \alpha \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx \right\}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (23)$$

Решение этой задачи  $f_\alpha(x)$  зависит от параметра  $\alpha$  и обладает следующим свойством. С уменьшением  $\alpha$  диаграмма направленности  $g[f_\alpha]$  сколь угодно близко приближается к любой данной кусочно-непрерывной функции  $G(z)$ ,  $|z| \leq 1$ .

Таким образом второй метод решения задачи синтеза опирается тоже на корректную постановку, в которой учитывается требование к полю (первое слагаемое в (23)) и ограничение на ток (второе слагаемое в (23)). Параметр  $\alpha$  влияет на соотношение между этими двумя требованиями.

Как видно, этот метод более общий, чем первый, так как он удовлетворяет главному требованию — дает возможность получать диаграммы, близкие к желаемой. Но второй метод в свою очередь также имеет существенные недостатки. Ввиду того что этот метод в настоящее время широко распространяется, мы остановимся на его достоинствах и недостатках.

Рассмотрим пример решения задачи синтеза линейной антенны вторым методом. Пусть желаемая диаграмма  $G(z)$ ,  $|z| \leq 1$  задана выражением

$$G(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| \leq 0,1, \\ 0 & \text{при } 0,1 < |z| \leq 1 \end{cases} \quad (24)$$

и пусть  $l = \pi$ .

Тогда решение задачи синтеза ищется из уравнения Эйлера для (23):

$$\alpha f(x) + \int_{-\pi}^{\pi} S(x, y) f(y) dy = s(x), \quad (25)$$

$$\text{где } S(x, y) = 2 \frac{\sin(x-y)}{(x-y)}, \quad s(x) = 2 \frac{\sin(0,1x)}{x}.$$

Решение уравнения (25) будет зависеть от параметра  $\alpha$ , т. е.  $f(x) = f_\alpha(x)$ ,  $|x| \leq \pi$ . На рис. 2 приведены графики решения  $f_\alpha(x)$ , а также модуля диаграммы направленности  $|g[f_\alpha]|$  для  $\alpha_1 = 10^{-2}$  и  $\alpha_2 = 10^{-6}$ . Из рисунка хорошо видно, что с уменьшением  $\alpha$  диаграмма направленности  $g[f_\alpha]$  приближается к заданной  $G(z)$ , (24). Причем, уменьшая  $\alpha$ , можно добиться любой близости  $g[f_\alpha]$  к  $G(z)$ , (24). В этом и заключается главное достоинство метода, основанного на постановке (23). Так как параметр  $\alpha$  регулирует соотношение между требованием к полю и к току, то с уменьшением  $\alpha$  ослабевает ограничение на ток, что приводит к увеличению полной мощности потерь

$$W = C \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (26)$$

Избежать этого явления нельзя ни при каком методе, так как мы можем получать требуемые диаграммы направленности только за счет известного увеличения полной мощности потерь.

Но в нашем случае такое увеличение связано с побочными эффектами, например отметим появление резкого выброса значений на границе антенны, рис. 2.

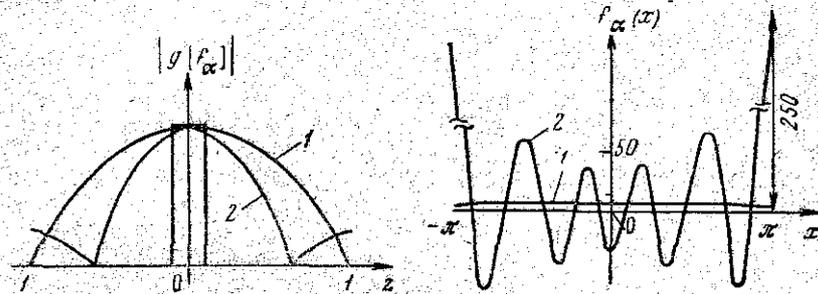


Рис. 2

Этих эффектов можно избежать, сделав другую постановку задачи синтеза, т. е. в другом методе решения задач синтеза. В дальнейшем мы предложим метод решения, в котором ограничение на ток имеет такую форму, которая позволит учитывать всевозможные требования к решению.

Перепишем задачу (23), используя равенство Парсевяля:

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f]|^2 dz. \quad (27)$$

Тогда вариационная задача будет иметь вид

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \int_{-1}^1 |g[f] - G(z)|^2 dz + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F[f]|^2 dz \right\}, \quad (28)$$

в котором форма ограничения напоминает форму в постановке Вольмана И. И. (22). В обоих случаях ограничение накладывается на спектральную функцию  $F[f]$  плотности тока  $f(x)$ . Мы говорим, что второй метод решения задачи синтеза, опирающийся на постановку (23) или (28), несмотря на удовлетворение главного требования к диаграмме направленности, имеет недостаток. Этот недостаток вызван тем, что параметр  $\alpha$  ослабляет ограничение на спектральную функцию  $F[f]$  сразу по всем гармоникам  $-\infty < z < \infty$  и тем самым по высоким гармоникам  $|z| \gg 1$ , которые на форму диаграммы  $g[f]$  почти не сказываются ввиду того, что оператор  $g$  интегральный.

Правда, непосредственно выброса значений  $f(x)$  на границе области можно избежать в рамках метода Тихонова А. Н., например используя в ограничении производную от плотности тока. Но тогда появится выброс значения производной. Проиллюстрируем сказанное. Постановка задачи синтеза будет следующей:

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \int_{-1}^1 |g[f] - G(z)|^2 dz + \alpha \int_{-1}^1 (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) dx \right\}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (29)$$

Это тоже корректная постановка и решение  $f_\alpha(x)$  обладает главным свойством, а именно тем, что диаграмма направленности  $g[f_\alpha]$  при уменьшении  $\alpha$  сколь угодно близко приближается к  $G(z)$ . Теперь рассмотрим пример решения задачи синтеза линейной антенны в постановке (29). Пусть  $G(z)$ ,  $|z| \leq 1$  задана в виде

$$G(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| \leq 0,1, \\ \frac{z-1}{0,1-1} & \text{при } 0,1 < |z| \leq 0,3, \\ 0 & \text{при } 0,3 < |z| \leq 1 \end{cases} \quad (30)$$

и  $l = \pi$ . Тогда решение задачи (29) ищется из уравнения Эйлера (25). Только теперь ядро  $S(x, y)$  и правая часть  $s(x)$  представляют свертки

$$S(x, y) = -\alpha \Gamma(x, y) - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(x, t) \frac{\sin(y-t)}{(y-t)} dt,$$

$$s(x) = - \int_{-1}^1 G(z) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(x, t) e^{-ixz} dt \right] dz, \quad (31)$$

где  $\Gamma(x, t) = \frac{1}{2\pi} (xt + \pi|x-t| - \pi^2)$  — функция Грина оператора  $\frac{d^2}{dx^2}$  с нулевыми граничными значениями. Решение задачи синтеза в этом случае будет зависеть от  $\alpha$ . На рис. 3 приведены графики решения  $f_\alpha(x)$  и модуля  $|g[f_\alpha]|$  для  $\alpha_3 = 1$  и  $\alpha_4 = 10^{-6}$ . На рисунках видно, что с уменьшением  $\alpha$   $g[f_\alpha]$  приближается к заданной  $G(z)$  (см. (30)), причем  $f_\alpha(x)$  на границе принимает нулевые значения.

Недостатком в этом случае является, во-первых, существенное усложнение ядра  $S(x, y)$  и  $s(x)$ , что приводит к известным трудностям при численной реализации и к резкому увеличению времени счета на ЭВМ. Во-вторых, хотя мы и избежали выброса  $f(x)$  на границе области, у нас теперь появился выброс значения производной  $f'_\alpha(x)$  на границе, что не на много лучше.

## § 2. О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АНТЕНН

Выпишем наиболее общие условия, которые мы будем предъявлять к методу решения задач синтеза: Во-первых, нужно, чтобы он был основан на корректной постановке задачи синтеза антенн.

Во-вторых, потребуем, чтобы этим методом можно было получать решения с достаточно широким классом диаграмм направленности. Скажем, чтобы можно было получать решения  $f(x)$ ,

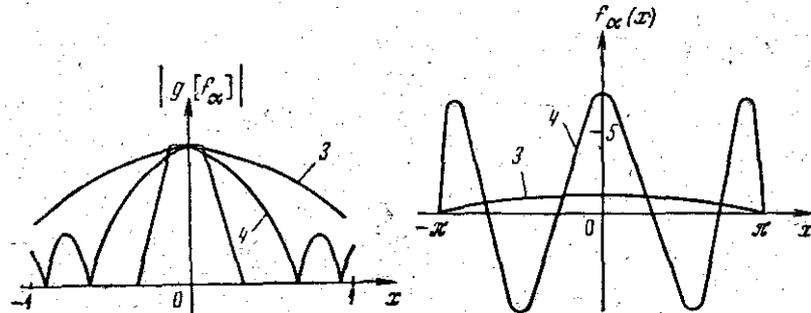


Рис. 3

$x \in \sigma$  с диаграммой направленности  $g[f]$ ,  $z \in \Omega$ , (см. (15)) сколь угодно близкой к любой заданной непрерывной функции  $G(z)$ ,  $z \in \Omega$  в метрике пространства  $C(\Omega)$ .

В-третьих, необходима достаточно гибкая система ограничений на ток  $f(x)$ ,  $x \in \sigma$ , позволяющая получать решения с требуемыми свойствами путем изменения этих ограничений.

В-четвертых, численная реализация метода должна быть как можно более простой.

Рассмотренные нами раньше методы решения задач синтеза, как правило, не удовлетворяли каким-либо из этих четырех требований. Так, метод интеграла Фурье не удовлетворял второму, а также третьему требованию. Метод, основанный на постановке (23), удовлетворяет второму требованию, но, как мы показали, не удовлетворяет третьему требованию. Метод, основанный на постановке (29), не удовлетворяет третьему и четвертому требованию.

Приведем пример метода, удовлетворяющего всем требованиям. Для простоты мы рассмотрим здесь только случай линейной антенны. Сначала требуется дать корректную постановку задачи синтеза.

Новая постановка получается естественным обобщением постановок (22) и (28). А именно она имеет вид

$$\inf_{f \in L_2} \left\{ \int_{-1}^1 |g[f] - G(z)|^2 dz + \int_{-\infty}^{\infty} |F[f]|^2 P(z) dz \right\}. \quad (32)$$

Задача (32) представляет корректную постановку задачи синтеза линейной антенны. Здесь ограничение тоже накладывается на спектральную функцию тока только с помощью весового множителя  $P(z)$ ,  $|z| < \infty$ . Как видно, если

$$P(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |z| > 1, \end{cases} \quad (33)$$

то постановка (32) совпадает с (22), а если  $P(z) = \frac{\alpha}{2\pi}$ , то совпадет с (28).

Покажем возможности новой постановки на примере решения задачи синтеза линейной антенны. Пусть  $G(z)$ ,  $|z| \leq 1$  задана прежним выражением (26). Положим

$$P(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| \leq 1, \\ \theta \geq 0 & \text{при } 1 < |z| \leq \rho, \\ \alpha > 0 & \text{при } |z| > \rho. \end{cases} \quad (34)$$

Этим самым мы разбили прямую на части, т. е. выделили области высоких гармоник  $|z| > \rho$  и средних гармоник  $1 < |z| \leq \rho$ . Решение задачи синтеза ищется из уравнения (25). Только теперь

$$S(x, y) = \frac{2\rho}{\pi} (\theta - \alpha) \frac{\sin \rho(x-y)}{\rho(x-y)} + \frac{2}{\pi} (1 - \theta) \frac{\sin(x-y)}{(x-y)},$$

$$s(x) = 2 \frac{\sin(0,1x)}{x}.$$

Видно, что решение будет зависеть от параметров  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ . Мы проиллюстрируем влияние только параметра  $\theta$ , т. е.  $f(x) = f_\theta(x)$ . Пусть  $\rho = 5$  и  $\alpha = 1$ . На рис. 4 приведены графики  $|g[f_\theta]|$  и решения  $f_\theta(x)$  для  $\theta_5 = 1$  и  $\theta_6 = 10^{-4}$ . Как видно при  $\theta_6 = 10^{-4}$  на рис. 4 мы добились от диаграммы почти той же близости, что и

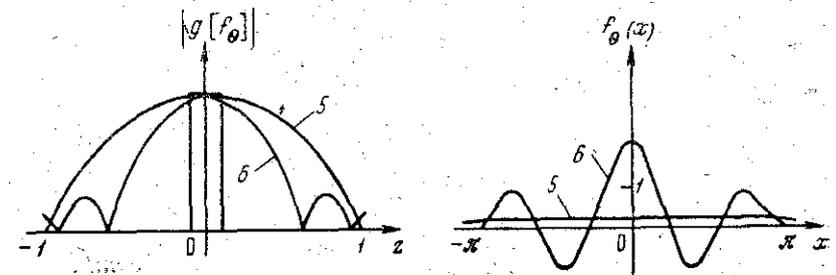


Рис. 4

при  $\alpha_2 = 10^{-6}$  на рис. 2. Но в этом случае решение существенно другое. Этого мы добились тем, что с помощью параметра  $\alpha$  существенно ограничили спектральную функцию решения в обла-

сти высоких гармоник  $|z| > \rho$ . Нужной формы от диаграммы направленности мы добились, работая в области средних ( $1 < |z| \leq \rho$ ) гармоник, т. е. с помощью параметра  $\theta$ .

Мы привели пример метода для одномерного случая. В трехмерном и двумерном случае, а также в случае криволинейных и поверхностных антенн удобно формулировать общий метод в терминах функциональных пространств. Мы не будем приводить здесь этот метод в общем случае. Только в заключение скажем, что в нем существенно используется зависимость решения от выбора пространств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольман И. И. «Электросвязь», 1941, № 4.
2. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
3. Тихонов А. Н. О некорректно поставленных задачах. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. VIII. Изд-во МГУ, 1967.

А. В. ЧЕЧКИН

## МЕТОД ЗАДАНЫХ ДИАГРАММ

Рассматривается задача синтеза антенн в самой общей постановке. Затем исследуются различные свойства решений. Информация о поле задается в форме желаемой диаграммы направленности.

#### ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] доказывается, что задача синтеза антенны в случае, когда ищется распределение тока  $\vec{j}(m)$  в области  $V$  по желаемой диаграмме направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  распадается на скалярные задачи отыскания координат  $j_i(m)$  по соответствующим желаемым координатам  $N_i(\varphi, \psi)$ . В связи с этим мы будем рассматривать и решать задачу синтеза для случая, когда имеется скалярное соотношение

$$\int_{\sigma} f(x) e^{ixz} d\sigma = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega. \quad (1)$$

Для простоты будем называть функцию  $f(x)$ ,  $x \in \sigma$  плотностью тока, а функцию  $\mathcal{F}(z)$ ,  $z \in \Omega$  диаграммой направленности [1].

В связи с тем что размерности областей  $\sigma$  и  $\Omega$  могут быть различными, в зависимости от области  $V$ , а также в связи с тем, что вид ядра под интегралом в (1) зависит от выбора системы координат в области  $\sigma$ , мы будем считать, что имеется соотношение вида

$$g[f] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь мы для общности предположим, что размерность области  $\sigma$  равна  $n \geq 1$ , размерность  $\Omega$  равна  $m \geq 1$  и что ядро  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ . Так, например, если антенна трехмерная, то размерность  $\sigma$  равна  $n = 3$ , а размерность  $\Omega$  равна  $m = 2$ , так как  $\Omega$  сфера в  $R^3$ . Если же антенна линейная, то  $n = 1$  и  $m = 1$ .

сти высоких гармоник  $|z| > \rho$ . Нужной формы от диаграммы направленности мы добились, работая в области средних ( $1 < |z| \leq \rho$ ) гармоник, т. е. с помощью параметра  $\theta$ .

Мы привели пример метода для одномерного случая. В трехмерном и двухмерном случае, а также в случае криволинейных и поверхностных антенн удобно формулировать общий метод в терминах функциональных пространств. Мы не будем приводить здесь этот метод в общем случае. Только в заключение скажем, что в нем существенно используется зависимость решения от выбора пространств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вольман И. И. «Электросвязь», 1941, № 4.
2. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. XIII. Изд-во МГУ, 1969.
3. Тихонов А. Н. О некорректно поставленных задачах. В сб.: «Вычисл. методы и программирование», вып. VIII. Изд-во МГУ, 1967.

А. В. ЧЕЧКИН

## МЕТОД ЗАДАНЫХ ДИАГРАММ

Рассматривается задача синтеза антенн в самой общей постановке. Затем исследуются различные свойства решений. Информация о поле задается в форме желаемой диаграммы направленности.

#### ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] доказывается, что задача синтеза антенны в случае, когда ищется распределение тока  $\vec{j}(m)$  в области  $V$  по желаемой диаграмме направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  распадается на скалярные задачи отыскания координат  $j_i(m)$  по соответствующим желаемым координатам  $N_i(\varphi, \psi)$ . В связи с этим мы будем рассматривать и решать задачу синтеза для случая, когда имеется скалярное соотношение

$$\int_{\sigma} f(x) e^{ixz} d\sigma = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega. \quad (1)$$

Для простоты будем называть функцию  $f(x)$ ,  $x \in \sigma$  плотностью тока, а функцию  $\mathcal{F}(z)$ ,  $z \in \Omega$  диаграммой направленности [1].

В связи с тем что размерности областей  $\sigma$  и  $\Omega$  могут быть различными, в зависимости от области  $V$ , а также в связи с тем, что вид ядра под интегралом в (1) зависит от выбора системы координат в области  $\sigma$ , мы будем считать, что имеется соотношение вида

$$g[f] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь мы для общности предположим, что размерность области  $\sigma$  равна  $n \geq 1$ , размерность  $\Omega$  равна  $m \geq 1$  и что ядро  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ . Так, например, если антенна трехмерная, то размерность  $\sigma$  равна  $n = 3$ , а размерность  $\Omega$  равна  $m = 2$ , так как  $\Omega$  сфера в  $R^3$ . Если же антенна линейная, то  $n = 1$  и  $m = 1$ .

## § 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АНТЕНН

Пусть  $f(x) \in X(\sigma)$ , где  $X(\sigma)$  — гильбертово пространство. Далее пусть  $g[f] \in Z(\Omega)$ , где  $Z(\Omega)$  — гильбертово пространство, причем

$$\|g[f]\|_Z \leq C \|f\|_X, \quad C = \text{const}. \quad (3)$$

Наконец, рассмотрим еще одно гильбертово пространство  $H$ , функций  $h(\lambda)$ ,  $\lambda \in R^n$ , такое, чтобы преобразование Фурье  $F[f]$ ,  $f(x) \in X(\sigma)$  принадлежало  $H$  и выполнялись неравенства

$$A \|f\|_X \leq \|F[f]\|_H \leq B \|f\|_X, \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const}, \quad (4)$$

здесь

$$F[f] = \int_{\sigma} f(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \in R^n. \quad (5)$$

Таким образом, для новой постановки требуется задать тройку гильбертовых пространств  $X(\sigma)$ ,  $Z(\Omega)$  и  $H$ . Пространство  $X(\sigma)$  — пространство плотности тока,  $Z(\Omega)$  — пространство диаграмм направленности и пространство  $H$ , которое мы будем называть пространством характеристик.

**Постановка задачи.** Решением задачи синтеза антенны будем называть решение следующей вариационной задачи:

$$\inf_{f \in X} \{ \|g[f] - G(z)\|_Z^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_H^2 \}. \quad (6)$$

Здесь  $G(z) \in Z(\Omega)$  — заданная диаграмма направленности, а  $h(\lambda)$  — заданная характеристика, т. е. желаемое преобразование Фурье от решения. Таким образом, новая постановка задачи синтеза антенны учитывает требование к полю, первое слагаемое и требование к току, второе слагаемое в (6).

**Теорема 1.** Вариационная задача (6) является корректно поставленной задачей, т. е. для любой  $G(z) \in Z(\Omega)$  и любой  $h(\lambda) \in H$  существует единственная функция  $f(x) \in X(\sigma)$ , реализующая минимум (6) и непрерывно зависящая от  $G(z)$  и  $h(\lambda)$ .

Мы сейчас определим пространства  $X(\sigma)$ ,  $Z(\Omega)$  и  $H$ , в которых можно решать практически любую задачу синтеза.

В качестве пространства плотностей тока будем брать  $X(\sigma) = L_2(\sigma)$  с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2}^2 = \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx. \quad (7)$$

Это вполне естественно, если учесть, что величина  $W = C \|f\|_{L_2}^2$  является полной мощностью потерь антенны.

Пространством диаграмм направленности будем брать  $Z(\Omega) = W_2^{(l)}(\Omega)$  с нормой [2]

$$\|G\|_Z^2 = \int_{\Omega} \{ |G(z)|^2 P(z) + Q(z) \sum_{k=1}^l |D^k G(z)|^2 \} dz, \quad (8)$$

где  $l \geq 0$  — натуральный параметр,  $P(z) \geq 0$ ,  $Q(z) \geq 0$ ,  $z \in \Omega$  — кусочно-непрерывные функции и

$$D^k G(z) = \frac{\partial^k G(z)}{\partial^{k_1} z_1 \dots \partial^{k_n} z_n}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = k.$$

С помощью весовых функций  $P(z)$  и  $Q(z)$  можно учитывать всевозможные требования к главному лепестку диаграммы и к боковым лепесткам.

К пространству  $Z(\Omega)$  должны принадлежать функции  $g[f]$ ,  $f(x) \in X(\sigma)$ . Поэтому мы должны для того, чтобы  $g[f] \in W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $f(x) \in L_2(\sigma)$  потребовать от ядра  $\mathcal{G}(z, x)$  соответствующей дифференцируемости по  $z \in \Omega$ , например  $\mathcal{G}(z, x_0) \in C^{(l)}(\Omega)$ .

Наконец в качестве пространства характеристик будем брать  $H = H_{\alpha\rho}$  с нормой

$$\|h\|_{H_{\alpha\rho}}^2 = \int_{R^n} |h(\lambda)|^2 R(\lambda) d\lambda, \quad (9)$$

где

$$R(\lambda) = \begin{cases} r(\lambda), & \lambda \in \rho \subset R^n \\ \alpha, & \lambda \in R^n - \rho, \quad \alpha = \text{const} > 0. \end{cases}$$

здесь  $r(\lambda)$ ,  $\lambda \in \rho$  кусочно-непрерывная функция. Так как с помощью пространства характеристик мы накладываем ограничения на спектральную функцию  $F[f]$  плотности тока  $f(x)$ , то задание весовой функции  $R(\lambda)$  в (9) вполне оправдано. В самом деле, с помощью  $r(\lambda)$ ,  $\lambda \in \rho$  мы ограничиваем спектральную функцию в областях так называемых низких и средних гармоник, а параметром  $\alpha$  в области высоких гармоник. Такое разграничение  $R^n$  на область  $\rho$  (низких, средних гармоник) и область высоких гармоник  $R^n - \rho$  оказывается очень эффективным. Обозначая такое пространство характеристик  $H_{\alpha\rho}$ , мы тем самым подчеркиваем, что выбор параметра  $\alpha$  и области  $\rho$  должен существенно сказаться на поведении спектральной функции  $F[f]$ , а следовательно и на поведении  $f(x)$ .

Для полноты изложения нам надо еще убедиться в выполнении требований (3) и (4).

**Теорема 2.** Для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$  и любых  $W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $H_{\alpha\rho}$  имеют место следующие неравенства:

$$\|g[f]\|_Z \leq C \|f\|_{L_2}, \quad C = \text{const} > 0.$$

$$A \|f\|_{L_2} \leq \|F[f]\|_{H_{\alpha\rho}} \leq B \|f\|_{L_2}, \quad A = \text{const} > 0, \quad B = \text{const} > 0. \quad (10)$$

## § 2. СВОЙСТВА РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АНТЕННЫ

Рассмотрим задачу (6) в пространствах  $X(\sigma) = L_2(\sigma)$  (это пространство не будет изменяться),  $Z(\Omega) = W_2^{(l)}(\Omega)$  (это пространство будет изменяться в зависимости от  $l$ ),  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $z \in \Omega$  и, наконец,  $H = H_{\alpha\rho}$  — это пространство будет зависеть от параметра  $\alpha$ , области  $\rho \subset R^n$  и функции  $r(\lambda)$ ,  $\lambda \in \rho$ .

$$\inf_{f \in L_2} \{ \|g[f] - G(z)\|_l^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_{\alpha\rho}^2 \}. \quad (11)$$

По теореме 1 такая вариационная задача имеет единственное решение, обозначим его  $f_{\alpha\rho}(x)$ ,  $x \in \sigma$ . Имеет место следующая

Теорема 3. Для любых пространств  $W_2^{(l)}(\Omega)$  и  $H_{\alpha\rho}$  при

$$r(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \rho \quad (12)$$

и для любых  $G(z) \in W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $h(\lambda) \in H_{\alpha\rho}$  имеет место

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|g[f_{\alpha\rho}] - G(z)\|_l = 0. \quad (13)$$

Как видно, решение задачи синтеза в постановке (11) удовлетворяет главному требованию. Это требование того, чтобы диаграмма направленности могла быть сделана, если потребуется, сколь угодно близко к заданной  $G(z)$ . Для удовлетворения этого требования надо решать задачу синтеза в пространствах  $L_2(\sigma)$ ,  $W_2^{(l)}(\Omega)$  и  $H_{\alpha\rho}$  с соответственно малым параметром  $\alpha$ .

Условие (12) в теореме 3 появилось из-за того, что в постановке (6) или (11) накладываются, в каком-то смысле, противоположные требования на  $f(x) \in L_2(\sigma)$ . С одной стороны, это близость  $g[f]$  к  $G(z)$  в  $W_2^{(l)}(\Omega)$ , а с другой, — близость  $F[f]$  к  $h(\lambda)$  в соответствующей области  $\rho$ .

По смыслу введения области  $\rho \subset R^n$  естественно считать, что она содержит шар ненулевого радиуса. Обозначим радиус максимально большого вписанного шара тоже через  $\rho$ ,  $\rho = \text{const} > 0$ . Наряду с теоремой 3 имеет место

Теорема 4. Для любых пространств  $W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $H_{\alpha\rho}$  при

$$r(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \rho \quad (14)$$

и для любых  $G(z) \in W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $h(\lambda) \in H_{\alpha\rho}$  имеет место

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \|g[f_{\alpha\rho}] - G(z)\|_l = 0. \quad (15)$$

В этой теореме утверждается, что, как бы сильно мы не зажимали спектральную функцию  $F[f]$  в области высоких гармоник  $R^n - \rho$ , все равно можно так выбрать эту область, что главное требование к диаграмме направленности  $g[f_{\alpha\rho}]$  будет выполняться.

Теоремы 3 и 4 дают нам два различных пути удовлетворения главного требования к диаграмме направленности. С помощью параметра  $\alpha$  мы ослабляем ограничение на спектральную функцию  $F[f]$  в области высоких гармоник  $R^n - \rho$ , а с помощью параметра  $\rho$  мы расширяем область  $\rho$ , низких и средних гармоник, за счет области высоких гармоник. Постановка (11) выбрана таким образом, что численное решение задачи синтеза не вызывает каких-либо трудностей. Справедлива

Теорема 5. Решение  $f_{\alpha\rho}$  задачи (11) удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\alpha(2\pi)^n f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x), \quad (16)$$

где

$$S(x, y) = \int_{\Omega} [P(z) \mathcal{G}(z, y) \overline{\mathcal{G}(z, x)} + Q(z) \sum_{k=1}^n D^k \mathcal{G}(z, y) \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)}] dz + \int_{\rho} [r(\lambda) - \alpha] e^{i\lambda(y-x)} d\lambda. \quad (17)$$

$$s(x) = \int_{\Omega} [P(z) G(z) \overline{\mathcal{G}(z, x)} + Q(z) \sum_{k=1}^n D^k G(z) \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)}] dz + \int_{R^n - \rho} r(\lambda) e^{-i\lambda x} h(\lambda) d\lambda + \alpha \int_{R^2 - \rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (18)$$

Ядро  $S(x, y)$  является эрмитовым, т. е.  $S(x, y) = \overline{S(y, x)}$ . Причем для любых пространств  $W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $H_{\alpha\rho}$  и для любых  $G(z)$ ,  $h(\lambda)$  уравнение (16) имеет одно и только одно решение в пространстве  $L_2(\sigma)$ .

Таким образом, для решения задачи синтеза надо численно решить интегральное уравнение Фредгольма второго рода с эрмитовым ядром. Эта задача достаточно простая. Вычисление ядра  $S(x, y)$  (17) и правой части  $s(x)$  (18) можно к тому же еще более упростить, если брать функции  $P(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $r(\lambda)$  кусочно-постоянными, а желаемую характеристику, например, в виде

$$h(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \in \rho, \\ F[f_0] & \text{при } \lambda \in R^n - \rho, \end{cases} \quad (19)$$

где  $f_0(x) \in L_2(\sigma)$ . Что в большинстве случаев можно делать.

Для решения задач синтеза в постановке (6) мы предложили пространства  $L_2(\sigma)$ ,  $W_2^{(l)}(\Omega)$  и  $H_{\alpha\rho}$ . Благодаря известной простоте этих пространств мы получили простую численную реализацию решения задач синтеза. Но возникает естественный вопрос. Как быть, если от решения  $f(x)$ ,  $x \in \sigma$  задачи синтеза требуется определенная гладкость? Например, чтобы  $f(x)$ ,  $x \in \sigma$  была непрерывной, т. е.  $f(x) \in C(\sigma)$ . Оказывается гладкость решения за-

дачи (11) целиком зависит от убывания характеристики  $h(\lambda)$ ,  $\lambda \in R^n$  на бесконечности.

**Теорема 6.** Пусть  $W_2^{(l)}(\Omega)$ ,  $H_{ap}$  — любые пространства удовлетворяющие (8), (9) далее  $\mathcal{G}(z, x)$ ,  $D^k \mathcal{G}(z, x)$ ,  $k=l$ , пусть будут  $p$  раз непрерывно дифференцируемые по  $x \in \sigma$ ,  $p \geq 0$ , натуральный параметр.

Пусть  $h(\lambda)$  такова, что функция  $h(\lambda) \sum_{k=p}^l \lambda^k \in L_1(R^n)$ , т. е. модуль

$|h(\lambda) \sum_{k=p}^l \lambda^k|$  интегрируем по всему  $R^n$ , тогда решение  $f_{ap}$  задачи (11) имеет непрерывные частные производные до  $p$  включительно, т. е.

$$f_{ap}(x) \in C^{(p)}(\sigma). \quad (20)$$

Следовательно, если  $|h(\lambda)|$  интегрируем по  $R^n$ , то  $f_{ap}(x) \in C(\sigma)$ , а если  $h(\lambda) = 0$ ,  $\lambda \in R^n$ , то решение  $f_{ap}(x)$ ,  $x \in \sigma$  будет бесконечно дифференцируемой функцией, при  $\mathcal{G}(z, x)$  и  $D^k \mathcal{G}(z, x)$  бесконечно дифференцируемых по  $x \in \sigma$ .

### § 3. МЕТОД ЗАДАННЫХ ДИАГРАММ

Предположим, что мы решили задачу синтеза в некоторой тройке пространств и получили решение  $f_1(x)$ ,  $x \in \sigma$ , затем решили такую задачу в другой тройке пространств и получили решение  $f_2(x)$ ,  $x \in \sigma$ . Следующая теорема говорит о связи между диаграммами направленности  $g[f_1]$ ,  $g[f_2]$  и спектральными функциями  $F[f_1]$ ,  $F[f_2]$ .

**Теорема 7.** Пусть  $f_1(x) \in L_2(\sigma)$ ,  $f_2(x) \in L_2(\sigma)$  — решения двух задач синтеза в постановке (6) в соответствующих пространствах  $X_1(\sigma)$ ,  $Z_1(\Omega)$ ,  $H_1$ ,  $X_2(\sigma)$ ,  $Z_2(\Omega)$ ,  $H_2$ . Далее, пусть  $g[f_1] \in W_2^{(l)}(\Omega)$  и  $g[f_2] \in W_2^{(l)}(\Omega)$  для некоторого  $W_2^{(l)}(\Omega)$  (8). Тогда, если  $g[f_1] \neq g[f_2]$  в  $W_2^{(l)}(\Omega)$ , то

$$F[f_1] \neq F[f_2] \quad (21)$$

в любом пространстве  $H_{ap}$  (см. (8), (9)).

Короче говоря, всякое изменение диаграммы направленности связано с одновременным изменением соответствующей спектральной функции в области высоких гармоник, а также средних и низких гармоник. Допустим, решая задачу синтеза, у нас не удовлетворяется требование к диаграмме направленности  $g[f]$  и мы хотим получить требуемую диаграмму направленности.

Тогда надо, изменяя пространства, т. е. соответствующие параметры и функции, добиваться получения нужной диаграммы. При этом будет обязательно изменяться спектральная функция  $F[f]$  по всему  $R^n$ . Мы можем, например, ослабить ограничения на  $F[f]$  в области средних и низких гармоник и усилить в области высоких гармоник. Это позволяет получать решения с всевозмож-

ными свойствами. Показательный пример решения задачи синтеза с использованием активного влияния параметров на поведение спектральной функции рассмотрен в [1]. Множество других примеров приведены в [3].

Таким образом, решение задачи синтеза антенны в постановке (6) существенно зависит от выбора тройки гильбертовых пространств  $X(\sigma)$ ,  $Z(\Omega)$  и  $H$ . Метод активного поиска требуемого решения, основанный на использовании зависимости решения от выбора этих пространств, назван методом заданных диаграмм. В работе [3] этот метод назван методом функциональных пространств.

Образно говоря, метод заданных диаграмм является методом конструирования нужного решения. Он опирается на известные влияния тех или иных параметров и функций на решение. Совершенно ясно, что в таком методе необходимо использовать обратную связь от получаемого решения. Другими словами, на каждом этапе после получения решения надо вычислить или величину невязки, т. е. величину отклонения диаграммы направленности от заданных или к.п.д., или к.н.д., и т. п. Это зависит от поставленных требований к решению. Затем, в случае невыполнения какого-либо требования надо решать снова задачу уже в других пространствах, т. е. изменив в нужном направлении соответствующие параметры и функции.

Такой процесс напоминает метод последовательных приближений, но не имеет с ним никакой более глубокой связи.

Решая задачу синтеза, мы не приближаемся к единственному решению этой задачи, такого решения нет, а только пытаемся подобрать решение с требуемыми свойствами. Иногда этого сделать не удастся, если требования к решению противоречивы. Например, если бы мы захотели получить решение задачи синтеза антенны с узким главным лепестком, с низким уровнем боковых лепестков, с одной стороны, и с другой стороны, достаточно большим к.п.д., то мы имели бы противоречивые требования. В связи с этим возникают две задачи при использовании метода заданных диаграмм. Первая — определение оптимальных требований к решению. Вторая — автоматизация поиска оптимального решения.

### § 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Докажем теорему 1. Сначала перепишем задачу (6) в более простой форме. Для этого рассмотрим прямую сумму гильбертовых пространств

$$Z(\Omega) \oplus H = R. \quad (22)$$

Элементами этого пространства будут упорядоченные пары функций вида

$$q = (G(z), h(\lambda)), \quad G(z) \in Z(\Omega), \quad h(\lambda) \in H$$

с нормой

$$\|q\|_R^2 = \|G\|_Z^2 + \|h\|_H^2. \quad (23)$$

Определим линейный оператор  $k[f]$  в гильбертовом пространстве  $X(\sigma)$  со значениями в  $R$  формулой

$$k[f] = \{g[f], F[f]\}. \quad (24)$$

Тогда задача (6) переписывается в виде

$$\inf_{f \in X} \{\|k[f] - q\|_R\}. \quad (25)$$

Теперь нам требуется показать, что задача (25) корректно поставленная.

Докажем, что область значений оператора  $k[f]$ ,  $f(x) \in X(\sigma)$  является подпространством  $R$ , обозначим его  $Q$ . В самом деле, в силу линейности оператора  $k[f]$  и пространства  $X(\sigma)$  множество  $Q = \{k[f] : f(x) \in X(\sigma)\}$  будет линейным пространством. Надо еще показать полноту  $Q$  в метрике  $R$ . Пусть  $k[f_n]$  — фундаментальная последовательность в метрике  $R$ . Тогда в виду (23) и (24) последовательность  $F[f_n]$  будет фундаментальной в  $H$ . В силу условия (4) последовательность  $f_n(x)$  будет фундаментальной в гильбертовом пространстве  $X(\sigma)$  и, следовательно, сходящейся к некоторой  $f_0(x) \in X(\sigma)$ .

Далее, опираясь на (23), (3) и (4), окончательно будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k[f_n] - k[f_0]\|_R = 0. \quad (26)$$

Этим полнота  $Q$  доказана. Таким образом  $Q$  — подпространство  $R$  и, следовательно, для любого вектора  $q \in R$  существует единственная проекция на  $Q$ , т. е.

$$\inf_{f \in X} \{\|k[f] - q\|_R\} = \|k[f_0] - q\|_R. \quad (27)$$

Этим доказано существование единственного решения задачи (6).

Теперь докажем непрерывную зависимость решения  $f_0(x) \in X(\sigma)$  от  $G(z) \in Z(\Omega)$  и  $h(\lambda) \in H$ , т. е. докажем неравенство

$$\|f_0\|_X^2 \leq C \|q\|_R^2 \leq C (\|G\|_Z^2 + \|h\|_H^2), \quad C = \text{const} > 0. \quad (28)$$

Имеем, в силу (4), (23) и (24),

$$\|f_0\|_X^2 \leq C (\|g[f_0]\|_Z^2 + \|F[f_0]\|_H^2), \quad C = \text{const} > 0. \quad (29)$$

Далее, так как  $k[f_0] = \{g[f_0], F[f_0]\}$  является проекцией вектора  $q = \{G(z); h(\lambda)\}$  на подпространство  $Q$ , то

$$\|k[f_0]\|_R \leq \|q\|_R. \quad (30)$$

Из (30) и (29) с учетом (23) следует (28). Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Применим неравенство Коши — Буняковского к (2), тогда для любых  $z \in \Omega$  и  $f(x) \in L_2(\sigma)$  будем иметь

$$|g[f]|^2 \leq \|f\|_{L_2}^2 \int_{\sigma} |\mathcal{G}(z, x)|^2 dx, \quad (31)$$

$$|D^k g[f]|^2 \leq \|f\|_{L_2}^2 \int_{\sigma} |D^k \mathcal{G}(z, x)|^2 dx.$$

Так как по определению оператора  $g[f]$ ,  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$  и так как  $g[f] \in W_2^{(k)}(\Omega)$ , т. е.  $\mathcal{G}(z, x) \in C^{(k)}(\Omega)$  по  $z \in \Omega$  то, учитывая (8), получим

$$\|g[f]\|_Z^2 \leq C^2 \|f\|_{L_2}^2, \quad C = \text{const} > 0. \quad (32)$$

Этим доказано первое неравенство (10). Докажем теперь второе неравенство. Для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$  в силу (9) имеем

$$\|F[f]\|_{\alpha\rho}^2 = \|F[f]\|_{L_2(\rho, r)}^2 + \alpha \|F[f]\|_{L_2(R^n - \rho)}^2, \quad (33)$$

$$\|F[f]\|_{L_2(\rho, r)}^2 = \int_{\rho} r(\lambda) F[f] \overline{F[f]} d\lambda \leq \|F[f]\|_{L_2(\rho)}^2 \sup_{\lambda \in \rho} \{r(\lambda)\}. \quad (34)$$

Воспользуемся равенством Парсеваля, справедливым для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$

$$\|F[f]\|_{L_2(R^n)}^2 = (2\pi)^n \|f\|_{L_2}^2. \quad (35)$$

Обозначим через

$$B^2 = (2\pi)^n \max_{\lambda \in \rho} \{\alpha; \sup_{\lambda \in \rho} r(\lambda)\}. \quad (36)$$

Тогда получим правую часть второго неравенства (10)

$$\|F[f]\|_{\alpha\rho}^2 \leq B^2 \|f\|_{L_2}^2, \quad B = \text{const} > 0. \quad (37)$$

Для доказательства левой части потребуется один дополнительный результат. Докажем его.

Лемма 1. Для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$  и любой области  $\rho \subset R^n$  имеет место неравенство

$$\|F[f]\|_{L_2(R^n - \rho)}^2 \geq \gamma^2 \|F[f]\|_{L_2(R^n)}^2, \quad (38)$$

где  $\gamma = \text{const} \neq 0$ .

Доказательство леммы 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве  $L_2(\sigma)$  квадратичную эрмитову форму

$$\|F[f]\|_{L_2(\rho)}^2 = \int_{\sigma} \int_{\sigma} \left[ \int_{\rho} e^{i\lambda(y-x)} d\lambda \right] f(y) \overline{f(x)} dy dx. \quad (39)$$

В силу того, что  $\rho \subset R^n$

$$\|F[f]\|_{L_2(\rho)}^2 \leq \|F[f]\|_{L_2(R^n)}^2 = (2\pi)^n \|f\|_{L_2}^2. \quad (40)$$

Эта квадратичная форма ограниченная и следовательно существует  $f_0(x) \in L_2(\sigma)$ ,  $\|f_0\|_{L_2} \neq 0$  такая, что

$$\sup_{f \in L_2} \left\{ \frac{\|F[f]\|_{L_2(\rho)}^2}{(2\pi)^n \|f\|_{L_2}^2} \right\} = \frac{\|F[f_0]\|_{L_2(\rho)}^2}{\|F[f_0]\|_{L_2(R^n)}^2} = \delta \leq 1. \quad (41)$$

Причем

$$\delta = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\sigma} \left| \int_{\rho} e^{i\lambda(y-x)} d\lambda \right|^2 dy dx. \quad (42)$$

Покажем, что всегда  $\delta < 1$ . В самом деле, если бы  $\delta = 1$  для какого-либо  $f_0(x) \neq 0$ , то существовала бы аналитическая функция  $F[f_0]$ , удовлетворяющая в силу (41) условию

$$\|F[f_0]\|_{L_2(R^n-\rho)}^2 = \|F[f_0]\|_{L_2(R^n)}^2 - \|F[f_0]\|_{L_2(\rho)}^2 = 0. \quad (43)$$

Это в свою очередь возможно только когда  $F[f_0] \equiv 0$ , т. е. когда  $f_0(x) = 0$  в  $L_2(\sigma)$ , что противоречит предположению  $f_0(x) \neq 0$ . Таким образом, в (41)  $\delta < 1$ . Окончательно получаем из (41) для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$  неравенство (38)

$$\|F[f]\|_{L_2(R^n-\rho)}^2 \geq (1-\delta) \|F[f]\|_{L_2(R^n)}^2, \quad (44)$$

где  $1-\delta = \nu^2 = \text{const} \neq 0$ . Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Левая часть второго неравенства (10) получается, если воспользоваться из (33) тем, что для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$

$$\|F[f]\|_{\alpha\rho}^2 \geq \alpha \|F[f]\|_{L_2(R^n-\rho)}^2, \quad \alpha > 0. \quad (45)$$

Затем, воспользуемся неравенством (38) из леммы 1 и равенством (35). Отметим, что

$$A^2 = (2\pi)^n \alpha (1-\delta), \quad A = \text{const} > 0, \quad (46)$$

где  $\delta$  определяется формулой (42). Теорема 2 доказана. Прежде чем доказывать теоремы 3 и 4, мы приведем необходимый для этого предварительный результат.

Лемма 2. Область значений оператора  $g[f]$ ,  $f(x) \in L_2(\sigma)$  из соотношения между плотностью тока и диаграммой направленности (2) всюду плотная в  $W_2^{(i)}(\Omega)$  для любого пространства  $W_2^{(i)}(\Omega)$ , если соответственно  $\mathcal{G}(z, x) \in C^{(i)}(\Omega)$ , т. е. для любой  $G(z) \in W^{(i)}(\Omega)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $f_\varepsilon(x) \in L_2(\sigma)$  такая, что

$$\|g[f_\varepsilon] - G(z)\|_L < \varepsilon. \quad (47)$$

Доказательство леммы 2. Нам будет удобнее вести доказательство в таких координатных системах, в которых соотношение (2) имеет вид (1). Далее, не зависимо от размерности области  $\sigma$ , т. е. области  $V$  антенны, мы всегда можем считать эту область с размерностью  $n = 3$ , добавив, если потребуется, недостающие измерения. Разумеется, считая добавленные изме-

рения много меньшими прежних и соответственно размазав плотность тока, на получившуюся трехмерную область.

Таким образом, достаточно доказать лемму 2 для оператора

$$g[f] = \int_{\sigma} f(x) e^{ixz} dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (48)$$

где  $f(x) \in L_2(\sigma)$ ,  $\mathcal{F}(z) \in W_2^{(i)}(\Omega)$ ,  $\Omega$  — ограниченная область, и область  $\sigma$  содержит некоторый куб  $|x_i| < \sigma = \text{const} > 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Из свойств пространства  $W_2^{(i)}(\Omega)$  следует, что для любой  $G(z) \in W_2^{(i)}(\Omega)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется многочлен  $M_m(z)$  степени  $m > 0$  такой, что [2]

$$\|M_m(z) - G(z)\|_L < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (49)$$

Далее известно, что функция

$$T_t(z) = M_m(z) \prod_{i=1}^n \frac{\sin \sigma z_i}{\sigma z_i \prod_{k=1}^t \left(1 - \frac{\sigma^2 z_k^2}{\pi^2 k^2}\right)}; \quad 2t > m \quad (50)$$

сколь угодно приближается к  $M_m(z)$  в  $W_2^{(i)}(\Omega)$  с ростом  $t$ , т. е. найдется  $t$ , такое, что

$$\|T_t(z) - M_m(z)\|_L < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (51)$$

Кроме этого функция  $T_t(z)$ , будучи продолженная в комплексное  $n$ -мерное пространство, является целой функцией конечной степени [4] и поэтому обратное преобразование Фурье

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} T_t(z) e^{-ixz} dz, \quad x \in R^n \quad (52)$$

будет равно нулю вне куба,  $|x_i| < \sigma$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Следовательно, для  $z \in \Omega$ ,  $g[f_\varepsilon] = F[f_\varepsilon]$ . Таким образом, мы нашли по  $G(z) \in W_2^{(i)}(\Omega)$  и  $\varepsilon > 0$  функцию  $f_\varepsilon(x) \in L_2(\sigma)$  такую, что

$$g[f_\varepsilon] = T_t(z) \text{ в } W_2^{(i)}(\Omega). \quad (53)$$

Воспользовавшись (49), (51) и (53), получим окончательно, что

$$\|g[f_\varepsilon] - G(z)\|_L = \|T_t(z) - C(z)\|_L < \varepsilon. \quad (54)$$

Лемма 2 доказана.

Теперь докажем теорему 3. Так как  $f_{\alpha\rho}(x) \in L_2(\sigma)$  есть решение задачи (11), то для любой  $f(x) \in L_2(\sigma)$  выполняется

$$\begin{aligned} \|g[f_{\alpha\rho}] - G(z)\|_L^2 &\leq \|g[f_{\alpha\rho}] - G(z)\|_L^2 + \|F[f_{\alpha\rho}] - h(\lambda)\|_{\alpha\rho}^2 \leq \\ &\leq \|g[f] - G(z)\|_L^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_{\alpha\rho}^2. \end{aligned} \quad (55)$$

В силу леммы 2 существует для любого  $\varepsilon > 0$   $f_\varepsilon(x) \in L_2(\sigma)$  такая, что

$$\|g[f_\varepsilon] - G(z)\|_l^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (56)$$

Рассмотрим

$$\alpha_0(\varepsilon, l, \rho) = \frac{\varepsilon^2}{2\|F[f_\varepsilon] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - \rho)}^2}. \quad (57)$$

Тогда для  $\alpha \leq \alpha_0(\varepsilon, l, \rho)$  с учетом (12), (55), (56) и (57) получим

$$\|g[f_{\alpha\rho}] - G(z)\|_l^2 \leq \|g[f_\varepsilon] - G(z)\|_l^2 + \alpha\|F[f_\varepsilon] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - \rho)}^2 < \varepsilon^2. \quad (58)$$

Что и требовалось показать. Теорема 3 доказана.

Докажем теорему 4. Пусть  $f_\varepsilon(x)$  выбрано с условием (56). Рассмотрим  $\rho_0(\varepsilon, l, \alpha)$ , определяемое из неравенства

$$\|F[f_\varepsilon] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - \rho_0)}^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\alpha}. \quad (59)$$

Такое  $\rho_0$  всегда найдется, что следует из определения интегрирования по бесконечному пространству  $R^n$ . Причем для  $\rho \geq \rho_0$  выполняется

$$\|F[f_\varepsilon] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - R)}^2 \leq \|F[f_\varepsilon] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - \rho_0)}^2. \quad (60)$$

Воспользовавшись (14), (55), (56), (59) и (60), окончательно получим для  $\rho \geq \rho_0(\varepsilon, l, \alpha)$

$$g[f_{\alpha\rho}] - G(z)\|_l^2 \leq \|g[f_\varepsilon] - G(z)\|_l^2 + \alpha\|F[f_\varepsilon] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - \rho)}^2 < \varepsilon^2. \quad (61)$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Задачу (11) можно переписать в виде

$$\inf_{f \in L_2} \{ \|g[f] - G(z)\|_l^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_{L_2(\rho, r)}^2 + \alpha\|F[f] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n - \rho)}^2 \}. \quad (62)$$

В свою очередь, воспользовавшись (2) и (5), задачу (62) перепишем в виде

$$\inf_{f \in L_2} \{ \alpha(2\pi)^n \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx + \int_{\sigma} \int_{\sigma} S(x, y) f(y) \overline{f(x)} dy dx - 2\operatorname{Re} \int_{\sigma} s(x) \overline{f(x)} dx \}, \quad (63)$$

где  $S(x, y)$  из (17),  $s(x)$  из (18). Откуда следует, что уравнением Эйлера задачи (11) будет уравнение (16) с эрмитовым ядром (17) и правой частью (18).

Покажем, что уравнение (16) имеет единственное решение в  $L_2(\sigma)$  для любой  $s(x) \in L_2(\sigma)$ . Для этого по теореме Фредгольма [5] достаточно показать, что однородное уравнение

$$\alpha(2\pi)^n f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = 0 \quad (64)$$

имеет в  $L_2(\sigma)$  только нулевое решение. Для ядра (17) это имеет место. В самом деле, пусть  $f_0(x) \in L_2(\sigma)$  удовлетворяет (64). Ум-

ножим соответствующее тождество (64) скалярно в  $L_2(\sigma)$  на  $f_0(x)$ . Тогда получится равенство

$$\alpha(2\pi)^n \int_{\sigma} |f_0(x)|^2 dx + \int_{\sigma} \int_{\sigma} S(x, y) f_0(y) \overline{f_0(x)} dy dx = 0. \quad (65)$$

Или в другой записи

$$\alpha(2\pi)^n \|f_0\|_{L_2}^2 + \|g[f_0]\|_l^2 + \|F[f_0]\|_{L_2(\rho, r)}^2 - \alpha\|F[f_0]\|_{L_2(\sigma)}^2 = 0. \quad (66)$$

С учетом (35) получится

$$\|F[f_0]\|_{\alpha\rho}^2 \leq \|g[f_0]\|_l^2 + \|F[f_0]\|_{L_2(\rho, r)}^2 + \alpha\|F[f_0]\|_{L_2(R^n - \rho)}^2 = 0. \quad (67)$$

Наконец, в силу теоремы 2, а именно левой части второго неравенства (10), имеем  $\|f_0\|_{L_2} = 0$ , т. е.  $f_0(x) = 0$ . Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Мы показали в теореме 5, что решение  $f_{\alpha\rho}(x)$  задачи (11) определяется уравнением (16). Поэтому, гладкость его целиком зависит от гладкости ядра  $S(x, y)$  по  $x \in \sigma$  и правой части  $s(x)$ ,  $x \in \sigma$ . Из (17) видно, что если  $\mathcal{G}(z, x)$  и  $D^p \mathcal{G}(z, x)$   $p$  раз непрерывно дифференцируемые функции по  $x \in \sigma$ , то и  $S(x, y)$  будет  $p$  раз непрерывно дифференцируемой функцией по  $x$ . В самом деле, в силу ограниченности областей  $\Omega$  и  $\rho$  и интегрируемости соответствующих производных подынтегральных функций по параметру  $x$  следует существование и непрерывность соответствующих производных у  $S(x, y)$  по  $x$ . Аналогично для правой части  $s(x)$ . Особое внимание требуется только для слагаемого

$$\int_{R^n - \rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = F^{-1}[h] - \int_{\rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (68)$$

точнее для обратного преобразования Фурье от  $h(\lambda)$ ,  $F^{-1}[h]$ . Известна связь между убыванием  $h(\lambda)$  на бесконечности и гладкостью ее обратного преобразования Фурье [3]. Если  $h(\lambda)$ ,  $\lambda \in R^n$  такова, что  $h(\lambda) \sum_{k=p} \lambda^k \in L_1(R^n)$ , то функция  $F^{-1}[h]$ ,  $x \in R^n$  имеет  $p$  непрерывных производных на всем  $R^n$ , а следовательно, и для  $x \in \sigma$ . Теорема 6 доказана.

Докажем теорему 7. Будем доказывать ее от противного. Дано, что  $f_1(x) \in L_2(\sigma)$  и  $f_2(x) \in L_2(\sigma)$  два решения задачи (6) в соответствующих пространствах  $X(\sigma)$ ,  $Z(\Omega)$ ,  $H$  и  $g[f_1] \neq g[f_2]$  в некотором  $W_2^{(l)}(\Omega)$ . Предположим, что  $F[f_1] = F[f_2]$  в каком-либо  $H_{\alpha\rho}$ . Тогда в силу теоремы 2, а именно сначала левой части второго неравенства (10), будем иметь  $f_1(x) = f_2(x)$  в  $L_2(\sigma)$ , затем в силу первого неравенства (10)  $g[f_1] = g[f_2]$  в  $W_2^{(l)}(\Omega)$ , что противоречит условиям теоремы. Теорема 7 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. О корректных постановках задач синтеза антенн. Настоящий сборник.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.
3. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Методы решения задач синтеза антенн. Репринт ВЦ МГУ, 1969.
4. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962.
5. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. СМБ. М., Физматгиз, 1968.

А. В. ЧЕЧКИН

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ДЛЯ ОСНОВНЫХ ВИДОВ АНТЕНН

Выводится общее уравнение Эйлера для метода заданных диаграмм. Решаются задачи синтеза различных антенн. На направление тока ограничений не накладывается, решение ищется в самом общем случае.

### ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи синтеза той или иной антенны мы будем поступать следующим образом:

1) Выберем определенную систему координат в области  $V$ , в которой ищется распределение тока  $\vec{j}(m)$ .

2) Распишем векторное соотношение между  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и  $\vec{j}(m)$  по координатам в какой-либо системе координат. Затем с каждым скалярным соотношением поступаем следующим образом.

3) Переобозначим для удобства входящие в соотношение функции. Приведем это соотношение к виду

$$g[f] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (1)$$

называя  $f(x)$  — плотностью тока,  $g[f]$  — диаграммой направленности.

4) Подберем тройку гильбертовых пространств  $X(\sigma)$ ,  $Z(\Omega)$  и  $H$ . Если надо, учитываем при этом условия на решение  $f(x) \in X(\sigma)$  и на заданную диаграмму направленности  $G(z) \in Z(\Omega)$ .

5) Зададим дополнительную информацию о решении в виде характеристики  $h(\lambda) \in H$ .

6) Решение задачи синтеза ищем из условия

$$\inf_{f \in X} \{ \|g[f] - G(z)\|_Z^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_H^2 \}. \quad (2)$$

Как правило, решение задачи (2) мы будем искать из соответствующего уравнения Эйлера.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. О корректных постановках задач синтеза антенн. Настоящий сборник.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.
3. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Методы решения задач синтеза антенн. Репринт ВЦ МГУ, 1969.
4. Фукс Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1962.
5. Забрейко П. П. и др. Интегральные уравнения. СМБ. М., Физматгиз, 1968.

А. В. ЧЕЧКИН

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ДЛЯ ОСНОВНЫХ ВИДОВ АНТЕНН

Выводится общее уравнение Эйлера для метода заданных диаграмм. Решаются задачи синтеза различных антенн. На направление тока ограничений не накладывается, решение ищется в самом общем случае.

### ВВЕДЕНИЕ

При решении задачи синтеза той или иной антенны мы будем поступать следующим образом:

1) Выберем определенную систему координат в области  $V$ , в которой ищется распределение тока  $\vec{j}(m)$ .

2) Распишем векторное соотношение между  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и  $\vec{j}(m)$  по координатам в какой-либо системе координат. Затем с каждым скалярным соотношением поступаем следующим образом.

3) Переобозначим для удобства входящие в соотношение функции. Приведем это соотношение к виду

$$g[f] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (1)$$

называя  $f(x)$  — плотностью тока,  $g[f]$  — диаграммой направленности.

4) Подберем тройку гильбертовых пространств  $X(\sigma)$ ,  $Z(\Omega)$  и  $H$ . Если надо, учитываем при этом условия на решение  $f(x) \in X(\sigma)$  и на заданную диаграмму направленности  $G(z) \in Z(\Omega)$ .

5) Зададим дополнительную информацию о решении в виде характеристики  $h(\lambda) \in H$ .

6) Решение задачи синтеза ищем из условия

$$\inf_{f \in X} \{ \|g[f] - G(z)\|_Z^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_H^2 \}. \quad (2)$$

Как правило, решение задачи (2) мы будем искать из соответствующего уравнения Эйлера.

7) Последняя стадия решения задачи синтеза данной антенны связана с отысканием оптимального решения методом заданных диаграмм. Другими словами, перебираем соответствующие параметры и функции для удовлетворения тех или иных требований к решению задачи [1].

### § 1. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Для численного нахождения решения задачи синтеза мы будем пользоваться уравнением Эйлера соответствующей вариационной задачи (2). Само уравнение было выписано в [1]. Сейчас мы выведем это уравнение для пространств  $X(\sigma) = L_2(\sigma)$ ,

$$Z(\Omega) = W_2^{(l)}(\Omega), H = H_{\alpha\rho}.$$

Распишем задачу (2) подробнее для этих пространств

$$\inf_{f \in L_2} \{ \|g[f] - G(z)\|_l^2 + \|F[f] - h(\lambda)\|_{L_2(\rho, r)}^2 + \alpha \|F[f] - h(\lambda)\|_{L_2(R^n \setminus \rho)}^2 \}. \quad (3)$$

Здесь

$$g[f] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx, \quad z \in \Omega, \quad (4)$$

размерность области  $\sigma$  равна  $n \geq 1$ ,  $\sigma \subset R^n$ , размерность области  $\Omega$  равна  $m \geq 1$ ,  $\Omega \subset R^m$ , размерность области  $\rho$  равна  $n$ ,  $\rho \subset R^n$ .

Пространства  $W_2^{(l)}(\Omega)$  и  $H_{\alpha\rho}$  определены в [1].

Функционал, стоящий в фигурных скобках (3) с точностью до аддитивной постоянной, можно переписать в следующем виде:

$$\|g[f]\|_l^2 + \|F[f]\|_{L_2(\rho, r)}^2 + \alpha \|F[f]\|_{L_2(R^n \setminus \rho)}^2 - 2\operatorname{Re}(G(z), g[f])_l - 2\operatorname{Re}(h(\lambda), F[f])_{L_2(\rho, r)} - 2\alpha \operatorname{Re}(h(\lambda), F[f])_{L_2(R^n \setminus \rho)}. \quad (5)$$

Выпишем все слагаемые в (5) с учетом (4) и выражения преобразования Фурье

$$F[f] = \int_{\sigma} e^{i\lambda x} f(x) dx, \quad \lambda \in R^n. \quad (6)$$

Будем иметь для квадратичных функционалов

$$\begin{aligned} \|g[f]\|_l^2 &= \int_{\Omega} P(z) |g[f]|^2 dz + \int_{\Omega} Q(z) \sum_{k=1}^l |D^k g[f]|^2 dz = \\ &= \iint_{\sigma} \iint_{\Omega} \left[ P(z) \mathcal{G}(z, y) \overline{\mathcal{G}(z, x)} + Q(z) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k=1}^l D^k \mathcal{G}(z, y) \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)} \right] dz f(y) \overline{f(x)} dy dx, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F[f]\|_{L_2(\rho, r)}^2 &= \int_{\rho} r(\lambda) |F[f]|^2 d\lambda = \\ &= \iint_{\sigma} \iint_{\rho} \left\{ \int_{\rho} r(\lambda) e^{i\lambda(y-x)} d\lambda \right\} f(y) \overline{f(x)} dy dx, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F[f]\|_{L_2(R^n \setminus \rho)}^2 &= (2\pi)^n \|f\|_{L_2}^2 - \int_{\rho} |F[f]|^2 d\lambda = (2\pi)^n \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx - \\ &- \iint_{\sigma} \iint_{\rho} \left\{ \int_{\rho} e^{i\lambda(y-x)} d\lambda \right\} f(y) \overline{f(x)} dy dx. \quad (9) \end{aligned}$$

В формуле (9) мы воспользуемся равенством Парсеваля

$$\|F[f]\|_{L_2(R^n)}^2 = (2\pi)^n \|f\|_{L_2}^2 = (2\pi)^n \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx. \quad (10)$$

Линейные функционалы в (5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (G(z), g[f])_l &= \int_{\Omega} \left[ P(z) G(z) g[f] + Q(z) \sum_{k=1}^l D^k G(z) \overline{D^k g[f]} \right] dz = \\ &= \int_{\sigma} \iint_{\Omega} \left[ P(z) G(z) \overline{\mathcal{G}(z, x)} + Q(z) \sum_{k=1}^l D^k G(z) \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)} \right] dz f(x) dx, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h(\lambda), F[f])_{L_2(\rho, r)} &= \int_{\rho} h(\lambda) \overline{F[f]} r(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{\sigma} \left\{ \int_{\rho} r(\lambda) h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \right\} \overline{f(x)} dx, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h(\lambda), F[f])_{L_2(R^n \setminus \rho)} &= \int_{R^n \setminus \rho} h(\lambda) \overline{F[f]} d\lambda = \\ &= \int_{\sigma} \left\{ \int_{R^n \setminus \rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \right\} \overline{f(x)} dx. \quad (13) \end{aligned}$$

Таким образом, нам надо найти уравнение Эйлера вариационной задачи на минимум следующего функционала:

$$\alpha (2\pi)^n \int_{\sigma} |f(x)|^2 dx + \iint_{\sigma} S(x, y) f(y) \overline{f(x)} dy dx - 2\operatorname{Re} \int_{\sigma} s(x) \overline{f(x)} dx. \quad (14)$$

Уравнение Эйлера для такого функционала, а следовательно для рассматриваемой задачи синтеза, будет следующее:

$$\alpha (2\pi)^n f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x). \quad (15)$$

Здесь

$$S(x, y) = \int_{\Omega} P(z) \mathcal{G}(z, y) \overline{\mathcal{G}(z, x)} dz + \int_{\rho} r(\lambda) e^{i\lambda(y-x)} d\lambda -$$

$$- \alpha \int_{\rho} e^{i\lambda(y-x)} d\lambda + \int_{\Omega} Q(z) \sum_{k=1} D^{k\mathcal{G}}(z, y) D^{k\mathcal{G}}(z, x) dz, \quad (16)$$

$$s(x) = \int_{\Omega} P(z) \overline{\mathcal{G}(z, x)} G(z) dz + \int_{\Omega} Q(z) \sum_{k=1} \overline{D^{k\mathcal{G}}(z, x)} D^{kG}(z) dz + \\ + \int_{\rho} r(\lambda) e^{-i\lambda x} h(\lambda) d\lambda + \alpha \int_{R^+ \setminus \rho} h(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (17)$$

## § 2. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

Область  $V = L$ , где ищется распределение тока, есть линейный отрезок. Сначала выберем внутреннюю систему координат в области  $L$ . Это будет декартова система на прямой с центром в середине отрезка и осью вдоль отрезка. Внешнюю систему координат первоначально выберем сферической с тем же центром, рис. 1.

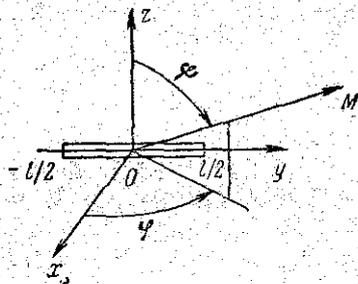


Рис. 1

Соотношение между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и плотностью тока  $\vec{j}(y)$ ,  $|y| \leq \frac{l}{2}$  будет следующим:

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \vec{j}(y) e^{iky \sin \psi \sin \varphi} dy. \quad (18)$$

Если  $N_i(\varphi, \psi)$  и  $j_2(y)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) координаты векторов  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и  $\vec{j}(y)$  в декартовой системе  $OXYZ$ , то векторное соотношение (18) эквивалентно трем скалярным

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j_i(y) e^{iky \sin \psi \sin \varphi} dy, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Будем считать, что желаемая диаграмма направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  задана тройкой скалярных функций  $G_i(\varphi, \psi)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

В связи с этим для решения задачи синтеза линейной антенны надо трижды решить задачу синтеза методом заданных диаграмм для соотношения вида

$$g[f] = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad |z| \leq \Omega, \quad (20)$$

где  $\mathcal{G}(z, x) = e^{izx}$ ,  $x = \frac{2k\sigma}{l} y$ ,  $\sigma > 0$ ,  $z = \Omega \cdot \sin \psi \sin \varphi$ ,

$\Omega = \frac{l}{2\sigma}$ . Причем

$$G(z) = G(\Omega \sin \psi \sin \varphi) = G_i(\varphi, \psi), \quad (21)$$

$$f(x) = f\left(\frac{2k\sigma}{l} y\right) = j_i(y).$$

Воспользуемся тем, что соответствующие области есть отрезки:  $\sigma = [-\sigma, \sigma]$ ,  $\Omega = [-\Omega, \Omega]$ .

Сделаем ряд предположений, не ограничивающих общности рассмотрения задачи синтеза линейной антенны.

Пусть область  $|z - z_0| \leq \omega$  — область главного лепестка диаграммы,  $z_0$  — центр этой области, область  $|z - z_0| > \omega$  — область боковых лепестков. Причем  $\omega + z_0 \leq \Omega$  и  $\omega - z_0 \leq \Omega$ . Положим

$$P(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z - z_0| \leq \omega, \\ \beta & \text{при } |z - z_0| > \omega, \quad \beta = \text{const} \geq 0; \end{cases} \quad (22)$$

$$Q(z) = \begin{cases} \gamma & \text{при } |z - z_0| \leq \omega, \quad \gamma = \text{const} \geq 0, \\ \kappa & \text{при } |z - z_0| > \omega, \quad \kappa = \text{const} \geq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Далее, пусть область  $\rho$  в  $H_{\infty}$  будет отрезок  $[-\rho, \rho]$ ,  $\rho > 0$ ,

$$r(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\lambda| \leq \delta, \\ \eta & \text{при } \Omega < |\lambda| \leq \delta, \quad \eta = \text{const} \geq 0, \\ \theta & \text{при } \delta < |\lambda| \leq \rho, \quad \theta = \text{const} \geq 0. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь область  $|\lambda| \leq \delta$  — область низких гармоник, область  $\delta < |\lambda| \leq \rho$  — область средних гармоник. Мы положили  $r(\lambda) = 0$  при  $|\lambda| \leq \Omega$ , так как при  $z = \lambda$  из  $[-\Omega, \Omega]$ ,  $g[f] = F[f]$ , поэтому в области  $[-\Omega, \Omega]$  мы имели бы противоположные требования. Наконец положим  $h(\lambda) \equiv 0$ ,  $|\lambda| < \infty$ .

При всех этих предположениях соответствующая вариационная задача (3) имеет вид

$$\inf_{f \in L_2} \{ \|g[f] - G(z)\|_2^2 + \eta \|F[f]\|_{L_2(\delta \setminus \Omega)}^2 + \theta \|F[f]\|_{L_2(\rho \setminus \delta)}^2 + \alpha \|F[f]\|_{L_2(\infty \setminus \rho)}^2 \}. \quad (25)$$

Каждый раз ( $i = 1, 2, 3$ ) решение ищется из уравнения

$$\alpha 2\pi f(x) + \int_{-\sigma}^{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x) \quad |x| \leq \sigma, \quad (26)$$

где

$$S(x, y) = 2\omega e^{iz_0(y-x)} [1 - \beta + (\gamma - \kappa) x^i y^i] \frac{\sin \omega(y-x)}{\omega(y-x)} + 2\Omega(\beta - \eta + \kappa x^i y^i) \frac{\sin \Omega(y-x)}{\Omega(y-x)} + 2\delta(\eta - \theta) \frac{\sin \delta(y-x)}{\delta(y-x)} + 2\rho(\theta - \alpha) \frac{\sin \rho(y-x)}{\rho(y-x)}, \quad (27)$$

$$s(x) = \int_{-\Omega}^{\Omega} [P(z) e^{-ixz} G(z) + Q(z) (-ix)^i e^{-ixz} G^{(i)}(z)] dz.$$

В заключение отметим, что если заранее известно что-либо о направлении вектора  $\vec{j}(y)$ , то это может упростить задачу, т. е. тогда надо будет решать задачу синтеза не трижды ( $i = 1, 2, 3$ ), а дважды или же один раз. Например, если ток  $\vec{j}(y)$  направлен вдоль антенны, т. е.  $\vec{j}(y) = \{0; j_2(y); 0\}$ , тогда надо решать задачу синтеза только для  $j_2(y)$ .

### § 3. ЗАДАЧА СИНТЕЗА КРИВОЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

В этом случае область  $L$ , в которой ищется распределение тока, есть часть кривой линии, рис. 2.

Соотношение между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и плотностью тока  $\vec{j}(x, y, z)$  в этом случае будет

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_L \vec{j}(x, y, z) e^{ik(x \sin \psi \cos \varphi + y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi)} dl. \quad (28)$$

Если кривая  $L$  задана в параметрической форме

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \quad -\sigma \leq t \leq \sigma, \quad (29)$$

где функции  $u(t), v(t), w(t)$  — кусочно-непрерывно дифференцируемые на  $[-\sigma, \sigma]$ ,  $\sigma = \text{const} > 0$ , то соотношение (28) можно переписать в виде

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \vec{j}(u(t), v(t), w(t)) e^{ik(u(t) \sin \psi \cos \varphi + v(t) \sin \psi \sin \varphi + w(t) \cos \psi)} \times \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2} dt. \quad (30)$$

Это равносильно выбору соответствующей внутренней системы координат на  $L$ .

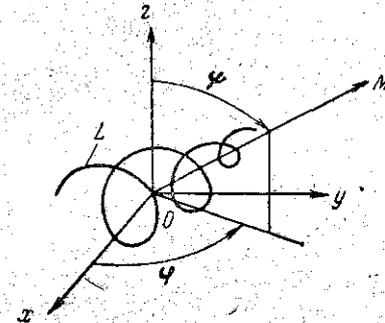


Рис. 2

Векторное соотношение (30) распадается в декартовой системе координат на три скалярных соотношения

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_{-\sigma}^{\sigma} j_i e^{ik(u \sin \psi \cos \varphi + v \sin \psi \sin \varphi + w \cos \psi)} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2} dt. \quad (31)$$

Поэтому для решения задачи синтеза криволинейной антенны, когда никаких условий на направление  $\vec{j}(x, y, z)$  не накладывается, надо трижды решить задачу синтеза методом заданных диаграмм для соотношения вида

$$g[f] = \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (32)$$

где

$$\mathcal{G}(z, x) = \mathcal{G}(z_1, z_2, z_3, x) = e^{i[u(x)z_1 + v(x)z_2 + w(x)z_3]} \sqrt{(\dot{u}')^2 + (\dot{v}')^2 + (\dot{w}')^2}, \quad (33)$$

область  $\sigma = [-\sigma, \sigma]$  — это отрезок, область  $\Omega = \{z: z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = k^2\}$  — это сфера, причем функция  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ . Заметим, что  $\mathcal{G}(z, x)$  бесконечно дифференцируемая функция по  $z \in \Omega$ .

$$f(x) = j_i(u(x), v(x), w(x)),$$

$$G(z) = G(z_1, z_2, z_3) = G(k \sin \psi \cos \varphi, k \sin \psi \sin \varphi, k \cos \psi) = G_i(\varphi, \psi), \quad (34)$$

Положим  $\rho = [-\rho, \rho]$ ,  $\rho = \text{const} > 0$  и пусть

$$r(\lambda) = \begin{cases} \eta & \text{при } |\lambda| \leq \delta, \eta = \text{const} \geq 0, \\ \theta & \text{при } |\lambda| > \delta, \theta = \text{const} \geq 0. \end{cases} \quad (35)$$

В этом случае не требуется особо выделять какую-либо подобласть в области низких гармоник  $|\lambda| \leq \delta$ , как в (24). Если еще предположить, что  $h(\lambda) \equiv 0$ ,  $|\lambda| < \infty$ , тогда решение задачи синтеза каждый раз ( $i = 1, 2, 3$ ) ищется из уравнения

$$a2\pi f(x) + \int_{-\sigma}^{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x), \quad |x| \leq \sigma, \quad (36)$$

где

$$S(x, y) = \int_{\Omega} \left[ P(z) \mathcal{G}(z, y) \overline{\mathcal{G}(z, x)} + Q(z) \sum_{k=1}^{\infty} D^k \mathcal{G}(z, y) \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)} \right] dz + \\ + 2\delta(\eta - \theta) \frac{\sin \delta(y-x)}{\delta(y-x)} + 2\rho(\theta - \alpha) \frac{\sin \rho(y-x)}{\rho(y-x)}. \quad (37)$$

$$s(x) = \int_{\Omega} \left[ P(z) \overline{\mathcal{G}(z, x)} G(z) + Q(z) \sum_{k=1}^{\infty} \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)} D^k C(z) \right] dz. \quad (38)$$

В заключение сделаем несколько замечаний.

Если известно, что-либо о направлении  $\vec{j}(x, y, z)$  в  $L$ , то так же, как в случае линейной антенны, это может упростить решение. Если кривая  $L$  плоская, то можно всегда считать ее уравнение заданным в виде

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = 0, \quad |t| \leq \sigma. \quad (39)$$

Тогда уравнения для решения будут теми же, что и (36), (37), (38), только

$$\mathcal{G}(z, x) = \mathcal{G}(z_1, z_2, x) = e^{i[u(x)z_1 + v(x)z_2]} \sqrt{(u')^2 + (v')^2}. \quad (40)$$

и область  $\Omega = \{z: z_1^2 + z_2^2 \leq k^2\}$  будет кругом, причем функция  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$  и по переменной  $z \in \Omega$  бесконечно дифференцируемая.

Если кривая  $L$  прямая, то всегда можно считать ее уравнение заданным в виде

$$x = 0, \quad y = u(t), \quad z = 0, \quad |t| \leq \sigma. \quad (41)$$

тогда уравнение для решения будет полностью совпадать с уравнением (26), (27) для линейной антенны.

#### § 4. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПОВЕРХНОСТНОЙ АНТЕННЫ

Пусть область  $V = S$ , в которой ищется распределение тока, есть часть некоторой поверхности, рис. 3.

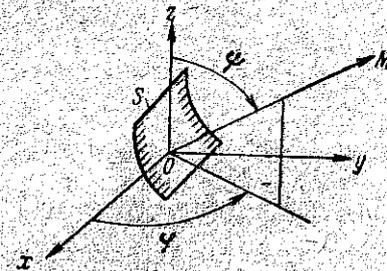


Рис. 3

В этом случае соотношение между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и плотностью тока  $\vec{j}(x, y, z)$  будет следующим:

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_S \vec{j}(x, y, z) e^{ik(x \sin \psi \cos \varphi + y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi)} ds. \quad (42)$$

Перепишем это соотношение с учетом параметрического задания поверхности:

$$x = u(p, q), \quad y = v(p, q), \quad z = w(p, q), \quad (p, q) \in \sigma, \quad (43)$$

где функции  $u(p, q)$ ,  $v(p, q)$ ,  $w(p, q)$  предположим кусочно-непрерывно дифференцируемыми в области  $\sigma$ , тогда

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_{\sigma} \vec{j}(u, v, w) e^{ik(uz \sin \psi \cos \varphi + vz \sin \psi \sin \varphi + wz \cos \psi)} \sqrt{EG - F^2} dpdq, \quad (44)$$

где

$$E = u_p^2 + v_p^2 + w_p^2, \\ G = u_q^2 + v_q^2 + w_q^2, \\ F = u_p u_q + v_p v_q + w_p w_q. \quad (45)$$

Если о направлении  $\vec{j}(x, y, z)$  ничего не предполагается, то векторное соотношение (44) распадается в декартовой системе координат на три независимых скалярных соотношения

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_{\sigma} j_i e^{ik(uz \sin \psi \cos \varphi + vz \sin \psi \sin \varphi + wz \cos \psi)} \sqrt{EG - F^2} dpdq. \quad (46)$$

Все сказанное приводит к тому, что для решения задачи синтеза поверхностной антенны необходимо трижды решить задачу синтеза методом заданных диаграмм для соотношений вида

$$g[f] = \int_{\sigma} \mathcal{G}(z, x) f(x) dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (47)$$

где

$$\mathcal{G}(z, x) = \mathcal{G}(z_1, z_2, z_3, x_1, x_2) = e^{i(u(x_1, x_2)z_1 + v(x_1, x_2)z_2 + w(x_1, x_2)z_3)} \sqrt{EG - F^2}. \quad (48)$$

Область  $\sigma$  — двумерная, область  $\Omega = \{z: z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = k^2\}$  — это сфера, причем функция  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$ , а по  $z \in \Omega$  бесконечно дифференцируемая. Далее заданная диаграмма

$$G(z) = G(z_1, z_2, z_3) = G(k \sin \psi \cos \varphi, k \sin \psi \sin \varphi, k \cos \psi) = G_i(\varphi, \psi), \\ f(x) = f(x_1, x_2) = j_i(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2), w(x_1, x_2)), \quad x_1 = \rho, \quad x_2 = q. \quad (49)$$

Положим  $\rho = \{\lambda: |\lambda_1| \leq \rho_1, |\lambda_2| \leq \rho_2\}$  — это прямоугольник в  $R^2$  и пусть

$$r(\lambda) = r(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} \eta & \text{при } |\lambda_1| \leq \delta_1, \quad |\lambda_2| \leq \delta_2, \quad \eta = \text{const} \geq 0, \\ \theta & \text{при } |\lambda_1| > \delta_1, \quad |\lambda_2| > \delta_2, \quad \theta = \text{const} \geq 0. \end{cases} \quad (50)$$

Здесь прямоугольник  $\{\lambda: |\lambda_1| \leq \delta_1 \leq \rho_1 \text{ и } |\lambda_2| \leq \delta_2 \leq \rho_2\}$  — область низких гармоник, а область  $\{\lambda: \delta_1 < |\lambda_1| \leq \rho_1, \delta_2 < |\lambda_2| \leq \rho_2\}$  — область средних гармоник. Положим еще, что  $h(\lambda) = h(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \lambda \in R^2$ . Тогда решение задачи синтеза ищется каждый раз ( $i = 1, 2, 3$ ) из двумерного уравнения

$$\alpha(2\pi)^2 f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x), \quad x \in \sigma, \quad (51)$$

где

$$S(x, y) = \int_{\Omega} \left[ P(z) \mathcal{G}(x, y) \overline{\mathcal{G}(z, x)} + Q(z) \sum_{k=1}^3 D^k \mathcal{G}(z, y) \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)} \right] dz + \\ + 2\delta_1 \delta_2 (\eta - \theta) \frac{\sin \delta_1 (y_1 - x_1)}{\delta_1 (y_1 - x_1)} \cdot \frac{\sin \delta_2 (y_2 - x_2)}{\delta_2 (y_2 - x_2)} + \\ + 2\rho_1 \rho_2 (\theta - \alpha) \frac{\sin \rho_1 (y_1 - x_1)}{\rho_1 (y_1 - x_1)} \cdot \frac{\sin \rho_2 (y_2 - x_2)}{\rho_2 (y_2 - x_2)}, \quad (52) \\ s(x) = \int_{\Omega} \left[ P(z) \overline{\mathcal{G}(z, x)} G(z) + Q(z) \sum_{k=1}^3 \overline{D^k \mathcal{G}(z, x)} D^k G(z) \right] dz.$$

В заключение отметим, что если известно, что-либо о направлении  $\vec{j}(x, y, z)$ , то этим можно воспользоваться для упрощения решения так же, как и в случае линейной антенны. Наконец,

если поверхность  $S$  плоская, то ее уравнение всегда можно считать заданным в виде

$$x = \rho, \quad y = q, \quad z = 0, \quad (\rho, q) \in \sigma, \quad (53)$$

тогда уравнение для решения будет тоже что и (51), (52), только изменится  $\mathcal{G}(z, x)$

$$\mathcal{G}(z, x) = \mathcal{G}(z_1, z_2, x_1, x_2) = e^{i(x_1 z_1 + x_2 z_2)} \sqrt{EG - F^2} \quad (54)$$

и область  $\Omega$  станет кругом:  $\Omega = \{z: z_1^2 + z_2^2 \leq k^2\}$ , причем функция  $\mathcal{G}(z, x) \in L_2(\Omega, \sigma)$  и  $\mathcal{G}(z, x)$  бесконечно дифференцируемая по  $z \in \Omega$ .

### § 5. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ТРЕХМЕРНОЙ АНТЕННЫ

Пусть область  $V$ , в которой нам надо найти распределение тока  $\vec{j}(x, y, z)$ , будет трехмерной областью (рис. 4).

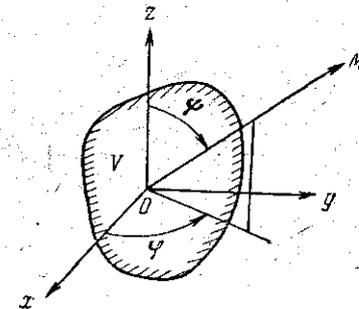


Рис. 4

Для этого случая соотношение между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и вектором  $\vec{j}(x, y, z)$  имеет вид

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_V \vec{j}(x, y, z) e^{ik(x \sin \psi \cos \varphi + y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi)} dx dy dz. \quad (55)$$

Если векторное соотношение расписать в скалярной форме, то будем иметь соотношение между декартовыми координатами:

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_V j_i e^{ik(x \sin \psi \cos \varphi + y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi)} dx dy dz, \quad (56)$$

для  $i = 1, 2, 3$ .

Сделаем замену переменных

$$x = \{x_1; x_2; x_3\} = \frac{k}{\Omega} \{x; y; z\}, \quad \Omega = \text{const} > 0,$$

$$z = \{z_1, z_2, z_3\} = \Omega \{ \sin \psi \cos \varphi; \sin \psi \sin \varphi; \cos \psi \} \quad (57)$$

и обозначим через

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z_1, z_2, z_3) = \mathcal{F}(\Omega \sin \psi \cos \varphi; \Omega \sin \psi \sin \varphi; \cos \psi) = N_i(\varphi, \psi),$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{k^3}{\Omega^3} j_i \left( \frac{\Omega}{k} x_1, \frac{\Omega}{k} x_2, \frac{\Omega}{k} x_3 \right). \quad (58)$$

Тогда область  $V$  перейдет в трехмерную область  $\sigma$  и соотношение станет следующим:

$$g[f] = \int_{\sigma} f(x) e^{ixz} dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (59)$$

где  $\Omega = \{z : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \Omega^2\}$  — сфера.

Таким образом, для решения задачи синтеза трехмерной антенны требуется трижды решить задачу синтеза для соотношения (59) методом заданных диаграмм.

Пусть область  $\rho$  есть параллелепипед  $\rho = \{\lambda : |\lambda_1| \leq \rho_1, |\lambda_2| \leq \rho_2, |\lambda_3| \leq \rho_3\}$ , где  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 > 0$ , предположим, что

$$r(\lambda) = \begin{cases} \eta & \text{при } |\lambda_1| \leq \delta_1, |\lambda_2| \leq \delta_2, |\lambda_3| \leq \delta_3, \eta = \text{const} > 0, \\ \theta & \text{при } |\lambda_1| > \delta_1, |\lambda_2| > \delta_2, |\lambda_3| > \delta_3, \theta = \text{const} \geq 0 \end{cases} \quad (60)$$

и что  $h(\lambda) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0, \lambda \in R^3$ . Тогда решение рассматриваемой задачи синтеза ищется всякий раз из трехмерного уравнения

$$\alpha (2\pi)^3 f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x), \quad x \in \sigma, \quad (61)$$

в котором

$$S(x, y) = \int_{\Omega} [P(z) + Q(z) \sum_{k=1}^3 x^k y^k] e^{iz(y-x)} dz + \\ + 2\delta_1 \delta_2 \delta_3 (\eta - \theta) \frac{\sin \delta_1 (y_1 - x_1)}{\delta_1 (y_1 - x_1)} \cdot \frac{\sin \delta_2 (y_2 - x_2)}{\delta_2 (y_2 - x_2)} \cdot \frac{\sin \delta_3 (y_3 - x_3)}{\delta_3 (y_3 - x_3)} + \\ + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 (\theta - \alpha) \frac{\sin \rho_1 (y_1 - x_1)}{\rho_1 (y_1 - x_1)} \cdot \frac{\sin \rho_2 (y_2 - x_2)}{\rho_2 (y_2 - x_2)} \cdot \frac{\sin \rho_3 (y_3 - x_3)}{\rho_3 (y_3 - x_3)}, \quad (62)$$

$$s(x) = \int_{\Omega} [P(z)G(z) + Q(z) \sum_{k=1}^3 (-ix)^k D^k G(z)] e^{izx} dx. \quad (63)$$

В конце отметим, что если вектор  $\vec{j}(x, y, z)$  направлен вдоль некоторой плоскости, тогда надо решать задачу синтеза только дважды, если же он направлен вдоль некоторой прямой, то ее надо решать всего лишь один раз методом заданных диаграмм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чечкин А. В. Метод заданных диаграмм. Настоящий сборник.

А. В. ЧЕЧКИН

## РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается смешанная задача по отысканию такой фазы распределения тока в антенне, при которой антенной излучается максимальная мощность в данном направлении.

### ВВЕДЕНИЕ

Выпишем соотношение между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и плотностью тока  $\vec{j}(m)$  в антенне  $V$  [1].

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_V \vec{j}(m) e^{ik\rho \cos \theta} dV, \quad (1)$$

здесь  $\rho \cos \theta = x \sin \psi \cos \varphi + y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi$ ,  $m(x, y, z)$  — точка интегрирования (рис. 1).

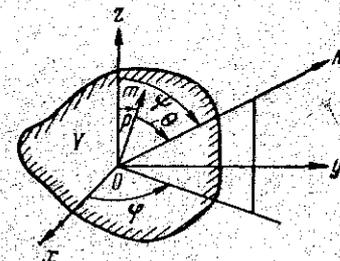


Рис. 1

Вместо векторного соотношения (1) можно рассматривать независимые скалярные соотношения между декартовыми координатами  $\vec{N}$  и  $\vec{j}$ :

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_V j_i(m) e^{ik\rho \cos \theta} dV, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Выпишем  $N_i(\varphi, \psi)$  и  $j_i(m)$  с учетом того, что это комплекснозначные функции

$$z = \{z_1, z_2, z_3\} = \Omega \{ \sin \psi \cos \varphi; \sin \psi \sin \varphi; \cos \psi \} \quad (57)$$

и обозначим через

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z_1, z_2, z_3) = \mathcal{F}(\Omega \sin \psi \cos \varphi; \Omega \sin \psi \sin \varphi; \cos \psi) = N_i(\varphi, \psi),$$

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{k^3}{\Omega^3} j_i \left( \frac{\Omega}{k} x_1, \frac{\Omega}{k} x_2, \frac{\Omega}{k} x_3 \right). \quad (58)$$

Тогда область  $V$  перейдет в трехмерную область  $\sigma$  и соотношение станет следующим:

$$g[f] = \int_{\sigma} f(x) e^{ixz} dx = \mathcal{F}(z), \quad z \in \Omega, \quad (59)$$

где  $\Omega = \{z : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \Omega^2\}$  — сфера.

Таким образом, для решения задачи синтеза трехмерной антенны требуется трижды решить задачу синтеза для соотношения (59) методом заданных диаграмм.

Пусть область  $\rho$  есть параллелепипед  $\rho = \{\lambda : |\lambda_1| \leq \rho_1, |\lambda_2| \leq \rho_2, |\lambda_3| \leq \rho_3\}$ , где  $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 > 0$ , предположим, что

$$r(\lambda) = \begin{cases} \eta & \text{при } |\lambda_1| \leq \delta_1, |\lambda_2| \leq \delta_2, |\lambda_3| \leq \delta_3, \eta = \text{const} > 0, \\ \theta & \text{при } |\lambda_1| > \delta_1, |\lambda_2| > \delta_2, |\lambda_3| > \delta_3, \theta = \text{const} \geq 0 \end{cases} \quad (60)$$

и что  $h(\lambda) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0, \lambda \in R^3$ . Тогда решение рассматриваемой задачи синтеза ищется всякий раз из трехмерного уравнения

$$\alpha (2\pi)^3 f(x) + \int_{\sigma} S(x, y) f(y) dy = s(x), \quad x \in \sigma, \quad (61)$$

в котором

$$S(x, y) = \int_{\Omega} [P(z) + Q(z) \sum_{k=1}^3 x^k y^k] e^{iz(y-x)} dz + \\ + 2\delta_1 \delta_2 \delta_3 (\eta - \theta) \frac{\sin \delta_1 (y_1 - x_1)}{\delta_1 (y_1 - x_1)} \cdot \frac{\sin \delta_2 (y_2 - x_2)}{\delta_2 (y_2 - x_2)} \cdot \frac{\sin \delta_3 (y_3 - x_3)}{\delta_3 (y_3 - x_3)} + \\ + 2\rho_1 \rho_2 \rho_3 (\theta - \alpha) \frac{\sin \rho_1 (y_1 - x_1)}{\rho_1 (y_1 - x_1)} \cdot \frac{\sin \rho_2 (y_2 - x_2)}{\rho_2 (y_2 - x_2)} \cdot \frac{\sin \rho_3 (y_3 - x_3)}{\rho_3 (y_3 - x_3)}, \quad (62)$$

$$s(x) = \int_{\Omega} [P(z)G(z) + Q(z) \sum_{k=1}^3 (-ix)^k D^k G(z)] e^{izx} dx. \quad (63)$$

В конце отметим, что если вектор  $\vec{j}(x, y, z)$  направлен вдоль некоторой плоскости, тогда надо решать задачу синтеза только дважды, если же он направлен вдоль некоторой прямой, то ее надо решать всего лишь один раз методом заданных диаграмм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чечкин А. В. Метод заданных диаграмм. Настоящий сборник.

А. В. ЧЕЧКИН

## РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается смешанная задача по отысканию такой фазы распределения тока в антенне, при которой антенной излучается максимальная мощность в данном направлении.

### ВВЕДЕНИЕ

Выпишем соотношение между диаграммой направленности  $\vec{N}(\varphi, \psi)$  и плотностью тока  $\vec{j}(m)$  в антенне  $V$  [1].

$$\vec{N}(\varphi, \psi) = \int_V \vec{j}(m) e^{ik\rho \cos \theta} dV, \quad (1)$$

здесь  $\rho \cos \theta = x \sin \psi \cos \varphi + y \sin \psi \sin \varphi + z \cos \psi$ ,  $m(x, y, z)$  — точка интегрирования (рис. 1).

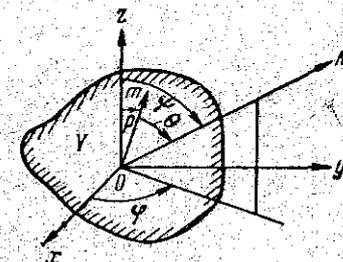


Рис. 1

Вместо векторного соотношения (1) можно рассматривать независимые скалярные соотношения между декартовыми координатами  $\vec{N}$  и  $\vec{j}$ :

$$N_i(\varphi, \psi) = \int_V j_i(m) e^{ik\rho \cos \theta} dV, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Выпишем  $N_i(\varphi, \psi)$  и  $j_i(m)$  с учетом того, что это комплекснозначные функции

$$N_i(\varphi, \psi) = \text{mod } N_i e^{i \arg N_i} = E(\varphi, \psi) e^{iQ(\varphi, \psi)},$$

$$j_i(m) = \text{mod } j_i e^{i \arg j_i} = I(m) e^{iu(m)}. \quad (3)$$

Тогда соотношение (2) переписывается в виде

$$\int_V I(m) e^{iu(m)} e^{ikr \cos \theta} dv = E(\varphi, \psi) e^{iQ(\varphi, \psi)}. \quad (4)$$

Смешанными задачами в теории антенн называют такие задачи синтеза антенн, в которых в качестве искомой величины выступает либо  $I(m) = \text{mod } j_i(m)$  (фаза  $u(m)$  считается известной), либо  $u(m) = \arg j_i(m)$  (модуль  $I(m)$  считается известным). Причем задаваемой величиной может являться как вся диаграмма направленности  $N_i(\varphi, \psi)$ , так и отдельные части ее  $E(\varphi, \psi)$  или  $Q(\varphi, \psi)$  при произвольной другой.

Смешанная задача в случае, когда ищется  $I(m)$ , а фаза — известная функция решается методом заданных диаграмм [2] для соотношения

$$g[I] = \int_V \mathcal{G}(m; \varphi, \psi) I(m) dv = E(\varphi, \psi) e^{iQ(\varphi, \psi)}, \quad (5)$$

где ядро  $\mathcal{G}(m; \varphi, \psi) = e^{i[u(m) + kr \cos \theta]}$ .

Особый интерес представляет смешанная задача, в которой ищется  $u(m)$ , а модуль — известная функция. В этом случае мы имеем соотношение

$$k[u] = \int_V K(m; \varphi, \psi) e^{iu(m)} dv = E(\varphi, \psi) e^{iQ(\varphi, \psi)}, \quad (6)$$

в котором ядро  $K(m; \varphi, \psi) = I(m) e^{ikr \cos \theta}$ .

### § 1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим величину мощности, излучаемой антенной в данном направлении  $\varphi, \psi$  [1].

$$P_{00} = |k[u]|^2 = \left| \int_V K(m; \varphi, \psi) e^{iu(m)} dv \right|^2. \quad (7)$$

Попытаемся найти фазу  $u(m)$ , при которой эта мощность максимальная.

#### Первая постановка.

I. Решение ищем из вариационной задачи

$$\sup_{u(m)} \{P_{00}\} = \sup_{u(m)} \left\{ \left| \int_V K(m; \varphi, \psi) e^{iu(m)} dv \right|^2 \right\}. \quad (8)$$

Функцию  $u(m)$  ищем из класса кусочно-непрерывных в области  $V$  функций.

Решение. Оценим сверху величину  $P_{00}$  с учетом выражения ядра  $K(m; \varphi, \psi)$  в (6):

$$P_{00} = \left| \int_V K(m; \varphi, \psi) e^{iu(m)} dv \right|^2 \leq \left( \int_V I(m) dv \right)^2. \quad (9)$$

Верхняя грань  $P_{00}$  достигается при фазе  $u(m)$ , равной

$$u(m) = -kr \cos \theta + C = -kx \sin \psi \cos \varphi - ky \sin \psi \sin \varphi - kz \cos \psi + C. \quad (10)$$

Здесь  $C = \text{const}$  — произвольная постоянная. Функция (10) представляет решение задачи (8). Заметим, что на область  $V$  мы никаких ограничений не накладывали.  $V$  может быть трехмерной областью, поверхностью и линией.

Рассмотрим другую постановку той же смешанной задачи. Выпишем выражение  $P_{00}$  через  $f(m) = I(m) e^{iu(m)}$

$$P_{00} = \left| \int_V e^{ikr \cos \theta} f(m) dv \right|^2. \quad (11)$$

Предположим, что  $f(m) \in L_2(v)$ .

#### Вторая постановка

II. Решение будем искать из задачи на условный экстремум:

$$\max_{f \in L_2} \{P_{00}\} \text{ при } |f(m)|^2 = I^2(m). \quad (12)$$

Решение. Задача (12) сводится к безусловному экстремуму

$$\max_{f \in L_2} \left\{ \left| \int_V e^{ikr \cos \theta} f(m) dv \right|^2 + \int_V \lambda(m) |f(m)|^2 dv \right\}. \quad (13)$$

Здесь  $\lambda(m)$  — функция Лагранжа.

Выпишем уравнение Эйлера задачи (13):

$$e^{-ikr \cos \theta} \int_V e^{ikr \cos \theta} f(m) dv = -\lambda(m) f(m). \quad (14)$$

Обозначим множитель в левой части (14) через

$$\mu = - \int_V e^{ikr \cos \theta} f(m) dv. \quad (15)$$

Очевидно, что  $|\mu|^2 = P_{00} \neq 0$ , тогда из (14)

$$|\mu|^2 = \lambda^2(m) I^2(m). \quad (16)$$

Можно всегда считать, что  $I(m) \neq 0$ , так как в противном случае мы рассмотрим другую область  $V$ , в которой уже  $I(m) \neq 0$ . Из (14) (16) имеем

$$f(m) = \frac{\mu}{\lambda(m)} e^{-ik\rho \cos \theta} = I(m) e^{iC} e^{-ik\rho \cos \theta}, \quad (17)$$

где  $C = \text{const}$ .

Мы получили решение задачи (12). Причем фаза

$$u(m) = -ik\rho \cos \theta + C \quad (18)$$

имеет такой же вид, как в (10). Так и должно быть, ведь мы рассмотрели две постановки одной смешанной задачи.

## § 2. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ

1) Как мы видим, для корректной постановки смешанных задач, в которых ищется фаза распределения тока, достаточно задать информацию только об электромагнитном поле, излучаемом антенной. Это существенно отличает такие смешанные задачи, например, от задач синтеза, в которых ищется амплитудно-фазовое распределение тока в антенне. Там задание информации только о поле не достаточно для корректной постановки. Требуется еще информация о самом токе. В смешанных же задачах с отысканием фазы распределения  $u(m)$ ,  $m \in V$  дополнительной информации о фазе не требуется, конечно предполагается, что функции  $u(m)$  рассматриваются такие, чтобы  $e^{iu(m)}$  была интегрируемой функцией в области  $V$ .

2) Рассмотрим вариационную задачу

$$\sup_{f \in L_2} \left\{ \frac{P_{00}}{W} \right\}, \quad (19)$$

где  $P_{00}$  — мощность, излучаемая антенной в данном направлении (11),  $W = C \int_V |f(m)|^2 dv$  — полная мощность потерь антенны.

Решим задачу (19). Применим неравенство Коши—Буняковского к  $P_{00}$ :

$$P_{00} = \left| \int_V e^{ik\rho \cos \theta} f(m) dv \right|^2 \leq W \cdot \frac{1}{C} \int_V |e^{ik\rho \cos \theta}|^2 dv. \quad (20)$$

Оценим сверху отношение в (19):

$$\frac{P_{00}}{W} \leq \int_V dv = \text{const} > 0. \quad (21)$$

Равенство достигается на функции

$$f(m) = Ae^{i(-k\rho \cos \theta + c)}, \quad (22)$$

где  $A = \text{const} > 0$ ,  $c = \text{const}$ . Таким образом, среди токов с одинаковой полной мощностью потерь распределение (22) отличает-

ся тем, что соответствующая антенна излучает в данном направлении максимальную мощность.

Тот же результат (22) мы получили, решая смешанную задачу (8), или (12) при  $|f(m)| = A$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. О корректных постановках задач синтеза антенн. Настоящий сборник.
2. Чечкин А. В. Метод заданных диаграмм. Настоящий сборник.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

И. М. ДЕНИСОВА, Г. А. КОКОТУШКИН

О ВЛИЯНИИ НЕПРОВОДЯЩЕЙ ТОНКОЙ ПРОСЛОЙКИ НА МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

При рассмотрении магнито-теллурических полей в неоднородных слоях большой интерес представляет влияние тонких прослоек. Целью настоящей работы является расчет магнито-теллурического поля в неоднородном слое с произвольным изгибом нижней поверхности и непроводящей тонкой прослойкой.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дан неоднородный слой (рис. 1). Верхняя граница слоя — плоскость  $z = 0$ . При  $z < 0$  имеется изолятор. Нижнюю границу слоя для простоты будем считать

$$H(y) = \begin{cases} H & \text{при } |y| \geq l, \\ H^*(y) & \text{при } |y| \leq l, \end{cases} \quad (1.01)$$

причем  $H(y)$  непрерывна при  $-\infty < y < \infty$ .  $H^*(y)$  имеет две непрерывные производные в интервале  $(-l, l)$ . При  $z > H(y)$  находится изолятор. При  $z = h$  имеется непроводящий бесконечно тонкий слой. Рассматривается случай магнитной поляризации:

$$\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}; \quad \vec{E} = \{0, E_y, E_z\}. \quad (1.02)$$

Поля рассматриваются в квазистационарной зоне, т. е. токами смещения пренебрегаем. Тогда можно считать, что при  $z = 0$   $H_x = 1$ , а при  $z = H(y)$   $H_x = 0$ . Кроме перечисленных условий на  $H_x$  необходимо задать условия на тонком слое:

$$1) [H_x]_{z=h} = 0. \quad (1.03)$$

Это условие непосредственно следует из непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля.

2) Получим теперь условие для нормальной производной

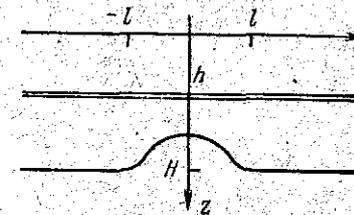


Рис. 1



Рис. 2

магнитного поля  $\frac{\partial H_x}{\partial z}$  при  $z = h$ . Для этого воспользуемся уравнением Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_C \vec{E} dl = \iint_S \vec{H} ds, \quad (1.04)$$

где  $C$  — контур, ограничивающий площадь  $S$  (рис. 2).

Расписывая (1.04), получим

$$E_y(y + \theta \Delta y, h + \Delta h) \Delta y - E_z(y + \Delta y, h + \theta \Delta h) \Delta h - E_y(y + \theta \Delta y, h) + E_z(y, h + \theta \Delta h) \Delta h = H_x \Delta y \Delta h.$$

Отсюда

$$E_y(y + \theta \Delta y, h + \Delta h) - E_y(y + \theta \Delta y, h) = \Delta h \frac{E_z(y + \Delta y, h + \theta \Delta h) - E_z(y, h + \theta \Delta h)}{\Delta y} + H_x \Delta h.$$

Устремив  $\sigma_0$ ,  $\Delta h$  и  $\Delta y$  к нулю, получим

$$\left[ \frac{\partial H_x}{\partial z} \right]_{z=h} = \frac{\partial H_x(y, h+0)}{\partial z} - \frac{\partial H_x(y, h-0)}{\partial z} = \alpha \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}, \quad (1.05)$$

где  $\alpha = -\sigma T$  и  $T = \lim_{\substack{\Delta h \rightarrow 0 \\ \sigma_0 \rightarrow 0}} \frac{\Delta h}{\sigma_0}$  — параметры, характеризующие физические свойства прослойки.

Итак, имеем

$$\Delta H_x + k^2 H_x = 0, \text{ где } k = \sqrt{\frac{i 4\pi \sigma \omega}{c^2}} = \kappa \sqrt{i}; \text{ Re } k > 0. \quad (1.06)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} H_x &= 1 & \text{при } z = 0, \\ H_x &= 0 & \text{при } z = H(y), \end{aligned} \quad (1.07)$$

$$[H_x]_{z=h} = 0, \quad (1.08)$$

$$\left[ \frac{\partial H_x}{\partial z} \right]_{z=h} = \alpha \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}$$

и условием на бесконечности

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (1.09)$$

Существование решения полученной задачи следует из общей теоремы существования. Докажем единственность решения. Введем функцию:

$$\tilde{H}_x = H_x^1 - H_x^2,$$

где  $H_x^1$  и  $H_x^2$  — два произвольных решения. Функция  $\tilde{H}_x$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца  $\Delta \tilde{H}_x + k^2 \tilde{H}_x = 0$  с однородными граничными условиями  $\tilde{H}_x = 0$  при  $z = 0$  и  $\tilde{H}_x = 0$  при  $z = H(y)$  и условию на бесконечности  $\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \pm \infty$ , а также условиями на прослойке

$$[\tilde{H}_x]_{z=h} = 0; \quad \left[ \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} \right]_{z=h} = \alpha \frac{\partial^2 \tilde{H}_x}{\partial y^2}.$$

Применим вторую формулу Грина к функциям  $\tilde{H}_x$  и  $\tilde{H}_x^*$  ( $\tilde{H}_x^*$  — комплексно сопряженная к  $\tilde{H}_x$ ) в областях  $S_1$  ( $0 < z < h, -\infty < y < \infty$ ) и  $S_2$  ( $h < z < H(y), -\infty < y < \infty$ ):

$$\iint_{S_1} (\tilde{H}_x - \tilde{H}_x^* \Delta \tilde{H}_x \Delta \tilde{H}_x) ds = \oint_{C_1} \left( \tilde{H}_x^* \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial n} - \tilde{H}_x \frac{\partial \tilde{H}_x^*}{\partial n} \right) dl,$$

$$\iint_{S_2} (\tilde{H}_x \Delta \tilde{H}_x^* - \tilde{H}_x^* \Delta \tilde{H}_x) ds = \oint_{C_2} \left( \tilde{H}_x^* \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial n} - \tilde{H}_x \frac{\partial \tilde{H}_x^*}{\partial n} \right) dl,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — контуры, ограничивающие соответственно  $S_1$  и  $S_2$ , а  $n$  — внутренняя нормаль. Сложим полученные выражения, учитывая уравнения, которым удовлетворяют  $\tilde{H}_x$  и  $\tilde{H}_x^*$  и условия при  $z = h$ :

$$2k^2 \iint_S |\tilde{H}_x|^2 ds = \oint_C \left( \tilde{H}_x^* \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial n} - \tilde{H}_x \frac{\partial \tilde{H}_x^*}{\partial n} \right) dl + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left( \tilde{H}_x^* \frac{\partial^2 \tilde{H}_x}{\partial y^2} - \tilde{H}_x \frac{\partial^2 \tilde{H}_x^*}{\partial y^2} \right) dy. \quad (1.10)$$

Первый интеграл в правой части (1.10) равен нулю в силу граничных условий и условий на бесконечности. Второй интеграл преобразуем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \tilde{H}_x^* \frac{\partial^2 \tilde{H}_x}{\partial y^2} - \tilde{H}_x \frac{\partial^2 \tilde{H}_x^*}{\partial y^2} \right) dy = \left( \tilde{H}_x^* \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} - \tilde{H}_x \frac{\partial \tilde{H}_x^*}{\partial y} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \tilde{H}_x^*}{\partial y} \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} \frac{\partial \tilde{H}_x^*}{\partial y} \right) dy = 0.$$

Таким образом,

$$\iint_S |H_x|^2 ds = 0, \text{ т. е. } \tilde{H}_x = 0$$

единственное решение.

## § 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОЛУЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

Будем решать данную задачу методом интегральных уравнений. Рассмотрим функцию источника задачи

$$\Delta G(MM_0) + k^2 G(MM_0) = -\delta(r_{MM_0}), \quad (2.01)$$

$$G(MM_0)|_{z=0} = 0; \quad G(MM_0) \rightarrow 0 \text{ при } r_{MM_0} \rightarrow \infty$$

$$[G]_{z=h} = 0; \quad \left[ \frac{\partial G}{\partial z} \right]_{z=h} = \alpha \frac{\partial^2 G}{\partial y^2},$$

где  $r_{MM_0}$  — расстояние между  $M$  и  $M_0$ . Представим функцию источника этой задачи в виде

$$G(MM_0) = G_0(MM_0) + G_1(MM_0), \quad (2.02)$$

где  $G_0(MM_0)$  — функция Грина и полупространства и

$$G_0(MM_0) = \frac{i}{4} \{H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr_1)\}.$$

Для  $G_1(MM_0)$  получаем

$$\Delta G_1 + k^2 G_1 = 0, \quad (2.03)$$

$$G_1|_{z=0} = 0; \quad G_1 \rightarrow 0 \text{ при } r_{MM_0} \rightarrow \infty, \quad (2.04)$$

$$[G_1]_{z=h} = 0; \quad \left[ \frac{\partial G_1}{\partial z} \right]_{z=h} = \alpha \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2}. \quad (2.05)$$

Функцию  $G_1(MM_0)$  будем искать в виде

$$G_1(MM_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (y - y_0) g_i(\lambda, z_0, z) d\lambda, \quad (2.06)$$

где  $g_i(\lambda, z_0, z)$  — неизвестные функции. Воспользовавшись интегральным представлением функции Ханкеля

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda (y - y_0) e^{-\eta(z-z_0)} \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где  $\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$  и используя условия (2.03 — 2.05), получим

$$g_1 = b_1(\lambda) \operatorname{sh}^2 \eta h e^{-\eta(z+z_0-h)}, \quad z > h, \quad z_0 > h,$$

$$g_2 = b_1(\lambda) \operatorname{sh} \eta h e^{-\eta z} \operatorname{sh} \eta z_0, \quad z > h, \quad z_0 < h,$$

где

$$b_1(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^2}{\eta(\eta e^{\eta h} - \alpha\lambda^2 \operatorname{sh} \eta h)}.$$

Применим теперь формулу Грина к функциям  $G(MM_0)$  и

$$u(y, z) = H_x(y, z) - \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH}.$$

$$\begin{aligned} u(M_0) = & - \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=h-0} dy + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=h+0} dy - \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{z=H(y)} dl - \\ & - \int_{-l}^l \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z=H(y)} dl. \end{aligned} \quad (2.07)$$

Рассмотрим два первых интеграла в выражении (2.07).

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=h+0} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{z=h-0} dy = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u \left[ \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h+0} - \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h-0} \right] - G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h+0} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=h-0} \right] \right\} dy = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy = \end{aligned}$$

$$= \alpha \left\{ \left( u \frac{\partial G}{\partial y} - G \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial y} \right) dy \right\} \Big|_{z=h} = 0.$$

Таким образом, имеем

$$u(M_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial n} G \Big|_{z=H(y)} dl - \int_{-l}^l \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z=H(y)} dl. \quad (2.08)$$

Устремив точку  $M_0(y_0, z_0)$  на нижнюю границу, продифференцируем выражение (2.08) по внутренней нормали в этой точке. Учитывая, что  $G(MM_0)$  является потенциалом простого слоя, получаем интегральное уравнение относительно функции  $\frac{\partial u}{\partial n}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial n_0}(y, z) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial n_0} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{z=H(y)} dl = \\ & = -2 \int_{-l}^l \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \frac{\partial^2 G}{\partial n_0 \partial n} \Big|_{z=H(y)} dl. \end{aligned} \quad (2.09)$$

Перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial n_0}(y_0, H(y_0)) + \\ & + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(y, H(y), y_0, H(y_0))}{\partial n_0} \frac{\partial u(y, H(y))}{\partial n} \mu(y) dy = f(y_0), \end{aligned}$$

где

$$\mu(y) = \sqrt{1 + H'(y)^2}.$$

$$f(y_0) = -2 \int_{-l}^l \frac{\sin k(H-H(y))}{\sin kH} \frac{\partial^2 G(y, H(y), y_0, H(y_0))}{\partial n \partial n_0} \mu(y) dy, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n_0} &= \frac{1}{\mu(y_0)} \left[ \frac{\partial G}{\partial y_0} H'(y_0) - \frac{\partial G}{\partial z_0} \right]; \\ \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_0} &= \frac{1}{\mu(y) \mu(y_0)} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial y_0} H'(y) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 G}{\partial y_0 \partial z} \right] H'(y) - \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} H'(y) - \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z_0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Решая интегральное уравнение (2.09—2.10) методом сведения к системе линейных алгебраических уравнений, получим  $\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=H(y)}$

Далее, дифференцируя соотношение (2.08) при  $z_0 = 0$  находим  $\left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0}$  и, тем самым импеданс магнито-теллурического поля на поверхности земли.

### § 3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

Обсудим некоторые из полученных результатов. Для ускорения и уточнения счета нижнее основание слоя было взято симметричным. На рис. 3 показана зависимость импеданса магнито-теллурического поля вдоль неоднородности в случае наличия про-

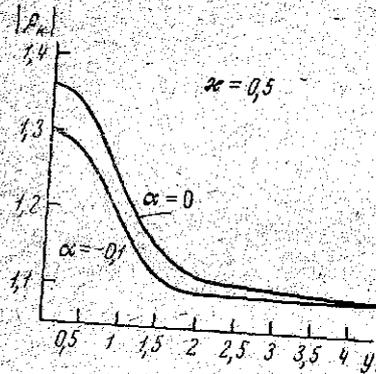


Рис. 3

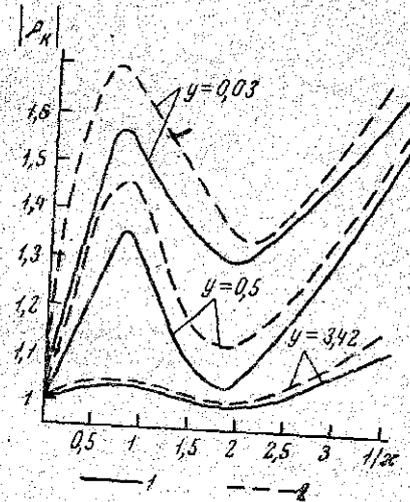


Рис. 4. 1 — кривая при  $\alpha=0$ ,  
2 — кривая при  $\alpha=0,1$

слойки и без нее. Видно, что наличие прослойки сглаживает влияние изогнутой формы основания. Рис. 4 представляет собой графики зависимости импеданса от частоты опять же в случае прослойки и без нее в разных точках на поверхности слоя.

### § 4. О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ ПРОСЛОЙКИ НА МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Особый интерес представляет вопрос о влиянии формы прослойки на магнито-теллурическое поле. Решим такую задачу. Дан

слой (рис. 5). Верхняя граница — плоскость  $z=0$ . Нижняя — плоскость  $z=H$ . Внутри слоя расположена изогнутая тонкая прослойка

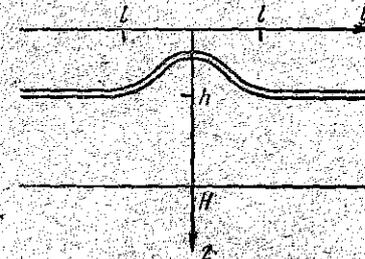


Рис. 5

$$z = \varphi(y), \text{ где } \varphi(y) = \begin{cases} h & y \leq l \\ \varphi^*(y) & -l \leq y \leq l \\ h & y \geq l \end{cases} \quad (4.01)$$

Как и в предыдущей задаче,  $\lim \frac{\Delta h}{\sigma_1(y)} = \text{const} = T$ , где  $\Delta h$  — толщина прослойки, а  $\sigma_1(y)$  — проводимость прослойки,  $\sigma$  — проводимость слоя и  $\sigma = \text{const}$ . Тогда задача может быть поставлена так. Внутри слоя выполняется уравнение

$$\Delta H_x + k^2 H_x = 0 \quad (4.02)$$

с граничными условиями  $H_x = 1$  при  $z = 0$  и  $H_x = 0$  при  $z = H$  и условиями на бесконечности  $\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \pm \infty$ . Условия на прослойке будут

$$\left[ \frac{\partial H_x}{\partial n} \right]_{z=\varphi(y)} = -\alpha \frac{\partial^2 H_x}{\partial \tau^2}$$

Рассмотрим функцию  $v$ :

$$H_x = v + \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH}$$

Тогда  $v$  удовлетворяет уравнению (4.02):

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

с граничными условиями  $v = 0$  при  $z = 0$  и  $v = 0$  при  $z = H$ , а также условием  $\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$  и

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{z=h} = -\alpha \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \right) \right]$$

Эту задачу тоже решаем методом интегральных уравнений. Функция источника задачи

$$\Delta u + k^2 u = 0; \quad u|_{z=0} = 0$$

имеет вид

$$G = \frac{i}{4} \{H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr_1)\}.$$

Тогда, используя II формулу Грина, получим интегральное уравнение

$$v(y_0, z_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial v}{\partial n_0} dy + \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \right) dl. \quad (4.03)$$

Помещая точку  $M_0$  последовательно на нижнюю поверхность слоя и на прослойку и расписывая (4.03), получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z_0} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z_0} \frac{\partial v}{\partial z} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial z_0} dl &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \frac{\partial G}{\partial z_0} dl; \\ \frac{\partial v}{\partial \tau_0} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_0 \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} dl - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \tau_0} \frac{\partial v}{\partial z} dy &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \tau_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} dl. \end{aligned}$$

Решив эту систему можно найти импеданс. Оценить влияние формы прослойки на магнито-теллурическое поле можно лишь путем сравнения численных результатов, полученных при решении этих двух задач на ЭВМ. В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. И. Дмитриеву и Е. В. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание.

Г. А. КОКОТУШКИН, Э. Л. ШИХАНОВИЧ

## МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ СО СКАЧКООБРАЗНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ МОЩНОСТИ

В областях с глубоким залеганием фундамента с краевыми прогибами, межгорными впадинами и т. д. магнито-теллурическое зондирование становится одним из основных методов разведки. Однако такие районы имеют достаточно сложную геологическую структуру, что требует выяснения влияния неоднородностей на магнито-теллурическое поле. В данной работе изучается поле неоднородно проводящего слоя в случае магнитной поляризации.

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дан слой со скачкообразным изменением мощности (рис. 1). Верхней границей слоя является плоскость  $z = 0$ . Ниж-

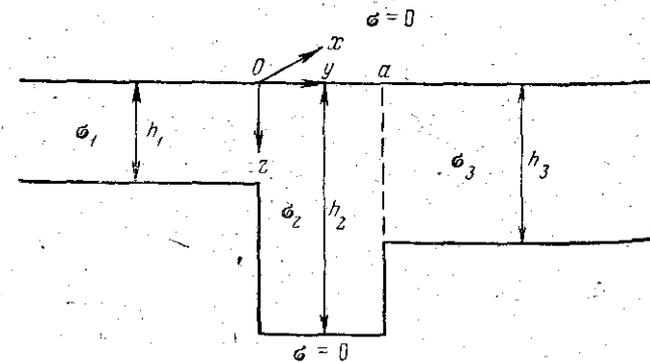


Рис. 1

няя граница слоя имеет вид

$$h(y) = \begin{cases} h_1, & y < 0, \\ h_2, & 0 < y < a, \\ h_3, & y > a. \end{cases}$$

Эту задачу тоже решаем методом интегральных уравнений. Функция источника задачи

$$\Delta u + k^2 u = 0; \quad u|_{z=0} = 0$$

имеет вид

$$G = \frac{i}{4} \{H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr_1)\}.$$

Тогда, используя II формулу Грина, получим интегральное уравнение

$$v(y_0, z_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial v}{\partial n_0} dy + \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \right) dl. \quad (4.03)$$

Помещая точку  $M_0$  последовательно на нижнюю поверхность слоя и на прослойку и расписывая (4.03), получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z_0} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z_0} \frac{\partial v}{\partial z} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial z_0} dl &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} \frac{\partial G}{\partial z_0} dl; \\ \frac{\partial v}{\partial \tau_0} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau_0 \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} dl - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \tau_0} \frac{\partial v}{\partial z} dy &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \tau_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\sin k(H-z)}{\sin kH} dl. \end{aligned}$$

Решив эту систему можно найти импеданс. Оценить влияние формы прослойки на магнито-теллурическое поле можно лишь путем сравнения численных результатов, полученных при решении этих двух задач на ЭВМ. В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. И. Дмитриеву и Е. В. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание.

Г. А. КОКОТУШКИН, Э. Л. ШИХАНОВИЧ

## МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ СО СКАЧКООБРАЗНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ МОЩНОСТИ

В областях с глубоким залеганием фундамента с краевыми прогибами, межгорными впадинами и т. д. магнито-теллурическое зондирование становится одним из основных методов разведки. Однако такие районы имеют достаточно сложную геологическую структуру, что требует выяснения влияния неоднородностей на магнито-теллурическое поле. В данной работе изучается поле неоднородно проводящего слоя в случае магнитной поляризации.

### § 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дан слой со скачкообразным изменением мощности (рис. 1). Верхней границей слоя является плоскость  $z = 0$ . Ниж-

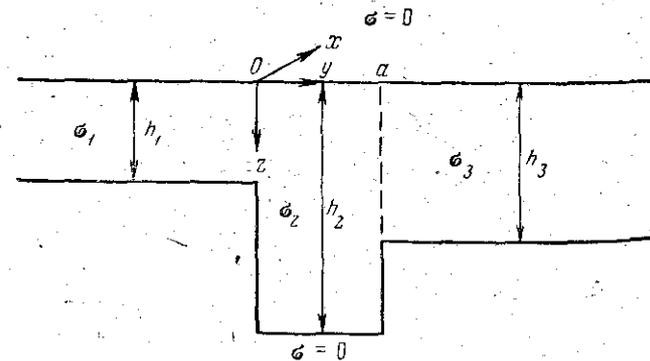


Рис. 1

няя граница слоя имеет вид

$$h(y) = \begin{cases} h_1, & y < 0, \\ h_2, & 0 < y < a, \\ h_3, & y > a. \end{cases}$$

(Без ограничения общности считаем всегда выполненным условие  $h_1 \leq h_3$ .)

Проводимость верхнего и нижнего полупространств (воздух и фундамент) считаем равной нулю. Проводимость слоя изменяется по закону, аналогичному изменению мощности слоя:

$$\sigma(y) = \begin{cases} \sigma_1, & y < 0, \\ \sigma_2, & 0 < y < a, \\ \sigma_3, & y > a, \end{cases}$$

$$0 < z < h(y).$$

Рассматриваются следующие структуры:

- 1) грабенообразное погружение ( $h_2 > h_3$ );
- 2) горстообразное поднятие ( $h_2 < h_1$ );
- 3) ступенчатое изменение мощности ( $h_1 < h_2 < h_3$ );
- 4) ступенчатое изменение мощности слоя, когда одна из его частей имеет бесконечную мощность ( $h_2 = h_3 = \infty$ ).

Исследуется случай магнитной поляризации, когда векторы электромагнитного поля имеют следующие компоненты:

$$\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}, \quad \vec{H} = \{H_x, 0, 0\}.$$

Составляющие векторов поля удовлетворяют уравнениям

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}; \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad (1)$$

$$\Delta H_x + k_j^2 H_x = 0, \quad (2)$$

где  $k_j^2 = i\omega^2 \mu_j \epsilon_j$  — волновое число соответствующего участка слоя, причем  $\text{Re } k_j > 0$ .

На границах слоя выполняются условия

$$\begin{aligned} H_x &= 1 \text{ при } z = 0, \\ H_x &= 0 \text{ при } z \geq h(y), \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} &\rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

При  $z = 0$  и  $z = a$  выполняются условия сшивания:

$$[H_x] = \left[ \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] = 0. \quad (4)$$

## § 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Согласно [1] представим поле  $H_x$  в виде суммы нормального и аномального полей:

$$H_x = \frac{\sin k_1(h_1 - z)}{\sin k_1 h_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\gamma_n^{(1)} y} \sin \frac{n\pi z}{h_1}, \quad y < 0; \quad (5)$$

$$H_x = \frac{\sin k_2(h_2 - z)}{\sin k_2 h_2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n e^{-\gamma_n^{(2)} y} + c_n e^{\gamma_n^{(2)}(y-a)}) \sin \frac{n\pi z}{h_2}, \quad 0 < y < a, \quad (6)$$

$$H_x = \frac{\sin k_3(h_3 - z)}{\sin k_3 h_3} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\gamma_n^{(3)}(y-a)} \sin \frac{n\pi z}{h_3}, \quad y > a, \quad (7)$$

где

$$\gamma_n^{(i)} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_i}\right)^2 - k_i^2}, \quad \text{Re } \gamma_n^{(i)} > 0.$$

Из условий (4) имеем

$$H_x|_{y=0-0} = H_x|_{y=0+0}, \quad 0 < z < \max(h_1, h_2); \quad (8)$$

$$\rho_{21} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_{y=0-0} = \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_{y=0+0}, \quad 0 < z < \min(h_1, h_2); \quad (9)$$

$$H_x|_{y=a-0} = H_x|_{y=a+0}, \quad 0 < z < \max(h_2, h_3); \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_{y=a-0} = \rho_{23} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_{y=a+0}, \quad 0 < z < \min(h_2, h_3), \quad (11)$$

где

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \frac{x_i^2}{x_j^2}.$$

Подставляя (5—7) в условия (8—11) и сделав преобразование Фурье, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  и  $d_n$ . Выражая коэффициенты  $a_n$  и  $d_n$  через  $b_n$  и  $c_n$  и положив  $a_{N+1} = b_{N+1} = c_{N+1} = d_{N+1} = \dots = 0$ , окончательно получим:

1)  $h_2 > h_3$

$$b_m + \rho_{12} \nu_{21} \sum_{k=1}^N b_k P_{km}^{12} + c_m e^{-\gamma_m^{(2)} a} - \rho_{12} \nu_{21} \sum_{k=1}^N c_k e^{-\gamma_k^{(2)} a} P_{km}^{12} = \frac{2}{h_2} (A_m^{12} - A_m^{22}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} b_m e^{-\gamma_m^{(2)} a} - \rho_{23} \nu_{23} \sum_{k=1}^N b_k e^{-\gamma_k^{(2)} a} P_{km}^{32} + c_m + \rho_{23} \nu_{23} \sum_{k=1}^N c_k P_{km}^{32} = \\ = \frac{2}{h_3} (A_m^{32} - A_m^{22}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$a_n = \frac{[\rho_{12} v_{21}]}{\gamma_n^{(1)}} \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(2)} (-b_k + c_k e^{-\gamma_k^{(2)} a}) \alpha_{kn}^{12}, \quad (14)$$

$$d_n = -\frac{\rho_{12} v_{23}}{32 \gamma_n^{(3)}} \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(2)} (-b_k e^{-\gamma_k^{(2)} a} + c_k) \alpha_{kn}^{32}; \quad (15)$$

2)  $h_2 < h_1$

$$b_m + \frac{\rho_{21} v_{12}}{\gamma_m^{(2)}} \sum_{k=1}^N b_k Q_{km}^{21} - c_m e^{-\gamma_m^{(2)} a} + \frac{\rho_{21} v_{12}}{\gamma_m^{(2)}} \sum_{k=1}^N c_k e^{-\gamma_k^{(2)} a} Q_{km}^{21} =$$

$$= -\frac{2}{h_1} \frac{\rho_{21} v_{12}}{\gamma_m^{(2)}} \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(1)} \alpha_{km}^{21} (A_k^{21} - A_k^{11}), \quad (16)$$

$$-b_m e^{-\gamma_m^{(2)} a} + \frac{\rho_{23} v_{32}}{\gamma_m^{(2)}} \sum_{k=1}^N b_k e^{-\gamma_k^{(2)} a} Q_{km}^{23} + c_m + \frac{\rho_{23} v_{32}}{\gamma_m^{(2)}} \sum_{k=1}^N c_k Q_{km}^{23} =$$

$$= -\frac{2}{h_2} \frac{\rho_{23} v_{32}}{\gamma_m^{(2)}} \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(3)} \alpha_{km}^{23} (A_k^{23} - A_k^{33}), \quad (17)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^N (b_k + c_k e^{-\gamma_k^{(2)} a}) \alpha_{nk}^{21} + \frac{2}{h_1} (A_n^{21} - A_n^{11}), \quad (18)$$

$$d_n = \sum_{k=1}^N (b_k e^{-\gamma_k^{(2)} a} + c_k) \alpha_{nk}^{23} + \frac{2}{h_2} (A_n^{23} - A_n^{33}); \quad (19)$$

3)  $h_1 < h_2 < h_3$ .

В этом случае для коэффициентов  $b_m$  и  $c_m$  имеем уравнения (12) и (17), а коэффициенты  $a_n$  и  $d_n$  получаются из (14) и (19) соответственно.

В выражениях (12—19) использованы следующие обозначения:

$$v_{ij} = \frac{h_i}{h_j},$$

$$A_m^{ij} = \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{h_j}\right)^2 - k_i^2} \left[ \frac{m\pi}{h_j} - \frac{k_i \sin m\pi v_{ij}}{\sin k_i h_i} \right],$$

$$\alpha_{mn}^{ij} = \frac{2(-1)^{n+1} \sin m\pi v_{ij} n v_{ij}}{\pi \left[ \left(\frac{n}{m}\right)^2 - v_{ij}^2 \right] m^2},$$

$$P_{km}^{ij} = \gamma_k^{(j)} \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_{kn}^{ij} \alpha_{nm}^{ij}}{\gamma_n^{(i)}},$$

$$Q_{km}^{ij} = \sum_{n=1}^N \gamma_n^{(i)} \alpha_{nk}^{ij} \alpha_{nm}^{ij}.$$

Особенно простой результат получается при  $h_1 = h_3$  и  $\sigma_1 = \sigma_3$ . В этом случае появляется возможность исключить две системы неизвестных коэффициентов, используя симметрию задачи. Поместив начало координат над центром неоднородности, решение представляется в виде

$$H_x = \frac{\sin k_1 (h_1 - z)}{\sin k_1 h_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\gamma_n^{(1)} |y|} \sin \frac{n\pi z}{h_1}, \quad |y| > \frac{a}{2},$$

$$H_x = \frac{\sin k_2 (h_2 - z)}{\sin k_2 h_2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{ch} \gamma_n^{(2)} y \sin \frac{n\pi z}{h_2}, \quad |y| < \frac{a}{2}.$$

Аналогично предыдущему легко получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $b_n$ .

### § 3. СТУПЕНЧАТОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ ПРИ БЕСКОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ ОДНОЙ ИЗ ЕГО ЧАСТЕЙ

Рассмотрим теперь слой, в котором одна из частей имеет бесконечную мощность (рис. 2).

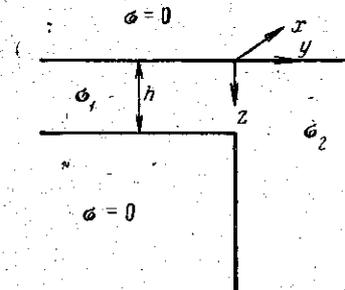


Рис. 2

Электромагнитное поле описывается уравнениями (1—2), а условия на границах задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_x &= 1 \text{ при } z = 0, \\ H_x &= 0 \text{ при } z \geq h, \quad y \leq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$H_x \text{ и } \frac{\partial H_x}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty.$$

При  $y = 0$  должны выполняться условия сопряжения

$$\begin{aligned} H_x|_{y=0} &= H_x|_{y=+0}, \quad 0 < z < \infty, \\ \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Big|_{y=+0}, \quad 0 < z < h. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично предыдущему представим поле  $H_x$  в следующем виде:

$$H_x = \begin{cases} \frac{\sin k_1(h-z)}{\sin k_1 h} + v(y, z), & y < 0, \\ e^{ik_2 z} + w(y, z), & y > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Для функций  $v$  и  $w$  имеем следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned} \Delta v + k_1^2 v &= 0, \\ v &= 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = h, \quad y < 0, \\ v \text{ и } \frac{\partial v}{\partial y} &\rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta w + k_2^2 w &= 0, \\ w &= 0 \text{ при } z = 0, \quad y > 0, \\ w, \frac{\partial w}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial w}{\partial z} &\rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$r = \sqrt{y^2 + z^2},$$

с условиями сопряжения при  $y = 0$ :

$$w(0, z) = \begin{cases} v(0, z) + \frac{\sin k_1(h-z)}{\sin k_1 h} - e^{ik_2 z}, & 0 < z < h, \\ -e^{ik_2 z}, & z > h, \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{\partial w(0, z)}{\partial y} = \rho_{21} \frac{\partial v(0, z)}{\partial y}. \quad (26)$$

Методом разделения переменных для  $v$  получим

$$v(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\Gamma_n y} \sin \frac{n\pi z}{h}, \quad (27)$$

где

$$\Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - k_1^2}, \quad \operatorname{Re} \Gamma_n > 0.$$

Для решения уравнения (24) применим к  $w(y, z)$  преобразование Фурье:

$$W(y, q) = \int_0^{\infty} w(y, z) \sin qz dz,$$

тогда

$$w(y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} W(y, q) \sin qz dq. \quad (28)$$

Для  $W(y, q)$  получаем уравнение

$$W_{yy} - (q^2 - k_2^2)W = 0.$$

Учитывая граничные условия и (28) имеем

$$w(y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma y} \sin qz dq \int_0^{\infty} w(0, t) \sin qt dt, \quad (29)$$

где

$$\gamma = \sqrt{q^2 - k_2^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0.$$

Подставив в (29) равенства (25) и (27), получим

$$\begin{aligned} w(y, z) &= \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n a_n \int_0^{\infty} e^{-\gamma y} \frac{\sin qz \sin qh}{q^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} dq - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma y} \sin qz \left[ \frac{k_1}{\sin k_1 h} \frac{\sin qh}{q^2 - k_1^2} - q \frac{k_1^2 - k_2^2}{(q^2 - k_1^2)(q^2 - k_2^2)} \right] dq. \end{aligned} \quad (30)$$

Умножив обе части (26) на  $\sin \frac{m\pi z}{h}$  и проинтегрировав от нуля до  $h$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_n$ :

$$a_m + \frac{4\pi\rho_{12}}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{mn} = \frac{4\rho_{12}}{h^2} T_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$K_{mn} = \frac{(-1)^{m+n} mn}{\Gamma_m} \int_0^{\infty} \frac{\gamma \sin^2 qhdq}{\left[q^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right] \left[q^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right]},$$

$$T_m = \frac{m(-1)^m}{\Gamma_m} \int_0^\infty \frac{\gamma \sin qh}{q^2 - \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} \left[ \frac{k_1 \sin qh}{\sin k_1 h (q^2 - k_1^2)} - q \frac{k_1^2 - k_2^2}{(q^2 - k_1^2)(q^2 - k_2^2)} \right] dq.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокотушкин Г. А., Дмитриев В. И. Магнито-теллурическое поле в слое со ступенчатым изменением толщины слоя. «Прикладная геофизика», 1968, вып. 52.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

А. В. ЗАХАРОВ, А. А. САМАРСКИЙ, А. Г. СВЕШНИКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БОЛЬШИХ ЧАСТИЦ К РАСЧЕТУ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ПУЧКА

При исследовании многих электронных приборов, особенно в случае больших мощностей, возникает задача расчета движения пучка заряженных частиц во внешнем электрическом и магнитном полях с учетом собственного пространственного заряда пучка. Уже в двумерном случае даже при простейшей геометрии поля аналитическое решение соответствующей самосогласованной задачи сопряжено с большими трудностями и конкретные результаты удается получить, используя лишь численные методы.

В настоящей работе для решения нестационарной задачи используется метод больших частиц. Рассмотрение проводится на примере некоторой модельной задачи с целью выяснения ряда методических вопросов, в частности связанных с выбором численного метода определения плотности заряженных частиц.

§ 1. МЕТОД РАСЧЕТА

1°. В двумерной области  $G$  рассматривается задача расчета движения заряженных частиц одного сорта во внешних электрическом и магнитном полях. Частицы будем считать нерелятивистскими, тогда магнитным полем, возникающим при движении зарядов, можно пренебречь. Предположим, что плотность частиц невелика, так что можно пренебречь столкновениями частиц между собой. Тогда задача сводится к совместному решению уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{1.1}$$

для потенциала  $\varphi(\vec{r}, t)$  электрического поля и кинетического уравне-