

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(численные методы
в задачах электродинамики)

XXVIII

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
В. И. ДМИТРИЕВА и А. С. ИЛЬИНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1978

Из содержания Т.28, 1978г.,

<i>Е. В. Захаров.</i> Об интегродифференциальных уравнениях в задачах дифракции на экранах.	99
<i>А. В. Чечкин.</i> Многопараметрический метод регуляризации.	162
<i>Е. В. Захаров.</i> Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией.	232
<i>Н. И. Несмеянова.</i> Интегральные уравнения осесимметричных задач теории электромагнитного каротажа.	239
<i>Е. В. Захаров.</i> Метод частичного обращения оператора в задачах электромагнитного каротажа.	245
<i>А. С. Барашков, В. И. Дмитриев.</i> Разрешимость обратных задач вертикального зондирования ионосферы в слоистой модели.	251

Е. В. ЗАХАРОВ

ОБ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ЭКРАНАХ

Задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих бесконечно тонких экранах произвольной формы, как известно, может быть сведена к интегродифференциальному уравнению первого рода [1]. Численное решение уравнений такого типа наталкивается на трудности, связанные с необходимостью аппроксимации дифференциального оператора, удовлетворения условиям на ребре экрана и неустойчивостью решения. Преодоление этих трудностей состоит в преобразовании интегродифференциальных уравнений и построении устойчивых методов и алгоритмов численного решения интегральных уравнений 1-го рода для соответствующего класса ядер.

С вычислительной точки зрения достаточно эффективным оказалось разбиение интегродифференциального уравнения на дифференциальное и интегральное уравнения при условии, что дифференциальное уравнение решается в квадратурах. Такое преобразование проведено в [2] для идеально проводящей полосы, а для произвольного плоского экрана — в [3]. При этом интегральное уравнение 1-го рода имеет интегрируемую особенность при совпадении аргументов и может быть решено численно методом саморегуляции [4]. Отметим, что к уравнению такого же типа приводит и метод Г. А. Гринберга [5], основанный на исследовании задач для скалярного и векторного потенциалов. Метод был первоначально развит для произвольных плоских экранов, а сравнительно недавно обобщен Ю. В. Пименовым на случай цилиндрических криволинейных экранов [6, 7].

В настоящей работе предлагается общий метод перехода от интегродифференциальных уравнений к «чисто» интегральным уравнениям, решаемых совместно с условиями на ребре. Рассмотрение проведено для плоской (скалярной) задачи, но метод допускает обобщение на пространственный (электромагнитный) случай.

Пусть в плоскости XOY задан достаточно гладкий конечный незамкнутый контур Γ . Задача состоит в том, чтобы найти функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta_{x,y} v + k^2 v = 0 \quad (k - \text{параметр, } \text{Im } k \geq 0); \quad (1)$$

краевому условию на контуре Γ :

$$\frac{\partial}{\partial n} v(x, y)|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial n} v_0(x, y)|_{\Gamma} \quad (M \in \Gamma, v_0 - \text{заданная функция}); \quad (2)$$

условиям на ребре (в окрестности концевых точек контура Γ) типа:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \text{ grad } v = 0, \quad (3)$$

(ρ — радиус малой окружности, охватывающей концевую точку); условию излучения на бесконечности:

$$v(M) \sim e^{i\beta r} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial r} - ikv \approx o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) e^{-i\beta r} \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (\beta \equiv \text{Im } k). \quad (4)$$

Поставленная задача (1)–(4) имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера [4]. Эта задача будет сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода, допускающего численное решение методом саморегуляции.

Пусть $G(M, M_0) = H_0^{(1)}(kr_{MM_0})$ — фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям излучения (4). Вводя замкнутый контур S , охватывающий контур Γ , получим интегральное представление функции $v(M)$ вне контура S . Применим формулу Грина к функциям $v(M_0)$ и $G(M, M_0)$ по точке M_0 вне области, ограниченной контуром S . Получим следующее интегральное представление функции $v(M)$:

$$v(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ v \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}} - \frac{\partial v}{\partial n} G \right\} dl_{M_0}. \quad (5)$$

Устремив контур S к контуру Γ , приходим к интегральному представлению

$$v(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ [v] \frac{\partial G}{\partial n} - \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] G \right\} dl_{M_0}, \quad (6)$$

где квадратными скобками обозначены скачки функций на контуре Γ . В силу граничного условия (2) скачок $\left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] = 0$ и окончательно

$$v(M) = \int_{\Gamma} \psi(M_0) \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}}(M, M_0) dl_{M_0}, \quad (7)$$

где $\psi \equiv \frac{1}{2\pi} [v]$ имеет физический смысл плотности тока, направляемого на поверхности S . Представление (7) удовлетворяет всем условиям граничной задачи для $v(M)$, за исключением условия (2) на контуре Γ . Удовлетворяя этому условию, приходим к интегральному уравнению

$$\lim_{M \rightarrow \Gamma} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{\Gamma} \psi(M_0) \frac{\partial G}{\partial n_{M_0}}(M, M_0) dl_{M_0} = - \frac{\partial v_0(M)}{\partial n_M} \Big|_{\Gamma}. \quad (8)$$

Функция $G(M, M_0)$ имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов, поэтому вносить непосредственно операцию дифференцирования под знак интеграла нельзя, ибо интеграл в (8) потеряет смысл. Тем не менее с использованием условий на ребре, которые в данном случае сводятся к обращению в нуль функции $\Psi(M)$ на концах контура Γ [2], можно преобразовать уравнение (8) в интегродифференциальное уравнение относительно функции Ψ и ее производной вдоль контура Γ . С точки зрения численных методов решения уравнения (8) такое преобразование нецелесообразно.

Здесь проведены другие преобразования уравнения (8), приводящие к «число» интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с логарифмической особенностью и сформулированы условия на класс контуров Γ , для которых возможны такие преобразования.

Заметим, что фундаментальное решение $G(M, M_0)$ зависит только от расстояния между точками M и M_0 . Поэтому возможно следующее тождественное преобразование интеграла в уравнении (8):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{\Gamma} \psi(M_0) \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) dl_{M_0} = \\ & = - \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} \int_{\Gamma} \psi(M_0) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) dl_{M_0} + \int_{\Gamma} \Psi(M_0) \frac{\partial}{\partial n_M} \times \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial n_M} + \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \right) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) dl_{M_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Это преобразование позволило заменить производную по точке M_0 на производную по точке M . При этом второй интеграл в (9) допускает дифференцирование под знаком интеграла.

Рассмотрим отдельно выражение

$$- \frac{\partial^2}{\partial n_M^2} \int_{\Gamma} \Psi(M_0) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) dl_{M_0}, \quad (10)$$

где оператор дифференцирования действует только на функцию Ханкеля, которая удовлетворяет на плоскости XOY уравнению Гельмгольца с параметром k , т. е.

$$\Delta H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) + k^2 H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) = 0 \quad (M \neq M_0).$$

Введем на плоскости XOY ортогональную криволинейную систему координат q, τ таким образом, чтобы контур Γ совпадал с частью координатной поверхности $q = \text{const}$. Параметризуем кривую Γ , введя натуральный параметр τ — длину дуги этой кривой. Тогда $dl = h_\tau d\tau$ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$), $h_\tau = h_\tau(q, \tau)$ — коэффициент Ламе, соответствующий переменной τ , а интеграл (10) примет вид

$$-\frac{\partial^2}{\partial q^2} \int_\alpha^\beta \Psi(t) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) h_t(q_0, t) dt,$$

где $M(x(q, \tau), y(q, \tau))$, $M_0(x(q_0, t), y(q_0, t))$.

Во введенной системе координат q, τ оператор Гельмгольца имеет вид:

$$\Delta + k^2 \equiv \frac{1}{h_\tau h_q} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{h_\tau}{h_q} \frac{\partial}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{h_q}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \right\} + k^2. \quad (11)$$

Из выражения (11) можно выразить $\frac{\partial^2}{\partial q^2}$:

$$-\frac{\partial^2}{\partial q^2} = h_q^2 \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{h_\tau}{h_q} \right) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{h_q}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{h_q}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + k^2 h_q^2.$$

С учетом приведенных преобразований уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \frac{h_q}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{h_q}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + k^2 h_q^2 \right\} \int_\alpha^\beta \psi(t) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) h_t(q_0, t) dt = -\frac{\partial v_0}{\partial n} - h_q^2(t, q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{h_\tau}{h_q} \right) \int_\alpha^\beta \Psi(t) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) q_t(q_0, t) dt \equiv f(\tau). \quad (12)$$

Если известны два линейно-независимых решения однородного дифференциального уравнения:

$$\frac{h_q}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left(\frac{h_q}{h_\tau} \right) \frac{\partial W}{\partial \tau} \right\} + k^2 h_q^2 W(\tau) = 0, \quad (13)$$

то задача решения уравнения (12) распадается на две части. Сначала необходимо найти общее решение уравнения (13) с правой частью $f(\tau)$, а затем решить «чисто» интегральное уравнение с условиями обращения в нуль его решения на концах $t = \alpha$ и $t = \beta$. Действительно, пусть

$$W(\tau) = C_1 \psi_1^0(\tau) + C_2 \psi_2^0(\tau) + F(\tau),$$

где ψ_1^0 и ψ_2^0 — линейно-независимые решения уравнения (13), C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $F(\tau)$ — ограниченное (при $\alpha \leq t \leq \beta$) частное решение неоднородного уравнения (13) с правой частью $f(\tau)$. Сравнивая выражения (12) и (13), получим

$$\int_\alpha^\beta \psi(t) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) h_t(q_0, t) dt = C_1 \Psi_1^0 + C_2 \Psi_2^0 + F(\tau), \quad (14)$$

где выражение $F(\tau)$ содержит известные функции и интегральные операторы с регулярными ядрами на отрезке $[\alpha, \beta]$ от искомой функций $\Psi(t)$, т. е.

$$F(\tau) = F_0(\tau) - \int_\alpha^\beta K(\tau, t) \Psi(t) h_t(t) dt.$$

Окончательно интегральное уравнение приобретает вид

$$\int_\alpha^\beta \Psi(t) H_0^{(1)}(kr_{MM_0}) h_t dt + \int_\alpha^\beta K(\tau, t) \Psi(t) h_t dt = F_0(\tau) + C_1 \Psi_1^0(\tau) + C_2 \Psi_2^0(\tau), \quad (15)$$

где постоянные C_1 и C_2 необходимо найти из условия $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta) = 0$.

Таким образом, исходное интегродифференциальное уравнение преобразовано в «чисто» интегральное уравнение, ядро которого имеет логарифмическую особенность. Основное дополнительное условие на контур Γ состоит в том, чтобы уравнение (13), рассматриваемое на этом контуре, должно допускать построение в аналитической форме двух линейно-независимых решений и резольвенты. Для широкого класса контуров Γ (например, отрезок прямой, часть окружности, эллипса, параболы, угла и т. п.) такое построение возможно и может быть эффективно проведено.

ЛИТЕРАТУРА

- Maue A.-W. Lur Formulierung eines allgemeinen Beugungs problems durch eine Integralgleichung. — „Zeitschrift für Physik“, 1949, 126.
- Хенл, Мауэ, Веспфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
- Свешников А. Г., Репин В. М. Численное решение задачи об электромагнитной связи прямоугольных волноводов через отверстия. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 20. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
- Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 10. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.
- Гринберг Г. А., Пименов Ю. В. К вопросу о дифракции тонких идеально проводящих плоских экранов. — ЖТФ, 1957, вып. 10, т. 27.
- Пименов Ю. В. К дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах. — «Труды МЭИС», 1970, вып. 1.
- Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Методы расчета электромагнитных полей в задачах дифракции на идеально проводящих поверхностях. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 20. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.

А. В. ЧЕЧКИН

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается новый метод решения системы двухсторонних функциональных неравенств, часто встречающихся в прикладной математике. Особенностью метода является наличие управляющих параметров, целенаправленным перебором которых происходит формирование значений основных функционалов.

1. Исследование многих прикладных вопросов в рамках соответствующих математических моделей приводит к требованиям представляющим систему двухсторонних неравенств на действительные функционалы $\Phi_m(x)$ в некотором банаховом пространстве X :

$$\gamma_m \leq \Phi_m(x) \leq \Gamma_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1)$$

где γ_m, Γ_m — конечные или бесконечные действительные числа. Система (1) отражает многокритериальный подход к прикладным вопросам.

Определение 1. Если существуют $x \in X$, удовлетворяющие системе (1), то задачу нахождения какого-либо решения системы (1) назовем задачей простого синтеза.

Определение 2. Пусть $W \neq \emptyset$ — множество всех решений системы (1). Наряду с функционалами $\Phi_m(x)$ рассмотрим еще один $\varphi(x)$, который назовем функционалом качества. Задачу нахождения $x_0 \in W$ с экстремальным качеством, т. е. $\inf \{\varphi(x)\}$, назовем задачей оптимального синтеза относительно качества $\varphi(x)$.

Часто полученное решение задачи простого синтеза является не-удовлетворительным с той или иной точки зрения. С другой стороны, задача оптимального синтеза часто является не оправданно трудоемкой как для теоретического исследования, так и при практическом ее решении. Таким образом, реально приходится

решать некоторую промежуточную задачу между задачами простого и оптимального синтеза. Ее можно сформулировать следующим образом.

Определение 3. Пусть $W \neq \emptyset$ — множество всех решений системы (1). Выделим из W подмножество $V \subset W$, которое назовем подмножеством реализуемых вариантов. Задачу отыскания некоторого варианта назовем задачей реального синтеза.

Ясно, что задача реального синтеза включает как частные случаи задачу простого синтеза при $V = W$ и задачу оптимального синтеза при соответствующем определении подмножества вариантов V .

Развиваемый далее в статье многопараметрический метод решает задачу реального синтеза. Подмножеством V там является так называемые регуляризованные элементы, о которых пойдет речь ниже.

2. Рассмотрим идею многопараметрического метода. Функционалы $\Phi_m(x)$, $m = 1, \dots, M$, входящие в систему (1), назовем основными, или определяющими. В зависимости от вида этих функционалов, т. е. какие они: квадратичные, дробно-квадратичные или др., поставим специальную многопараметрическую корректную задачу R . Эту задачу назовем регуляризатором, а ее решение при фиксированном наборе входящих в R параметров, — регуляризованным элементом пространства X . Таким образом, регуляризованные элементы зависят от значений управляющих параметров $u = (u_1, u_2, \dots)$. Кроме этого на регуляризованные элементы влияет тип самого регуляризатора R , который конструируется в зависимости от основных функционалов $\Phi_m(x)$, $m = 1, \dots, M$, и, если это требуется для корректности R , то привлекается дополнительный так называемый сглаживающий, или стабилизирующий, функционал. При конструировании R стремятся, чтобы при фиксированных значениях управляющих параметров алгоритм нахождения регуляризованного элемента $x = x(u_1, u_2, \dots)$ был прост и чтобы, меняя (u_1, u_2, \dots) из некоторой области их допустимых значений, можно было бы формировать требуемые значения основных функционалов (1). Поиск самого решения задачи реального синтеза происходит путем целенаправленного перебора управляющих параметров. На таком переборе лежит основная тяжесть решения задачи синтеза. Сам перебор может происходить в режиме диалога человека с ЭВМ или в автономном режиме, когда происходит автоматический перебор параметров по некоторому поисковому алгоритму. При этом предполагается широкое применение всевозможных периферийных устройств, таких, как дисплей, световое табло и т. п. В перспективе все это должно привести к созданию разного рода автоматизированных систем проектирования, исследования, обработки наблюдений и т. п.

Идея использования при решении одной задачи другой вспомогательной многопараметрической задачи и тем самым сведение поиска решения в пространстве меньшего измерения, т. е. идея работы с параметрами, известна еще со времен Лагранжа. Особенно плодотворной она оказалась для решения некорректно поставленных задач. Так, в случае одного основного функционала — невязки

$$\gamma \leq \|A[x] - \tilde{y}\|_Y^2 \leq \Gamma, \quad x \in X, \quad (2)$$

где A — линейный оператор, X, Y — банаховы пространства, A^{-1} — неограничен, был разработан однопараметрический метод регуляризации А. Н. Тихонова, обобщением которого является наш многопараметрический метод.

По-видимому, многопараметрический метод наиболее эффективен при решении так называемых многокритериальных задач, часто встречаемых в прикладной математике [1].

§ 2. МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯРИЗАТОР

1. Ограничимся рассмотрением банахова пространства X с определенными на нем основными $\Phi_m(x)$, $m=1, \dots, M$, и дополнительным $\Omega(x)$, $x \in X$, функционалами следующего вида:

$$\Phi_m(x) = P_m(x, x) - 2\operatorname{Re} p_m(x), \quad (3)$$

$$\Omega(x) = Q(x, x) - 2\operatorname{Re} q(x),$$

где $P_m(x, x)$, $Q(x, x)$ — однородные эрмитовые квадратичные функционалы на X , удовлетворяющие неравенствам

$$b_m \|x\|_X^2 \leq P_m(x, x) \leq B_m \|x\|_X^2, \quad (4)$$

$$c \|x\|_X^2 \leq Q(x, x) \leq C \|x\|_X^2,$$

$b_m \geq 0$, $B_m > 0$, $c > 0$, $C > 0$ — действительные числа, причем B_m могут быть бесконечностями; $p_m(x)$, $q(x)$ — линейные ограниченные функционалы на X .

Будем строить для квадратичных функционалов вида (3) регуляризатор согласно общей схеме первого параграфа.

Регуляризатор, использующий основные функционалы $\Phi_m(x)$, $m=1, \dots, M$, и дополнительный $\Omega(x)$, может быть основан на различных алгоритмах. Используем алгоритм, являющийся обобщением следующего регуляризующего алгоритма А. Н. Тихонова для невязки:

$$R: \inf_{x \in X} \{u \|A[x] - \tilde{y}\|_Y^2 + \|x\|_X^2\}, \quad u > 0. \quad (5)$$

Здесь основной функционал $\Phi(x) = \|A[x] - \tilde{y}\|_Y^2$ — невязка, или уклонение, где A — вполне непрерывный оператор. Дополнительный функционал $\Omega(x) = \|x\|_X^2$ — так называемый сглаживающий функционал. Управляющий параметр $u=1/\alpha$, где $\alpha > 0$, — регуляризующий параметр. Выбор параметра α происходит в зависимости от величины основного функционала — невязки [2, 3].

Обобщение будем вести в двух направлениях. Во-первых, по числу основных функционалов и, во-вторых, по виду дополнительного функционала.

Итак, наш регуляризатор будем основывать на многопараметрической задаче

$$R: \inf_{x \in X} \left\{ \sum_{m=1}^M u_m \Phi_m(x) + \Omega(x) \right\}, \quad (6)$$

где u_m — неопределенные действительные параметры.

Определение 4. Параметры задачи (6) при основных функционалах назовем управляющими. Множество U значений u_m , при которых существует единственное решение задачи (6), назовем областью допустимых значений управляющих параметров. Очевидно, оно будет M -мерной областью.

Исследуем вопрос о корректности задачи (6). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть основные функционалы $\Phi_m(x)$, $m=1, \dots, M$, и дополнительный $\Omega(x)$ являются квадратичными функционалами в X вида (3).

Тогда для тех и только тех значений управляющих параметров u_m , для которых однородный квадратичный функционал

$$\Psi(x, x) = \sum_{m=1}^M u_m P_m(x, x) + Q(x, x) \quad (7)$$

будет положительным в X , т. е. для любого $x \neq 0$, $\Psi(x, x) > 0$, существует единственное решение задачи (6).

Доказательство. Определим гильбертово пространство W с помощью нормы

$$\|x\|_W^2 = (x, x)_W = \Psi(x, x). \quad (8)$$

Это можно сделать, так как $\Psi(x, x)$ — положительный, однородный, эрмитов функционал. По теореме Рисса о виде линейных ограниченных функционалов в гильбертовом пространстве.

$$\sum_{m=1}^M u_m p_m(x) + q(x) = (x, v)_W, \quad (9)$$

где $v(u_1, \dots, u_M)$. В силу (9) и (8) задача (6) с точностью до не-
 существенной аддитивной постоянной переписывается в виде

$$\inf_{x \in W} \{ \|x - v\|_W^2 \}, \quad (10)$$

откуда следует утверждение теоремы в одну сторону.

Докажем утверждение теоремы в другую сторону. Пусть u_m , $m=1, \dots, M$, таковы, что существует решение задачи (6). Надо доказать, что функционал $\Psi(x, x)$ — положительный (7). Предположим обратное. Тогда существует $x_0 \in X$, для которого $\Psi(x_0, x_0) < 0$. Следовательно, для элементов $kx_0 \in X$, где $k > 0$ — произвольный множитель, величина

$$\begin{aligned} \Psi(kx_0, kx_0) - 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^M u_m p_m(kx_0) + q(kx_0) \right] = \\ = k^2 \Psi(x_0, x_0) - k 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^M u_m p_m(x_0) + q(x_0) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

может быть сделана меньше любого числа. Поэтому не существует минимума (6). Этим противоречием заканчивается доказательство теоремы.

Для корректности задачи (6) кроме теоремы 1 надо исследовать вопрос, когда минимизирующая последовательность задачи (6) сходится в X . Ясно, что корректности мы добьемся, если от квадратичного функционала (7) потребуем положительной определенности, т. е. для любого $x \in X$ должно выполняться неравенство

$$\sum_{m=1}^M u_m P_m(x, x) + Q(x, x) \geq d \cdot \|x\|_X^2, \quad d > 0. \quad (12)$$

В этом случае гильбертово пространство W (8) будет вложено в X .

Замечание 1. Областью U допустимых значений управляющих параметров u_m , $m=1, \dots, M$, будет множество M -мерных точек $u = (u_1, \dots, u_M)$, для каждой из которых существует $d > 0$, такое, что выполняется (12). Так как дополнительный функционал $\Omega(x)$ вида (3) таков, что имеет место (4), т. е.

$$Q(x, x) \geq c \|x\|_X^2, \quad c > 0, \quad (13)$$

то область U содержит начало координат, т. е. точку с координатами $u_m = 0$, $m=1, \dots, M$. Это очень удобно при численных реализациях.

2. Исследуем область допустимых значений управляющих параметров. Имеет место очевидное неравенство

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} \left\{ \frac{\Psi(x, x)}{\|x\|_X^2} \right\} = \inf_{x \in X} \left\{ \sum_{m=1}^M u_m \frac{P_m(x, x)}{\|x\|_X^2} + \frac{Q(x, x)}{\|x\|_X^2} \right\} \geq \\ \geq \sum_{m=1}^M \inf_{x \in X} \left\{ u_m \frac{P_m(x, x)}{\|x\|_X^2} \right\} + \inf_{x \in X} \left\{ \frac{Q(x, x)}{\|x\|_X^2} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, для положительной определенности $\Psi(x, x)$ [см. (12)] достаточно, чтобы

$$\sum_{m=1}^M \inf_{x \in X} \left\{ \frac{u_m P_m(x, x)}{\|x\|_X^2} \right\} + \inf_{x \in X} \left\{ \frac{Q(x, x)}{\|x\|_X^2} \right\} > 0. \quad (15)$$

В силу (4) нетрудно конструктивно описать множество точек U , т. е. $u = u_1, \dots, u_M$, удовлетворяющих (15). Это будет часть M -мерного пространства, содержащая начало координат, границами которой служат гиперплоскости, определяемые набором знаков параметров u_m . Короче говоря, область допустимых значений U управляющих параметров будет объединением следующих множеств:

$$U_{++++} = \left\{ u : u_m \geq 0; m=1, \dots, M; \sum_{m=1}^M u_m b_m + c > 0 \right\},$$

$$U_{-+++} = \left\{ u : u_1 \leq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_M \geq 0; u_1 B_1 + \sum_{m=2}^M u_m b_m + c > 0 \right\}$$

и т. д. (16)

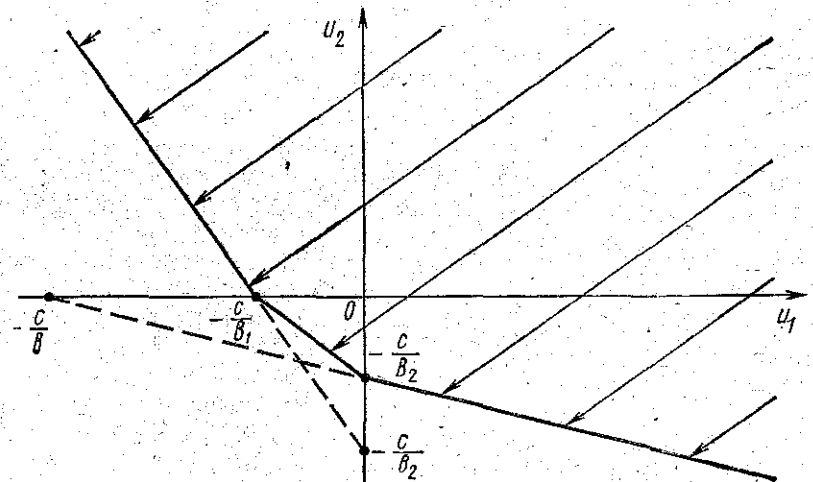


Рис. 1

В выражениях (16) для положительных параметров u_m коэффициентом служит b_m , а для отрицательных — B_m (4).

Для ясности продемонстрируем сказанное для двумерного случая, т. е. $M=2$. Тогда U представляет объединение множеств

$$\begin{aligned} U_{++} &= \{(u_1, u_2) : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0; u_1 b_1 + u_2 b_2 + c > 0\}, \\ U_{-+} &= \{(u_1, u_2) : u_1 \leq 0, u_2 \geq 0; u_1 B_1 + u_2 b_2 + c > 0\}, \\ U_{--} &= \{(u_1, u_2) : u_1 \leq 0, u_2 \leq 0; u_1 B_1 + u_2 B_2 + c > 0\}, \\ U_{+-} &= \{(u_1, u_2) : u_1 \geq 0, u_2 \leq 0; u_1 b_1 + u_2 B_2 + c > 0\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Область U в этом случае изображена на рис. 1. Видно, что любой из управляющих параметров может принимать даже большие от-

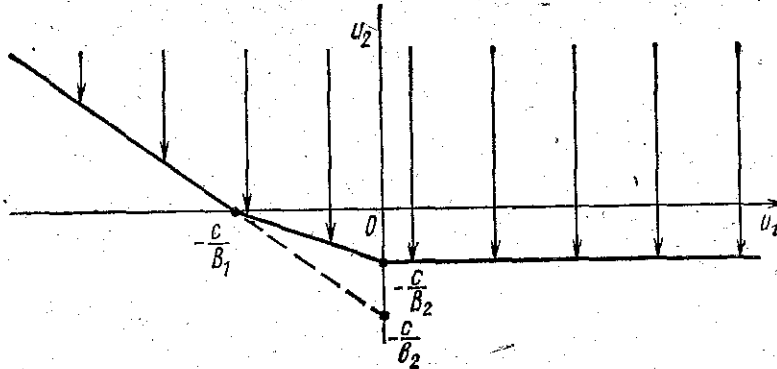


Рис. 2

рицательные значения при соответствующем изменении значений

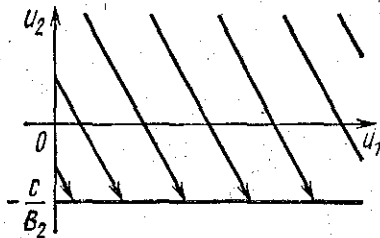


Рис. 3

принадлежит области U (рис. 3).

другого. Отметим несколько возможных видов областей для рассматриваемого двумерного случая (17). Если какая-либо из констант b_m , например b_1 , равна нулю, то область такая, как изображено на рис. 2. Еще один вид области U появится, когда среди B_m будут бесконечности. Пусть $B_1 = \infty, b_1 = 0$, тогда областью будет четверть плоскости, причем часть прямой $u_1 = 0$ при $u_2 > -c/B_2$

§ 3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Мы полностью исследовали вопрос о корректности задачи (6). Остановимся на целесообразности именно такой формы задачи (6).

Теорема 2. Пусть $v \in X$ является решением задачи (6), тогда значение дополнительного функционала $\Omega(v)$ является минимальным среди значений $\Omega(x)$ от любых $x \in X$ с теми же значениями основных функционалов, что и от v , т. е.

$$\Omega(v) = \inf_{x \in \mathcal{G}} \{\Omega(x)\}, \quad (18)$$

где $\mathcal{G} = \{x : x \in X, \Phi_m(x) = \Phi_m(v), m = 1, \dots, M\}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $x_0 \in X$, такой, что $\Phi_m(x_0) = \Phi_m(v), m = 1, \dots, M$, и $\Omega(x_0) < \Omega(v)$. Тогда для тех значений управляющих параметров u_m , для которых решением задачи (6) будет v , имеем

$$\sum_{m=1}^M u_m \Phi_m(x_0) + \Omega(x_0) < \sum_{m=1}^M u_m \Phi_m(v) + \Omega(v). \quad (19)$$

Это противоречит определению минимума (6). Теорема доказана.

Замечание 2. Ясно, что для различных дополнительных функционалов будут получаться различные решения задачи (6) с одинаковыми значениями основных функционалов, если это, конечно, возможно. Поэтому введение дополнительных функционалов приведет не только к корректности задачи (6), но и позволит получать различные варианты решения задач синтеза.

Остановимся подробнее на возможных видах дополнительных функционалов. Часто их удобно задавать в форме [4]

$$\Omega(x) = \|\chi[x] - h\|_H^2, \quad (20)$$

где χ — структурный оператор из X в H , H — пространство структурных характеристик, h — желаемая структурная характеристика из H . Всем этим понятиям мы дадим определения.

Определение 5. Линейный оператор χ из X в некоторое нормированное пространство H называется структурным, если

$$\|\chi[x]\|_H^2 \geq c \|x\|_X^2, \quad c > 0. \quad (21)$$

При этом элементы из H называются структурными характеристиками.

Остановимся подробнее на достаточно общей схеме определения структурного оператора и пространства структурных характеристик для случая сепарабельного гильбертова пространства X .

Рассмотрим в X полную ортонормированную систему $\{e_n\}$. Тогда любой $x \in X$ представим в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad c_n = (x, e_n), \quad (22)$$

причем имеет место равенство Парсеваля

$$\|x\|_X^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \quad (23)$$

Структурный оператор определим так:

$$\chi[x] = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots). \quad (24)$$

Он всякому $x \in X$ ставит в соответствие коэффициенты Фурье разложения (22). Пространство структурных характеристик определим с нормой

$$\|\chi[x]\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} r_n |c_n|^2, \quad (25)$$

где $r_n \geq 0$ — весовые коэффициенты, выбираемые следующим образом: до некоторого N они произвольные, а дальше равны между собой, т. е.

$$r_n = \alpha = \text{const} \quad \forall n > N. \quad (26)$$

Тогда для нормы (25) с учетом (23) имеем

$$\begin{aligned} \|\chi[x]\|_H^2 &= \sum_{n=1}^N (r_n - \alpha) |c_n|^2 + \alpha \|x\|_X^2 = \\ &= \alpha (x, x)_X + \sum_{n=1}^N (r_n - \alpha) |(x, e_n)_X|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Этим самым мы избавились от явных бесконечных сумм, что важно при численных реализациях.

Замечание 3. Такой выбор весовых коэффициентов (26) позволяет влиять на величину координат структурной характеристики (24). Увеличивая α , мы сильнее ограничиваем коэффициенты Фурье с номерами $n > N$, как бы зажимаем их.

Выбор базиса $\{e_n\}$ в X можно связать с данными основными функционалами следующим образом. Зададимся некоторой системой положительных чисел $\{\varepsilon_i\}$ и рассмотрим множества

$$X_i = \{x: x \in X, |\Phi_m(x)| \geq \varepsilon_i, m = 1, \dots, M\}. \quad (28)$$

причем $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_l \geq \dots$. Среди них могут быть и пустые множества. Очевидно, имеет место вложение

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_l \subset \dots \subset X. \quad (29)$$

Перенумеруем некоторый ортонормированный базис следующим образом. Элементы базиса, принадлежащие X_1 , обозначим e_1, \dots

\dots, e_{k_1} . Из оставшихся элементов базиса, принадлежащих X_2 составим следующую часть $e_{k_1+1}, \dots, e_{k_2}$ и т. д. Получим ортонормированную систему

$$e_1, \dots, e_{k_1}, \dots, e_{k_2}, \dots, e_{k_l}, \dots = \{e_n\}. \quad (30)$$

Перенумерованный базис, составленный из элементов некоторого базиса, обладает следующим свойством: элементы этого базиса с большими номерами меньше влияют на величины основных функционалов, чем элементы с меньшими номерами. Например, пусть число $\varepsilon_i > 0$ достаточно мало, тогда при $n > k_l$ элементы ортонормированного базиса удовлетворяют сразу для всех основных функционалов неравенствам

$$|\Phi_m(e_n)| < \varepsilon_i, m = 1, \dots, M. \quad (31)$$

В связи с этим выбор нормы (25) с коэффициентами (26) оправдан. Так, уменьшая с помощью α коэффициенты Фурье с высокими номерами, для $N = k_l$, мы тем самым рассматриваем такие $x \in X$, у которых в разложениях (22) преобладают коэффициенты с номерами $n \leq N$ [см. (24)]. Этим мы отдаем предпочтение ортам, которые сильно влияют на значения наших основных функционалов, перед слабевлияющими.

§ 4. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

1. Рассмотрим алгоритм решения задачи (6) при фиксированных управляющих параметрах. Исследуем его для достаточно общего случая, когда пространство X — гильбертово. В этом случае основные и дополнительный функционалы (3) имеют вид

$$\Phi_m(x) = (P_m[x], x)_X - 2 \text{Re} (p_m, x)_X, \quad (32)$$

$$\Omega(x) = (Q[x], x)_X - 2 \text{Re} (q, x)_X,$$

где P_m, Q — самосопряженные операторы, p_m, q — некоторые элементы в X . В этом случае задача (6) переписывается в виде

$$\inf_{x \in X} \left\{ \sum_{m=1}^M u_m (P_m[x], x)_X + (Q[x], x)_X - 2 \text{Re} \left(\sum_{m=1}^M u_m p_m + q, x \right)_X \right\}, \quad (33)$$

для которого легко найти уравнение Эйлера.

Теорема 3. Для любой $u = (u_1, \dots, u_M) \in U$ решение задачи (6) является единственным решением операторного уравнения

$$\sum_{m=1}^M u_m P_m[x] + Q[x] = \sum_{m=1}^M u_m p_m + q. \quad (34)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 уравнение Эйлера (34) задачи (33) имеет решения для любой $u \in U$. Надо доказать только единственность, т. е. что однородное уравнение

$$\sum_{m=1}^M u_m P_m[x] + Q[x] = 0 \quad (35)$$

имеет только нулевое решение.

Пусть $x_0 \in X$ удовлетворяет (35), тогда

$$\sum_{m=1}^M u_m (P_m[x_0], x_0)x + (Q[x_0], x_0)x = 0. \quad (36)$$

В силу (32) и (7)

$$\Psi(x_0, x_0) = 0. \quad (37)$$

Наконец, для любой $u = (u_1, \dots, u_M) \in U$ в силу теоремы 1 из (37) следует $x_0 = 0$. Теорема доказана.

Дополнительный функционал, как правило, имеет вид (20). Уже говорилось, что тогда $\Omega(x)$ можно переписать в виде (27), т. е. с точностью до несущественной аддитивной постоянной

$$\Omega(x) = \alpha(x, x)_X + (A[x], x)_X - 2 \operatorname{Re}(q, x)_X, \quad (38)$$

где $\alpha > 0$ — параметр, A — самосопряженный оператор, $q \in X$. Тогда уравнение (34) переписывается в виде

$$\alpha x + S[x] = s, \quad (39)$$

где

$$S = \sum_{m=1}^M u_m P_m + A, \quad s = \sum_{m=1}^M u_m P_m + q. \quad (40)$$

Думается, что нет необходимости дальше разбирать алгоритм решения операторного уравнения (39), являющегося аналогом интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

2. Исследуем влияние управляющих параметров на значения основных функционалов $\Phi_m(x(u)) = \Phi_m(u_1, \dots, u_M)$. Здесь $x(u)$ — решение задачи (6) в случае управляющих параметров $u = (u_1, \dots, u_M) \in U$.

Теорема 4. Пусть $x = x(u)$ и $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u})$ — два решения задачи (6) при различных значениях управляющих параметров. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{m=1}^M \Delta u_m \Delta \Phi_m(x(u)) \leq 0, \quad (41)$$

$$\Delta u_m = \tilde{u}_m - u_m, \quad \Delta \Phi_m(x) = \Phi_m(\tilde{x}) - \Phi_m(x).$$

Доказательство. Так как \tilde{x} — решение задачи (6) для управляющих параметров \tilde{u} , то в силу определения минимума для любого x , в частности $x(u)$, имеем неравенство

$$\sum_{m=1}^M \tilde{u}_m \Phi_m(\tilde{x}) + \Omega(\tilde{x}) \leq \sum_{m=1}^M \tilde{u}_m \Phi_m(x) + \Omega(x). \quad (42)$$

Аналогично получим неравенство

$$\sum_{m=1}^M u_m \Phi_m(x) + \Omega(x) \leq \sum_{m=1}^M u_m \Phi_m(\tilde{x}) + \Omega(\tilde{x}). \quad (43)$$

Из (42) и (43) следует (41). Теорема доказана.

Из этой теоремы можно сделать следующий вывод. С монотонным изменением какого-либо одного параметра \tilde{u}_m будет монотонно меняться значение соответствующего ему функционала $\Phi_m(u_1, \dots, \tilde{u}_m, \dots, u_M)$. Вообще, M -мерный вектор изменения значений основных функционалов $\Delta \Phi = (\Delta \Phi_1, \dots, \Delta \Phi_M)$ такой, что его проекция на M -мерный вектор изменения значений управляющих параметров $\Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_M)$ должна быть неположительной. Грубо говоря, мы должны менять управляющие параметры в противоположную сторону от желаемого изменения значений основных функционалов.

Теорема 5. Пусть множество $K = \{x : x \in X; \Phi_m(x) \leq \Gamma_m; m = 1, \dots, M\}$ — компактно и существуют $\tilde{x} \in X$, удовлетворяющие строгим неравенствам $\Phi_m(\tilde{x}) < \Gamma_m, m = 1, \dots, M$. Тогда найдутся значения управляющих параметров, причем неотрицательные, такие, что регуляризованный элемент $x(u_1, \dots, u_M)$ от них будет удовлетворять правым неравенствам (1), т. е. $\Phi_m(x) < \Gamma_m, m = 1, \dots, M$.

Доказательство. Воспользуемся известной теоремой Куна—Таккера из теории выпуклого программирования. Рассмотрим другую задачу: $\inf_{x \in X} \{\Omega(x)\}$ при ограничениях

$$\Phi_m(x) \leq \Gamma_m, \quad m = 1, \dots, M. \quad (44)$$

Так как по предположению нашей теоремы существуют строго внутренние решения системы $\Phi_m(x) < \Gamma_m, m = 1, \dots, M$, то необходимым и достаточным условием существования решения x_0 задачи (44) является существование $u_m \geq 0, m = 1, \dots, M$, таких, для которых x_0 — решение и задачи (6). Тем самым нам остается только доказать, что задача (44) имеет единственное решение. В самом деле, всякая минимизирующая последовательность в силу (12) будет сходящейся в X и ввиду компактности K ее предел $x_0 \in K$.

Единственность решения доказывается от противного. Пусть $x_0 \neq \tilde{x}_0$ — два решения задачи (44). Составим из двух минимизирующих последовательностей $\xi_n \rightarrow x_0$ и $\tilde{\xi}_n \rightarrow \tilde{x}_0$ одну. Она будет также минимизирующей и, следовательно, сходящейся, т. е. существуют две подпоследовательности $\xi_{n_k} \rightarrow x_0$ и $\tilde{\xi}_{n_l} \rightarrow \tilde{x}_0$, имеющие один предел $x_0 = \tilde{x}_0$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Мы показали, что можно сформировать значения основных функционалов такими, чтобы удовлетворялись правые неравенства (1). Для этого надо работать с неотрицательными управляющими параметрами, что интуитивно ясно с самого начала из вида задачи (6). Условие компактности множества K выполняется, например, в важном практическом случае конечномерного пространства X .

Для удовлетворения левых неравенств, если они не выполняются, часто приходится иметь дело с отрицательными значениями управляющих параметров, но работа с ними требует большой аккуратности из-за ограниченности области их изменения (12), (рис. 1—3).

3. Теперь можно сформулировать сам метод решения задачи реального синтеза для системы неравенств (1). Это итерационный процесс, который можно полностью поручить ЭВМ.

Итак, для получения одного варианта решения системы (1) надо задаваться дополнительным функционалом, т. е. задать и дальше в процессе формирования не менять параметры дополнительного функционала. Затем задаем начальные управляющие параметры $u^{(0)} \in U$, например $u^{(0)} = (0, \dots, 0)$, и решаем задачу (6) при этих значениях. Найдя регуляризованный элемент $x(u^{(0)})$, вычисляем значения основных функционалов от него $\Phi_m(x)$, $m = 1, \dots, M$, и проверяем выполнение системы (1). Если система удовлетворяется, то процесс закончен, если нет, то производится следующая итерация. Следующая итерация начинается с изменения управляющих параметров. На основании теоремы 4 и анализа значений основных функционалов задаем $u^{(1)} \in U$ и повторяем действия предыдущей итерации. При выработке очередных значений управляющих параметров $u^{(k)} \in U$ участвуют значения основных функционалов на двух предыдущих итерациях. Это позволяет в случае медленного формирования нужных значений сильно изменить управляющие параметры, а в случае резких изменений значений $\Phi_m(x)$ менять их медленнее. Соответствующий поисковый алгоритм был разработан и испытан на большом числе численных решений систем вида (1) совместно с Н. И. Березиной. Здесь мы не будем его разбирать [6].

Таким образом, с каждой итерацией мы целенаправленно формируем значения основных функционалов, чтобы удовлетворялись

условия (1). После удовлетворения системе (1) процесс решения заканчивается.

В результате имеем один вариант решения системы (1). Для получения другого варианта, надо изменить дополнительный функционал, т. е. задать другие параметры $\Omega(x)$. Затем провести снова весь процесс формирования значений основных функционалов.

Мы оставляем в стороне вопросы изменения дополнительного функционала, а также исследование случая, когда система (1) имеет пустую внутренность.

Замечание 4. В случае, когда задаем $u^{(0)} = (0, \dots, 0)$, решением задачи (6) будет некоторый x_0 , причем

$$-\Omega(x_0) = \inf_{x \in X} \{\Omega(x)\}. \quad (45)$$

Элемент x_0 можно заранее задать, работая с $\Omega(x) = \|\chi[x] - h\|_H^2$ и задав желаемую структурную характеристику $h = \chi[x_0]$. Это важно для ускорения процесса формирования, так как элемент x_0 может быть получен из предварительных теоретических соображений или экспериментальных данных.

§ 5. ПРИМЕР

Математической моделью, описывающей излучение антенной системы в дальней зоне, как известно [5], является вектор возбуждения $\hat{j} \in X$ и полная диаграмма направленности $\hat{G}(\theta, \varphi) \in Y$, связанные между собой оператором излучения g :

$$\hat{G}(\theta, \varphi) = g[\hat{j}]. \quad (47)$$

Здесь, X, Y — банаховы пространства [5], θ и φ — угловые координаты, $(\theta, \varphi) \in \Omega = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. В проблеме проектирования антенн с заданной геометрией оператор излучения g , который несет всю информацию о конструкции и типе антенны, считается известным. Мы можем эффективно решать рассмотренным многопараметрическим методом регуляризации широкий класс задач синтеза с требованиями, например, на следующие квадратичные функционалы $\Phi_m(\hat{j})$: отклонения диаграммы $g[\hat{j}]$ от заданной $\hat{F}(\theta, \varphi)$ в различных подобластях угловых координат

$$\Phi_k(\hat{j}) = \int_{\omega_k} |g[\hat{j}] - \hat{F}(\theta, \varphi)|^2 d\omega_k, \quad \omega_k \subset \Omega, \quad (48)$$

или аналогично (48), но еще с учетом близости производных и т. п.; энергии излучения в областях боковых лепестков

$$\Phi_l(\hat{j}) = \int_{\omega_l} |g[\hat{j}]|^2 \sin \theta d\omega_l, \quad \omega_l \subset \Omega. \quad (49)$$

Функционалы вида (48), (49) в зависимости от типа антенны, т. е. от вида оператора g , могут быть легко расписаны [5] и приведены к виду (3). Следовательно, для них применимы все утверждения настоящей статьи. Заметим, что для основных функционалов вида (48) и (49) не приходится иметь дело с отрицательными управляющими параметрами u_m , так как на эти функционалы накладываются только верхние ограничения, т. е. задаются только Γ_m , тогда как нижние у них, естественно, равны нулю ($\gamma_m = 0$). Многие другие задачи синтеза антенн рассмотрены в работе [6]. Там же имеются расчеты уникальных антенных систем, проведенных на основе многопараметрического метода регуляризации в НИВЦ МГУ. Самым существенным в них является использование отрицательных управляющих параметров.

В заключение хочу выразить благодарность В. И. Дмитриеву, Н. И. Березиной, с которыми я вел полезные для себя обсуждения рассматриваемых вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 13. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
3. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М., Изд-во Моск. ун-та, 1974.
4. Чечкин А. В. Специальный регуляризатор А. Н. Тихонова для интегральных уравнений первого рода. — ЖВМ и МФ, 1970, т. 2, с. 453.
5. Чечкин А. В. О математической теории излучения. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 24. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.
6. Чечкин А. В. Математические вопросы проектирования излучающих систем. Диссертация на соиск. учен. степени доктора физ-матем. наук. [Рукопись.] М., 1975 (МГУ).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИКИ

Е. В. ЗАХАРОВ

МЕТОД РЕШЕНИЯ
ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ
ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

В настоящее время эффективным методом численного исследования электромагнитных полей в неоднородных средах стали интегральные уравнения [1, 2]. Сведение соответствующих граничных задач для уравнения Максвелла к интегральным уравнениям основано на применении векторных аналогов формулы Грина и требует построения матриц фундаментальных решений [3, 4]. При рассмотрении трехмерных математических моделей такое построение сопряжено с большими трудностями, вызванными тензорным характером представлений векторов электромагнитного поля. В настоящей работе развит новый метод решения граничных задач электродинамики неоднородных сред. Он состоит в сведении электродинамических задач к плоским скалярным задачам относительно азимутальных компонент E_φ и H_φ (свойства среды не зависят от азимутальной координаты φ цилиндрической системы координат). Осесимметричные задачи ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$) сведены к системе одномерных интегральных уравнений, допускающих применение эффективных численных методов. При этом используются обобщенные формулы Грина для несамосопряженных операторов и фундаментальные решения уравнений эллиптического типа в полуплоскости $\{\rho > 0, -\infty < z < \infty\}$.

Пусть пространство заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ , которые будем считать кусочно-дифференцируемыми комплекснозначными функциями координат x, y, z : $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$, $\mu = \mu(x, y, z)$, ($\text{Im} \epsilon > 0$), ($\text{Im} \mu \geq 0$). Предположим, что существует такая цилиндрическая система координат ρ, φ, z , что $\epsilon(M) = \epsilon(\rho, z)$ и $\mu(M) = \mu(\rho, z)$.

В данной среде распространяется гармоническое во времени ($e^{-i\omega t}$) электромагнитное поле, возбуждаемое сторонними тока-

ми I и I^* . Требуется определить векторы E и H электрической и магнитной напряженностей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла:

$$\text{rot } E = i\omega\mu H - I^*, \quad (1)$$

$$\text{rot } H = -i\omega\epsilon E + I, \quad (2)$$

условиям непрерывности касательных компонент векторов E и H на границах разрыва параметров ϵ или μ и условиям на бесконечности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RE = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} RH = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3)$$

Рассмотрим однородные уравнения Максвелла (1) и (2) в цилиндрической системе координат ρ, φ, z :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\rho} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} = i\omega\mu H_z, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -i\omega\epsilon E_\rho, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\omega\epsilon E_\varphi, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\rho} H_\varphi + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} = -i\omega\epsilon E_z. \quad (2.3)$$

Так как ϵ и μ не зависят от φ , представим компоненты векторов E и H в виде рядов Фурье по функциям $e^{in\varphi}$ (компоненты — периодические функции по φ с периодом 2π):

$$E_{\rho,\varphi,z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{\rho,\varphi,z}^{(n)} e^{in\varphi}; \quad (4)$$

$$H_{\rho,\varphi,z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\rho,\varphi,z}^{(n)} e^{in\varphi}. \quad (5)$$

Подставим разложения (4)–(5) в уравнения (1) и (2). Будем иметь следующие соотношения для гармоник:

$$\frac{in}{\rho} E_z^{(n)} - \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial z} = i\omega\mu H_\rho^{(n)}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial E_\rho^{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\varphi^{(n)}, \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{\rho} E_\varphi^{(n)} + \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} E_\rho^{(n)} = i\omega\mu H_z^{(n)}, \quad (6.3)$$

$$\frac{in}{\rho} H_z^{(n)} - \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z} = -i\omega\epsilon E_\rho^{(n)}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial H_\rho^{(n)}}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial \rho} = -i\omega\epsilon E_\varphi^{(n)}, \quad (7.2)$$

$$\frac{1}{\rho} H_\varphi^{(n)} + \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} H_\rho^{(n)} = -i\omega\epsilon E_z^{(n)}. \quad (7.3)$$

Из соотношений (6) и (7) можно выразить все гармоники компонент $E_\rho^{(n)}$, $E_z^{(n)}$, $H_\rho^{(n)}$, $H_z^{(n)}$ с помощью соответствующих гармоник компонент $E_\varphi^{(n)}$ и $H_\varphi^{(n)}$. Например, гармоники $H_\rho^{(n)}$ и $E_z^{(n)}$ выражаются из системы уравнений (6.1) и (7.3):

$$\frac{in}{\rho} E_z^{(n)} - i\omega\mu H_\rho^{(n)} = \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial z},$$

$$-i\omega\epsilon E_z^{(n)} + \frac{in}{\rho} H_\rho^{(n)} = \frac{1}{\rho} H_\varphi^{(n)} + \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho}$$

следующим образом:

$$E_z^{(n)} = \frac{i\rho}{k^2\rho^2 - n^2} \left[n \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial z} + \omega\mu \left(H_\varphi^{(n)} + \rho \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} \right) \right], \quad (8)$$

$$H_\rho^{(n)} = \frac{i}{k^2\rho^2 - n^2} \left[\omega\epsilon\rho^2 \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial z} + n \left(H_\varphi^{(n)} + \rho \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} \right) \right]. \quad (9)$$

Компоненты $H_z^{(n)}$ и $E_\rho^{(n)}$ находятся из уравнений (6.3) и (7.1):

$$\frac{in}{\rho} E_\rho^{(n)} + i\omega\mu H_z^{(n)} = \frac{1}{\rho} E_\varphi^{(n)} + \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho},$$

$$i\omega\epsilon E_\rho^{(n)} + \frac{in}{\rho} H_z^{(n)} = \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z}$$

и имеют вид

$$E_\rho^{(n)} = \frac{i}{k^2\rho^2 - n^2} \left[n \left(E_\varphi^{(n)} + \rho \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} \right) - \omega\mu\rho^2 \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z} \right], \quad (10)$$

$$H_z^{(n)} = \frac{-i\rho}{k^2\rho^2 - n^2} \left[\omega\epsilon \left(E_\varphi^{(n)} + \rho \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} \right) - n \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z} \right]. \quad (11)$$

Таким образом, все компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} выражены линейным образом с помощью лишь двух азимутальных компонент $E_\varphi^{(n)}$ и $H_\varphi^{(n)}$. Используя соотношения (6.2) и (7.2), можно получить уравнения относительно $E_\varphi^{(n)}$ и $H_\varphi^{(n)}$:

$$\frac{\partial^2 E_\varphi^{(n)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho\alpha} (k^2\rho^2 - 3n^2) \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{(\alpha^2 - \alpha^*)}{\rho^2\alpha} E_\varphi^{(n)} + \frac{2ink^2}{\alpha i\omega\epsilon} \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial z} = 0, \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial^2 H_\varphi^{(n)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho\alpha} (k^2\rho^2 - 3n^2) \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \rho} + \frac{\alpha^2 - \alpha^*}{\rho^2\alpha} H_\varphi^{(n)} - \frac{2ink^2}{\alpha i\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial z} = 0, \quad \alpha = k^2\rho^2 - n^2, \quad \alpha^* = k^2\rho^2 + n^2. \quad (12.2)$$

Как видно, для $E_\varphi^{(n)}$ и $H_\varphi^{(n)}$ получена система двух уравнений. При этом на границах разрыва параметров ϵ или μ выполнены следующие условия (ν — вектор нормали):

$$\left[\frac{\mu}{\alpha^2} \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \nu} \right] = -\frac{n}{\omega\rho} \left[\frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \tau} + \frac{n}{\omega\rho^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} \right] E_\varphi^{(n)} \cos(\hat{\nu}z) -$$

$$-\frac{1}{\rho} \left[\frac{\mu}{\alpha^2} \right] H_\varphi^{(n)} \cos(\hat{\nu}\rho), \quad [H_\varphi^{(n)}] = 0,$$

$$\left[\frac{\epsilon}{\alpha^2} \frac{\partial E_\varphi^{(n)}}{\partial \nu} \right] = -\frac{n}{\omega\rho} \left[\frac{1}{\alpha^2} \right] \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial \tau} - \frac{n}{\omega\rho^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} \right] H_\varphi^{(n)} \cos(\hat{\nu}z) -$$

$$-\frac{1}{\rho} \left[\frac{\epsilon}{\alpha^2} \right] E_\varphi^{(n)} \cos(\hat{\nu}\rho), \quad [E_\varphi^{(n)}] = 0.$$

Далее будет рассмотрено осесимметричное поле ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$). В этом случае система уравнений (12) распадается на два независимых уравнения относительно компонент $E_\varphi^{(0)}$ или $H_\varphi^{(0)}$. Заметим, что задача для $E_\varphi^{(0)}$ переходит в задачу для $H_\varphi^{(0)}$, если параметр μ заменить на ϵ и наоборот.

Итак, в осесимметричном случае граничная задача электродинамики сведена к следующей скалярной задаче на полуплоскости $\{\rho > 0, -\infty < z < \infty\}$ относительно функции $u(\rho, z)$.

Функция $u(\rho, z)$ удовлетворяет уравнению

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \gamma k^2(\rho, z) u = f(\rho, z), \quad (13)$$

граничным условиям на всех границах разрыва электромагнитных параметров

$$[u] = 0, \quad \left[\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \right] = -[\gamma] u \cdot \frac{1}{\rho} \cos(\hat{\nu} \rho), \quad (13a)$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \text{при } u = E_{\varphi}^{(0)}, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } u = H_{\varphi}^{(0)}, \end{cases}$$

на линии $\rho = 0$ ($-\infty < z < \infty$) выполнено краевое условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u(\rho, z) = 0. \quad (13b)$$

На бесконечности при условии, что $\text{Im } k > 0$, потребуем выполнения следующего условия:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r u(r) = 0, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (13b)$$

Нетрудно показать, что если $u(M)$ есть решение задачи (13), то соотношения (1) и (2) дают решение соответствующей электродинамической задачи.

При достаточно общих предположениях относительно структуры среды (параметрах ε и μ) поставленную граничную задачу для $u(M)$ можно свести к интегральным уравнениям. Основную роль в этой редукции играет формула Грина для уравнений эллиптического типа и соответствующее интегральное представление. Пусть Ω — некоторая область, ограниченная достаточно гладким контуром Γ . Имеет место следующее соотношение:

$$\iint_{\Gamma} \{vL(u) - uM(v)\} ds = \int_{\Gamma} \left(\sum_{i=1}^n P_i \cos(n x_i) \right) dl, \quad (14)$$

где

$$L(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Du,$$

$$M(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Dv$$

дифференциальный оператор, сопряженный оператору $L(u)$,

$$P_i = \sum_{j=1}^n \left(v A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + B_i u v,$$

$\cos(n x_i)$ — направляющие косинусы внешней нормали.

Для уравнения (13) сопряженные операторы $L(u)$ и $M(v)$ примут вид

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) u,$$

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + k^2 v.$$

Получим интегральное представление для функции $u(M)$ в области Ω при заданных значениях этой функции и ее нормальной производной на границе Γ . Не ограничивая общности рассмотрения, будем считать, что коэффициенты операторов L и M — постоянные величины. Пусть, далее, $G(M, M_0)$ — фундаментальное решение уравнения $M(u) = 0$. Опишем вокруг точки M_0 окружность Γ_ε малого радиуса ε и применим формулу (14) к функциям u и $G(M, M_0)$ по точке M , считая M_0 параметром, в области $\Omega - \Omega_\varepsilon$, где Ω_ε — круг радиуса ε с центром в точке M_0 . Формула (14) примет вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \{GL(u) - uM(G)\} ds_M &= \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \left\{ \left[G \frac{\partial u}{\partial \rho} - u \frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} Gu \right] \times \right. \\ &\times \cos(\hat{n} \rho) + \left[G \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial G}{\partial z} \right] \cos(\hat{n} z) \left. \right\} dl_M = \\ &= \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \left\{ \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] + \frac{1}{\rho} uG \cos(\hat{n} \rho) \right\} dl_M. \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы по контуру Γ_ε , получим следующее интегральное представление для функции $u(M_0)$ в области Ω :

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] + \frac{1}{\rho} uG \cos(\hat{n} \rho) \right\} dl_M - \frac{1}{4\pi} u^0(M_0), \quad (15)$$

где $u^0(M_0) = \iint_{\Omega} GL(u) ds_M$.

Имея интегральное представление (15) и пользуясь методом работы [1], нетрудно свести соответствующую электродинамическую задачу к системе интегральных уравнений по некоторой совокупности границ разрыва электромагнитных параметров. Одна из таких задач рассмотрена, например, в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 16. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
2. Захаров Е. В. Метод интегральных уравнений в задачах электромагнитного каротажа. — В кн.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
3. Захаров Е. В., Ильин И. В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1970, № 8.
4. Табаровский Л. А. Интегральные уравнения для квазитрехмерных осесимметричных задач дифракции. Новосибирск, «Наука», 1972.
5. Несмеянова Н. И. Интегральные уравнения осесимметричных задач теории электромагнитного каротажа. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 28. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.

Н. И. НЕСМЕЯНОВА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА

В работе рассматривается типичная для задач теории электромагнитного каротажа осесимметричная модель среды, учитывающая одновременно пласт конечной мощности, скважину и неоднородную зону проникновения фильтрата бурового раствора. Дана математическая постановка задачи, которая сведена к системе интегральных уравнений по образующей скважины и радиальному сечению зоны проникновения.

Пусть имеется скважина радиуса a , заполненная однородной изотропной средой с проводимостью σ_c и диэлектрической проницаемостью ϵ_c . Граница скважины представляет собой цилиндрическую поверхность вращения с образующей, параллельной оси OZ . Скважина пересекает пласт мощности H с параметрами ϵ_n, σ_n . Параметры вмещающей среды ϵ_b, σ_b . Выделяется зона проникновения с непрерывно дифференцируемыми параметрами $\sigma_3 = \sigma(\rho, z)$, $\epsilon_3 = \epsilon(\rho, z)$. Магнитную проницаемость считаем всюду постоянной и равной μ .

В данной среде распространяется электромагнитное поле, возбуждаемое магнитным диполем, расположенным на оси скважины и ориентированным вдоль OZ . Зависимость от времени $e^{-i\omega t}$.

Требуется определить векторы напряженности электромагнитного поля E и H , которые удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H, \quad \operatorname{rot} H = \gamma E + j, \quad (1)$$

где $\gamma = \sigma - i\omega\epsilon$, непрерывности касательных компонент E и H на всех границах разрыва σ и ϵ ,

$$[E_r] = 0, \quad [H_z] = 0,$$

и условиям на бесконечности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RE = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} RH = 0.$$

В силу осевой симметрии исходной задачи ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 16. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.
2. Захаров Е. В. Метод интегральных уравнений в задачах электромагнитного каротажа. — В кн.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
3. Захаров Е. В., Ильин И. В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1970, № 8.
4. Табаровский Л. А. Интегральные уравнения для квазитрехмерных осесимметричных задач дифракции. Новосибирск, «Наука», 1972.
5. Несмеянова Н. И. Интегральные уравнения осесимметричных задач теории электромагнитного каротажа. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 28. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.

Н. И. НЕСМЕЯНОВА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА

В работе рассматривается типичная для задач теории электромагнитного каротажа осесимметричная модель среды, учитывающая одновременно пласт конечной мощности, скважину и неоднородную зону проникновения фильтрата бурового раствора. Дана математическая постановка задачи, которая сведена к системе интегральных уравнений по образующей скважины и радиальному сечению зоны проникновения.

Пусть имеется скважина радиуса a , заполненная однородной изотропной средой с проводимостью σ_c и диэлектрической проницаемостью ϵ_c . Граница скважины представляет собой цилиндрическую поверхность вращения с образующей, параллельной оси OZ . Скважина пересекает пласт мощности H с параметрами ϵ_n, σ_n . Параметры вмещающей среды ϵ_b, σ_b . Выделяется зона проникновения с непрерывно дифференцируемыми параметрами $\sigma_3 = \sigma(\rho, z)$, $\epsilon_3 = \epsilon(\rho, z)$. Магнитную проницаемость считаем всюду постоянной и равной μ .

В данной среде распространяется электромагнитное поле, возбуждаемое магнитным диполем, расположенным на оси скважины и ориентированным вдоль OZ . Зависимость от времени $e^{-i\omega t}$.

Требуется определить векторы напряженности электромагнитного поля E и H , которые удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H, \quad \operatorname{rot} H = \gamma E + j, \quad (1)$$

где $\gamma = \sigma - i\omega\epsilon$, непрерывности касательных компонент E и H на всех границах разрыва σ и ϵ ,

$$[E_r] = 0, \quad [H_z] = 0,$$

и условиям на бесконечности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} RE = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} RH = 0.$$

В силу осевой симметрии исходной задачи ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы.

В задачах электромагнитного каротажа целесообразно рассмотреть случай магнитного возбуждения.

$$E = (0, E_\varphi, 0), \quad H = (H_\rho, 0, H_z),$$

$$H_\rho = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi).$$

На полуплоскости $\{\rho \geq 0, -\infty < z < \infty\}$ компонента E_φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right] + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2 E_\varphi = \tilde{j}_\varphi, \quad (2)$$

$$k^2 = i\omega\mu\gamma, \quad \tilde{j}_\varphi = -i\omega\mu j_\varphi,$$

при этом: а) на границах разрыва γ выполняются условия

$$[E_\varphi] = 0, \quad \left[\frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right] = 0;$$

б) из осевой симметрии следует условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} E_\varphi = 0;$$

$$в) \lim_{r \rightarrow \infty} r E_\varphi = 0, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

При сведении граничных задач к интегральным уравнениям основную роль играет интегральное представление решений внутри некоторой области с помощью значений искомой функции и ее производных на границе области.

Для получения таких представлений используются обобщенные формулы Грина для несамосопряженных операторов. Пусть в полуплоскости $\{\rho \geq 0, -\infty < z < \infty\}$ имеется область Ω , ограниченная достаточно гладким контуром Γ . Запишем интегральное представление для функции E_φ в области Ω при заданных значениях E_φ и H_z на границе Γ [1]:

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ i\omega\mu G H_z - E_\varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right\} dl_M - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} G \tilde{j}_\varphi ds_M, \quad (3)$$

$G(M, M_0)$ — фундаментальное решение уравнения $L^*(G) = 0$, где L^* — оператор, сопряженный интегральному оператору L

$$[L(E_\varphi) = \tilde{j}_\varphi].$$

Имея представление (3), можно свести поставленную электродинамическую задачу к системе интегральных уравнений по некоторой совокупности границ разрыва электромагнитных параметров.

Сделаем дополнительное преобразование второго уравнения Максвелла для зоны проникновения (в области Ω_3):

$$\operatorname{rot} \bar{H} - \gamma_\Gamma \bar{E} = (\gamma_3 - \gamma_\Gamma) \bar{E},$$

где

$$\gamma_3 = \sigma_3 - i\omega\epsilon,$$

$$\gamma_\Gamma = \begin{cases} \gamma_b, & z > H/2; \\ \gamma_n, & -H/2 < z < H/2; \\ \gamma_b, & z < -H/2. \end{cases}$$

Запишем представление (3) в скважине:

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\omega\mu G_c H_z - E_\varphi \frac{\partial G_c}{\partial n} \right\} dz - E_\varphi^0(M_0),$$

в зоне проникновения:

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_3} \left\{ G_\Gamma i\omega\mu H_z - E_\varphi \frac{\partial G_\Gamma}{\partial n} \right\} dl_M + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_3} (k_3^2 - k_\Gamma^2) G_\Gamma E_\varphi ds_M,$$

в области, внешней к скважине и зоне проникновения:

$$E_\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\omega\mu G_\Gamma H_z - E_\varphi \frac{\partial G_\Gamma}{\partial n} \right\} dz - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_3} \left\{ i\omega\mu G_\Gamma H_z - E_\varphi \frac{\partial G_\Gamma}{\partial n} \right\} dl_M.$$

Нормаль выбирается внешней к скважине и границе зоны проникновения. Сложим полученные представления и опустим точку M_0 в соответствующих областях:

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\omega\mu (G_c - G_\Gamma) H_z - E_\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} (G_c - G_\Gamma) \right\} dz + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_3} (k_3^2 - k_\Gamma^2) G_\Gamma E_\varphi ds_M - E_\varphi^0(M_0). \quad (4)$$

Чтобы получить уравнение для H_z , подействуем оператором $\frac{1}{i\omega\mu} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{\partial}{\partial \rho_0} \right)$ на представление для E_φ . Сделав соответствующие преобразования, получим второе интегральное уравнение:

$$H_z(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_0} [G_c - G_\Gamma] H_z - \frac{1}{i\omega\mu} E_\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} (G_c - G_\Gamma) \right\} dz +$$

$$+ H_z \frac{\partial}{\partial \rho_0} (G_c - G_r) - \frac{1}{i\omega\mu} E_\varphi \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \rho_0} (G_c - G_r) \Big\} dz + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_3} \frac{k_s^2 - k_r^2}{i\omega\mu} G_r^m E_\varphi ds_M - H_z^0 (M_0), \quad (5)$$

где

$$G_r^m = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} (\rho_0 G_r).$$

Таким образом, получена система интегральных уравнений по образующей скважины и по радиальному сечению зоны проникновения Ω_3 . Относительно полученной системы уравнений и задачи в целом можно сделать ряд замечаний.

1. В ядра интегральных уравнений входят только два фундаментальных решения, причем одно из них достаточно просто, так как представляет собой фундаментальное решение для однородной среды, т. е. нет необходимости в вычислении фундаментальных решений цилиндрических слоистых сред, как предложено в [2].

2. Конечной целью рассматриваемой задачи является расчет магнитного поля в скважине, что в данном случае можно сделать достаточно просто. При пересчете используются значения касательных компонент поля на образующей скважины, при этом используется алгоритм, предложенный в [3].

3. Поскольку в данном методе не используются фундаментальные решения цилиндрической слоистой среды, то задача может быть решена без принципиальных затруднений для произвольной зависимости электропроводности и диэлектрической проницаемости в зоне проникновения. Ограничения возникают при дискретизации и связаны с возрастанием числа узлов аппроксимации при достаточно быстрых изменениях параметров зоны проникновения.

4. Численная реализация данного метода может быть проведена на основе разработанного ранее алгоритма [3] с естественными изменениями и дополнениями.

Для дальнейшего систему уравнений (4) и (5) удобно записать в более компактной операторной форме

$$\varphi + \hat{P}_{11} \varphi + K_{12} \psi = f_1 \quad (6)$$

$$\varphi + P_{21} \varphi + K_{22} \psi = f_2, \quad (7)$$

где $\varphi = (E_\varphi, H_z)$, если $M \in L_c$,

$\psi = E_\varphi$, если $M \in \Omega_3$,

$(L_c = \{\rho = a, -\infty < z < \infty\})$,

\hat{P}_{11} — интегральный оператор, действующий на φ и переводящий ее в функцию, заданную на L_c ,

K_{12}, K_{22} — интегральные операторы, действующие на ψ и переводящие ее в функции, определенные соответственно на L_c и в Ω_3 , P_{21} — интегральный оператор, действующий на φ и переводящий ее в функцию, определенную в области Ω_3 , f_1 — поле источника, расположенного в однородной среде с параметрами скважины, на L_c , f_2 — поле того же источника в области Ω_3 .

Отметим, что в отсутствие зоны проникновения ядра интегральных операторов K_{12} и K_{22} обращаются в нуль, в силу чего система интегральных уравнений (6) — (7) распадается на два интегральных уравнения по образующей скважины (операторные уравнения (6) для определения φ) и интегральное представление для функции ψ (операторное соотношение (7)).

Для решения системы операторных уравнений (6) — (7) можно применить следующий итерационный процесс, идея которого состоит в последовательном решении операторных уравнений (6) и (7).

Для этого перепишем систему:

$$\varphi + \hat{P}_{11} \varphi = f_1 - K_{12} \psi, \quad (8)$$

$$\psi + K_{22} \psi = f_2 - P_{21} \varphi.$$

Предположим, что операторы \hat{P}_{11} и K_{22} системы (8) допускают построение резольвент

$$\hat{R}_\varphi = (\hat{E} + \hat{P}_{11})^{-1} \text{ и } R_\psi = (E + K_{22})^{-1}.$$

Поддействуем операторами R_φ и R_ψ на (8):

$$\begin{cases} \varphi = \hat{R}_\varphi f_1 - \hat{R}_\varphi K_{12} \psi, \\ \psi = R_\psi f_2 - R_\psi P_{21} \varphi, \end{cases} \quad (9)$$

$$\varphi_\eta = \hat{R}_\varphi f_1 - \hat{R}_\varphi K_{12} \psi_{\eta-1},$$

$$\psi_\eta = R_\psi f_2 - R_\psi P_{21} \varphi_{\eta-1},$$

$$\varphi = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi_\eta, \quad \psi = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \psi_\eta, \quad (10)$$

$$\varphi_0 = \hat{R}_\varphi f_1, \quad \psi_0 = 0.$$

Скорость сходимости этого итерационного процесса зависит от величины нормы соответствующих интегральных операторов, входящих в систему (9), т. е. в конечном итоге от электромагнитных параметров среды и частоты возбуждаемого электромагнитного поля.

В общем случае полученную систему необходимо решать методом дискретизации, сводя ее к соответствующей системе алгебраических уравнений. При этом выбор сетки в областях L_c и Ω_3 должен быть согласован.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Е. В. Метод расчета осесимметричных электромагнитных полей в неоднородных средах. — В кн.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
2. Несмеянова Н. И. Решение прямой задачи теории электромагнитного каротажа для модели «Скважина-пласт с зоной проникновения». — В кн.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.
3. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Ильин И. В. О методе численного решения задачи индукционного каротажа в неоднородных средах. — «Изв. АН СССР. Физика Земли», 1972, № 2.

Ё. В. ЗАХАРОВ

МЕТОД ЧАСТИЧНОГО ОБРАЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО КАРОТАЖА

Прямые задачи теории электромагнитного каротажа для осесимметричных моделей среды сводятся к системам одномерных интегральных уравнений по некоторым границам разрыва электромагнитных параметров [1]. Обычно часть этих границ является бесконечными, что вызывает определенные трудности при численном решении соответствующих интегральных уравнений. Сведение их к системам линейных алгебраических уравнений требует замены бесконечного интервала интегрирования конечным и исследования асимптотического поведения решения. В некоторых случаях интервал интегрирования может оказаться достаточно большим, что при дискретизации приведет к большому числу алгебраических уравнений. Для преодоления указанных трудностей может быть использован метод частичного обращения оператора [2]. Его применение в задачах каротажа оправдано в силу того, что для типичных операторов, возникающих в этих задачах, возможно явное построение резольвент.

Рассмотрим принцип применения метода частичного обращения оператора к прямым задачам теории электромагнитного каротажа на примерах достаточно простых, но в то же время типичных моделей среды. Будут рассмотрены задачи для следующих моделей: а — скважина — два полубесконечных пласта (рис. 1); б — скважина — пласт конечной мощности (рис. 2).

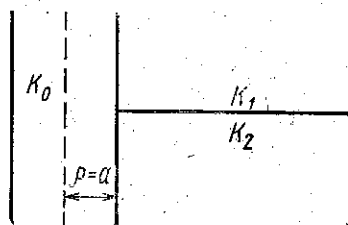


Рис. 1. Модель а

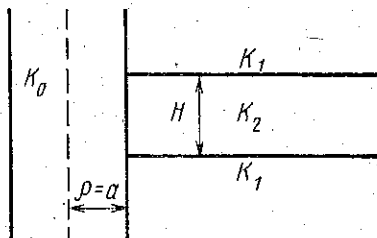


Рис. 2. Модель б

Для вывода интегральных уравнений воспользуемся методом работы [3]. Решение электродинамической задачи сводится к скалярной задаче в полуплоскости ($\rho > 0, \varphi = 0$) относительно компоненты $E_\varphi(\rho, z)$. Основную роль при выводе интегральных уравнений играет интегральное представление решения внутри некоторой области Ω , ограниченной контуром C [3]:

$$\ddot{u}(M) = \int_C \left\{ u(\rho) \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial u(\rho)}{\partial n} G + \frac{1}{\rho} u G \cos\left(\frac{\Delta}{n\rho}\right) dl_\rho - \int_2 GL \ddot{u} d\tau_\rho \right\}, (*)$$

где $G(M, \rho)$ — фундаментальное решение для уравнения, сопряженного уравнению $Lu = 0$.

1. Рассмотрим задачу для модели а Полупрямой $\{z = 0, \rho \geq 0\}$ полуплоскость разбивается на две области (I) $\{z > 0, \rho \geq 0\}$ и (II) $\{z < 0, \rho \geq 0\}$, а граничная задача сводится к системе интегральных уравнений по полупрямой $\{z = 0, \rho \geq 0\}$ относительно

$$u(\rho) \equiv E_\varphi(\rho, z = 0) \text{ и } v(\rho) \equiv \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}(\rho, z = 0):$$

$$\left. \begin{aligned} U(\rho) + \int_0^\infty U(r) \frac{\partial U}{\partial z} dr - \int_0^\infty F(r) F dr &= u^0(\rho) \\ v(\rho) + \int_0^\infty u(r) \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z_0} dr - \int_0^\infty v(r) \frac{\partial F}{\partial z_0} dr &= v^0(\rho) \end{aligned} \right\}, F \equiv G_1 - G_2 \quad (1)$$

где G_1 и G_2 — фундаментальные решения для областей (I) и (II) соответственно, u^0 и v^0 — поле источников возбуждения на линии $z = 0, \rho > 0$, помещенных в цилиндрические слоистые среды (I) или (II). Фундаментальное решение $G_{1,2}(M, P)$ можно выписать в явном виде с помощью преобразования Фурье по координате z . Например, при $\rho > a, r > a$

$$G(M, P) = r \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik_r R}}{R} \cos \varphi d\varphi + r \int_0^\infty g(\lambda, \rho, r) \cos \lambda(z - z_0) d\lambda,$$

где $g(\lambda, \rho, r) = 2\pi i H_1^{(1)}(\eta_1 \rho) H_1^{(1)}(\eta_1 r) B(\lambda)$,

$$B(\lambda) = \frac{\eta_1 J_1(\eta_0 a) J_0(\eta_1 a) - \eta_0 J_1(\eta_1 a) J_0(\eta_0 a)}{\eta_0 J_0(\eta_0 a) H_1^{(1)}(\eta_1 a) - \eta_1 J_1(\eta_0 a) H_0^{(1)}(\eta_1 a)},$$

$$\eta_i = \sqrt{\lambda^2 - k_i^2}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \varphi + (z - z_0)^2}.$$

2. Рассмотрим задачу для модели б (рис. 2). Прямой $\rho = a$ (образующая скважины) полуплоскость разбивается на область (I) $\{\rho > a, -\infty < z < \infty\}$ и (II) $\{\rho < a, -\infty < z < \infty\}$, а граничная

задача сводится к системе интегральных уравнений по прямой $\rho = a$ относительно $u(z) \equiv E_\varphi(\rho = a, z)$; $v(z) \equiv \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}(\rho = a, z)$:

$$\dot{u}(z) + \int_{-\infty}^\infty \left\{ u \left[\frac{\partial F}{\partial r} + F \right] - v F \right\} dz = u^0(z),$$

$$v(z) + \int_{-\infty}^\infty \left\{ u \left[\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \rho} + \frac{\partial F}{\partial \rho} \right] - v \frac{\partial F}{\partial \rho} \right\} dz = v^0(z), \quad F \equiv G_0 - G. \quad (2)$$

Функции G_0 и G — фундаментальные решения однородной и горизонтально-слоистой сред соответственно, $u^0(z)$ и $v^0(z)$ — поле источника возбуждения в однородной среде с параметрами скважины. Функция $G_0(M, P)$ имеет вид

$$G_0(M, P) = r \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik_r R}}{R} \cos \varphi d\varphi,$$

Явное выражение для $G(M, P)$ можно получить, применяя преобразование Ханкеля по координате ρ . Например, при $|z| > H, |z_0| > H$ эта функция имеет вид

$$c(M, P) = r \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik_r R}}{R} \cos \varphi d\varphi + r \int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda \rho) g(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda.$$

Итак, обе задачи сведены к интегральным уравнениям на неограниченных интервалах. Для применения метода частичного обращения оператора необходимо выделить интегральный оператор, который допускает явное построение резольвенты. Для рассматриваемых моделей такое выделение возможно. Представим ядра интегральных операторов в виде суммы двух слагаемых:

$$w(\rho) + \int_0^\infty \{ \hat{K}(\rho, z) + \hat{P}(\rho, z) \} w dr = f(r) \quad (3)$$

для уравнения (1) и

$$w(z_0) + \int_{-\infty}^\infty \{ \hat{K}(|z - z_0|) + \hat{P}(\rho, z_0) \} w(z) dz = f(z) \quad (4)$$

для уравнения (2), где элементы матрицы \hat{K} представляют собой функции вида

$$r \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{e^{ik_r R}}{R} - \frac{e^{ik_a R}}{R} \right\} \cos \varphi d\varphi.$$

Иными словами, для модели а строится резольвента той части интегрального оператора, которая описывает электромагнитное поле

в плоскопараллельной переменной слоистой среде (два полупространства, разделенные плоскостью $z=0$). Для модели б строится резольвента интегрального оператора, соответствующего цилиндрической слоистой среде (скважина — пласт бесконечной мощности). Проведем построение этих резольвент.

1. Интегральное уравнение (3) с оператором $K(\rho, z)$ принимает вид

$$u(\rho) - \int_0^{\infty} v(r) \left\{ \int_0^{\infty} J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda r) f(\lambda, \eta_1, \eta_2) \lambda d\lambda \right\} r dr = u_0(\rho),$$

$$v(\rho) + \int_0^{\infty} u(r) \left\{ \int_0^{\infty} J_1(\lambda\rho) J_1(\lambda r) \eta_1 \eta_2 f(\lambda, \eta_1, \eta_2) \lambda d\lambda \right\} r dr = v_0(\rho),$$

где $f(\lambda, \eta_1, \eta_2) = (\eta_2 - \eta_1) / \eta_1 \eta_2$.

Применим к уравнениям преобразование Ханкеля, для чего умножим все уравнения на $\rho J_1(\nu\rho)$ и проинтегрируем по ρ . Получим следующую систему алгебраических уравнений относительно образов искомых функций

$$u(\nu) = \int_0^{\infty} J_1(\nu\rho) u(\rho) \rho d\rho, \quad v(\nu) = \int_0^{\infty} J_1(\nu\rho) v(\rho) \rho d\rho;$$

$$\begin{cases} u(\nu) - \xi_1 \xi_2 f(\nu) v(\nu) = u_0(\nu), \\ v(\nu) + f(\nu) u(\nu) = v_0(\nu), \quad \xi_{1,2} = \sqrt{\nu^2 - k_{1,2}^2}, \end{cases} \quad (6)$$

откуда

$$\bar{u}(\nu) = \frac{1}{\Delta} [u_0(\nu) + \xi_1 \xi_2 f(\nu) v_0(\nu)], \quad (7a)$$

$$\bar{v}(\nu) = \frac{1}{\Delta} [v_0(\nu) - f(\nu) u_0(\nu)], \quad (7b)$$

где $\Delta \equiv 1 + \xi_1 \xi_2 f(\xi_1, \xi_2, \nu)$.

Если взять обратное преобразование от функций u и v , получим выражение для резольвенты оператора \hat{K} . Но в такой операции нет необходимости, так как элементы матрицы $\hat{P}(r, \rho)$ можно представить в виде преобразования Ханкеля и перейти к образам искомых функций.

В уравнении (4) резольвента интегрального оператора \hat{K} существует и может быть эффективно построена методом Фурье [4].

Применив к уравнению (4) (при $\hat{P}(z, z_0) \equiv 0$) преобразование Фурье, будем иметь следующее представление решения:

$$\omega(z_0) = F(z_0) - \frac{a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(z_0 - z) F(z) dz, \quad (8)$$

где $\hat{\gamma}(z_0 - z)$ — резольвента оператора $(E + \hat{K})^{-1}$,

$$(E + \hat{K})^{-1} = E - \Gamma,$$

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda,$$

$$\hat{\Gamma}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\Gamma_{11} = \{ \eta_1 I_0(a\eta_1) K_1(a\eta_1) - \eta_0 I_0(a\eta) K_1(a\eta_0) \} \frac{K_1(a\eta_1)}{\Delta(\lambda) K_1(a\eta_0)},$$

$$\Gamma_{12} = i\omega\mu \{ I_1(a\eta_1) K_1(a\eta_1) - I_1(a\eta) K_1(a\eta_1) \} \frac{\eta_1 K_0(a\eta_1)}{\Delta(\lambda) \eta_0 K_0(a\eta)},$$

$$\Gamma_{21} = -\frac{i}{\omega\mu} \{ \eta_0^2 I_0(a\eta_0) K_0(a\eta_0) - \eta_1^2 I_0(a\eta_1) K_0(a\eta_1) \} \frac{K_1(a\eta_1)}{\Delta(\lambda) K_1(a\eta_1)},$$

$$\Gamma_{22} = \{ \eta_0 I_0(a\eta_0) K_1(a\eta_0) - \eta_1 I_0(a\eta_1) K_1(a\eta_1) \} \frac{\eta_1 K_0(a\eta_1)}{\Delta(\lambda) \eta_0 K_0(a\eta_0)},$$

$$\Delta = \eta_1 I_1(a\eta_0) K_0(a\eta_1) + \eta_0 K_1(a\eta_1) I_0(a\eta).$$

Итак, резольвенты операторов \hat{K} в уравнениях (1) и (2) построены. Так как радиус скважины и мощность пласта конечны, а проводимость всюду отлична от нуля, то ядра операторов \hat{P} порождают вполне непрерывный оператор. Подействовав оператором $\hat{R} = (E + \hat{K})^{-1}$, получим системы интегральных уравнений типа Фредгольма (произведение резольвентного оператора и оператора \hat{P} вполне непрерывно), т. е.

$$\omega + \hat{R}\hat{P}\omega = \hat{R}F \quad (10)$$

с вполне непрерывным оператором $\hat{R}\hat{P}$ и известной правой частью $\hat{R}F \equiv \omega_0$. При условии, что оператор \hat{P} достаточно мал по норме соответствующего функционального пространства, уравнение (10) можно решать методом последовательных приближений, т. е. представить его решение в виде ряда, сходящегося со скоростью геометрической прогрессии. Отметим, что правая часть ω_0 уравнения (10) представляет собой решение исходной задачи для цилиндрической слоистой среды (модель а) или плоскопараллельной слоистой среды (модель б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. Метод интегральных уравнений в задачах электромагнитного каротажа скважин. — В кн.: Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численных методах решения некоторого класса дифракционных задач. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 13. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969.
3. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 28. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978.
4. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

А. С. БАРАШКОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ В СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одним из основных методов восстановления распределения электронной концентрации в ионосфере является метод вертикального зондирования. Этим методом в эксперименте получают высотно-частотную характеристику (ВЧХ), т. е. $f(t)$ — зависимость времени пробега электромагнитного импульса до ионосферы и обратно в зависимости от частоты. Чаще употребляется эквивалентная величина — действующая высота отражения $h(f) = (ct(f))/2$, где c — скорость света в пустоте. Так как ионосфера представляет собой анизотропную среду ввиду влияния магнитного поля Земли, то в ионосфере распространяются две волны. Поэтому эксперимент дает две функции $h(f)$: так называемую θ -компоненту $h_\theta(f)$ и x -компоненту $h_x(f)$. По этим функциям и надо определять распределение электронной концентрации в ионосфере $N(x, y, z)$.

По современным представлениям ионосфера имеет в основном слоистое строение, т. е. характеризуется функцией одной переменной $N(z)$. Принято называть обратную задачу вертикального зондирования задачей восстановления $N(h)$ -профиля ($h \equiv z$).

Типичный пример $N(h)$ -профиля показан на рис. 1. Возрастающие участки функции называются слоями (нижний — E -слоем, верхний — F -слоем). Иногда слоев бывает больше двух.

Типичный пример функций $h_\theta(f)$ и $h_x(f)$ показан на рис. 2. Эти функции принято называть ионограммами.

Все известные методы обработки ионограмм, как и предлагаемый в этой статье, используют приближение геометрической оптики. В этом приближении механизм распространения радиоимпульсов имеет следующий качественный характер. Импульс проходит нижние слои ионосферы, доходит до участка с определенной концентрацией (чем выше частота, тем больше эта концентрация), отражается и идет назад, где и измеряется приемной аппаратурой.

Частоты, соответствующие максимальным концентрациям слоев, называются критическими. В силу разных причин в окрестности этих частот функции $h_o(f)$ и $h_x(f)$ в эксперименте не измеряются.

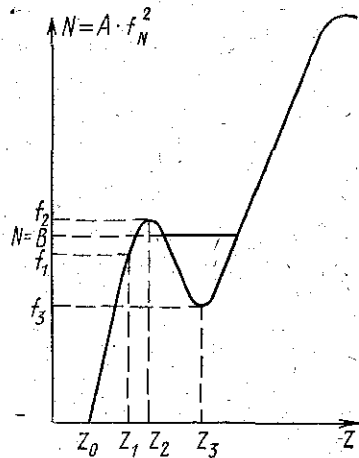


Рис. 1. Немонотонный $N(h)$ -профиль

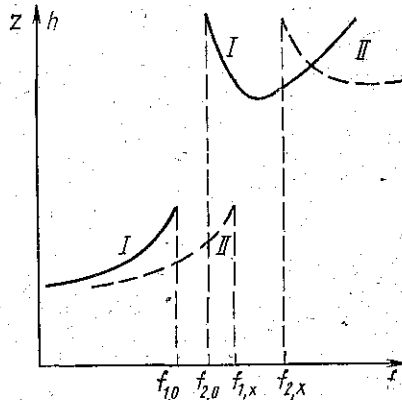


Рис. 2. Ионограмма, соответствующая немонотонному $N(h)$ -профилю: I — обыкновенная компонента; II — необыкновенная компонента

§ 1. ОБСУЖДЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ, ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Существует много работ, посвященных решению обратной задачи вертикального зондирования, в частности задаче определения межслоевой ионизации по двум компонентам ионограмм [1—9]. Исследования ведутся в основном численно. В связи с некорректностью задачи [10, 11] в зависимости от алгоритма и выбранной модели получаются результаты, сильно отличающиеся друг от друга. При этом все такие решения нельзя признать удовлетворительными по двум причинам: во-первых, из-за большой неопределенности полученного решения, во-вторых, из-за плохого соответствия рассчитанных по найденному $N(h)$ -профилю ионограмм реальным ионограммам. Полученное несоответствие объясняется разными неблагоприятными условиями: малой точностью измерений, горизонтальными градиентами и пр., но такое несоответствие можно объяснить и плохим выбором модели. В связи с этим представляет интерес выяснение двух вопросов: какую максимальную информацию относительно $N(h)$ -профиля можно извлечь из ионограмм при выполнении всех благоприятных условий (отсутствие горизонтальных градиентов, высокая точность измерений и пр.) и каким

образом делать обоснованный вывод о том, что данные ионограммы соответствуют неслоистой ионосфере?

При идеальных условиях ионограммы связаны с $N(h)$ -профилем уравнениями

$$z_0 + \int_{z_0}^z \mu'_{0,x} \left(H, \frac{f_N}{f} \right) dz = h'_{0,x}(f), \quad (1)$$

где z_0 — расстояние от станции зондирования до начала ионосферы; z_1 — истинная высота отражения. $\mu_{0,x}$ — групповой показатель преломления; f_N — плазменная частота; f — частота зондирования; $h'_{0,x}$ — действующая высота отражения; H — вектор геомагнитного поля; $N = 1,24 \cdot 10^4 f_N^2$.

Для O-компоненты в точке отражения $f_N = f$, для x-компоненты $f_N = \sqrt{f^2 - f_n^2}$, f_n — гирочастота электронов, $f_n = 480,6 H/54\pi$.

Предположим, что существует $N(h)$ -профиль, удовлетворяющий уравнению (1). Какую информацию можно получить о функции $N(h)$ по функциям $h'_{0,x}(f)$? Другими словами, задача состоит в нахождении максимально широкого класса единственности для уравнений (1).

Существенный момент при решении (1) заключается в том, что правая часть $h'_{0,x}(f)$ известна не при всех частотах f . Выпадают низкие частоты и частоты из окрестности критической частоты. (В дальнейшем будем рассматривать ионограммы с одной критической частотой, соответствующей «долине» между E- и F-слоями. Это, естественно, не ограничивает общности.)

Рассмотрим задачу определения $N(h)$ -профиля на участке до первого максимума (восстановление E-слоя). В этом интервале функция $N(h)$ — возрастающая. Поэтому в этом случае надо восстанавливать монотонную функцию при условии, что $h'_{0,x}(f)$ неизвестны при малых значениях f . В дальнейшем будет показано, что эта задача имеет единственное решение. Поэтому можно считать, что функция $N(h)$ известна на участке $0 < z < z_1$ (см. рис. 1). Уравнение (1) для $f > f_{кр}$ можно тогда записать в виде

$$\int_{z_1}^z \mu'_{0,x} dz = h'_{0,x}(f) - z_0 - \int_{z_0}^{z_1} \mu'_{0,x} dz = q'_{0,x}(f). \quad (2)$$

Правая часть (2) теперь известная функция. Функция $N(z)$ при $z > z_1$ уже не является монотонной. Предположим, что уравнению (1), а стало быть и (2), удовлетворяет некоторая функция $N(z)$. Рассмотрим следующую характеристику функции $N(z)$. Введем монотонную функцию $B(\bar{z})$ по правилу $\bar{z}(B) = \mathfrak{M}(M)$, где $\mathfrak{M}(M)$ — мера множества $M = \{z : z > z_1; N(z) \leq B\}$.

Смысл этой функции следующий. На высоте B проводим прямую $N=B$. Длина отрезков этой прямой, расположенных выше

графика функции $N(z)$, будет равна значению функции $\bar{z}(B)$. Ясно, что среди немонотонных функций существует много функций с одинаковыми характеристиками $B(z)$ и все эти функции при подстановке в (2) дадут один и тот же результат. В самом деле, рассмотрим для простоты ситуацию, изображенную на рис. 1.

Введем функции $f_1(z) = f_N(z)$ при $z_1 < z < z_2$; $f_2(z) = f_N(z)$ при $z_2 < z < z_3$; $f_3(z) = f_N(z)$ при $z > z_3$ и обратные им $z_1(f_N)$ при $f_1 < f_N < f_2$; $z_2(f_N)$ при $f_2 > f_N > f_3$; $z_3(f_N)$ при $f_N > f_3$. Тогда можно записать

$$\int_{z_1}^z \mu'_{0,x} dz = \int_{z_1}^{z_2} \mu'_{0,x} dz + \int_{z_2}^{z_3} \mu'_{0,x} dz + \int_{z_3}^z \mu'_{0,x} dz = \\ = \int_{f_1}^{f_2} \mu'_{0,x} z_1' df_N + \int_{f_2}^{f_3} \mu'_{0,x} z_2' df_N + \int_{f_3}^f \mu'_{0,x} z_3' df_N. \quad (3)$$

Теперь доопределим функции $z_{1,2}(f_N)$:

$$z_1'(f_N) = 0 \text{ на интервалах } f < f_1, f > f_2,$$

$$z_2'(f_N) = 0 \text{ на интервалах } f > f_2, f < f_3.$$

Равенство продолжится следующим образом:

$$\int_{f_1}^{f_2} \mu' z_1' df_N + \int_{f_2}^{f_3} \mu' z_2' df_N + \int_{f_3}^f \mu' z_3' df_N = \int_{f_1}^f \mu' z_1' df_N + \int_{f_3}^f \mu' (-z_2') df_N + \\ + \int_{f_3}^f \mu' z_3' df_N = \int_{f_3}^f \mu' (z_1' - z_2' + z_3') df_N = \int_{f_3}^f \mu' dz(f_N). \quad (4)$$

Можно рассчитывать по $h'_{0,x}(f)$ найти функцию $\bar{z}(f_N)$ — монотонный эквивалент функций $N(z)$. Отметим, что «глубину» и «ширину» долины по функции $\bar{z}(f_N)$ можно определить. В частности «ширина» равняется значению $\bar{z}(f_2)$. Для определения $\bar{z}(f_N)$ приходим к той же задаче, что и раньше: по функциям $h_{0,x}(f)$, известным для $f \geq f_{0,x} > 0$, восстановить монотонную функцию $f_N(z)$ или $\bar{z}(f_N)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функции $h_{0,x}(f)$ известны в интервалах $f_{0,x,1} < f < f_{0,x,2}$. Пусть $\alpha \neq 0$, где α — угол между волновой нормалью и направлением геомагнитного поля. Тогда на отрезке $0 < f < \bar{f}$, где $\bar{f} = \max(f_{0,2}, \sqrt{f_{x,2}^2 - f_N f_{x,2}})$, система уравнений (1) имеет единственное решение в классе функций $z(f_N)$ с кусочно-непрерывной первой производной.

Таким образом, монотонный эквивалент $N(h)$ -профиля, в определенном раньше смысле, восстанавливается однозначно.

Рассмотрим вопрос о существовании решения уравнений (1) для реальных ионограмм.

Теорема 2. Для любых гладких функций $h_{0,x}(f)$ и для произвольного $\epsilon > 0$ при $\alpha \neq 0$ найдутся непрерывная функция $z'(f)$ и число z_0 , такие, что на отрезках $0 < f_{0,x,1} < f < f_{0,x,2}$ выполняются неравенства

$$\|z_0 + \int_0^f \mu' z' df_N - h'_{0,x}(f)\|_{L_2} < \epsilon,$$

где

$$\|\varphi(f)\|_{L_2}^2 = \int_{f_{0,x,1}}^{f_{0,x,2}} \varphi^2(f) df.$$

Заметим, что в теореме ничего не говорится о знаке $z'(f)$, поэтому существуют такие функции $h_{0,x}(f)$, что им соответствует решение с отрицательной производной $z'(f_N)$. Так как рассматривается максимально широкая одномерная модель немонотонных функций, то при получении такого результата остается сделать вывод, что реальная ионосфера не является слоистой (либо вообще уравнение 1 по каким-либо причинам несправедливо).

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 (ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ)

В этом параграфе будет доказана теорема 1 для частного случая $\alpha = \pi/2$. Удобней писать выражение для показателя преломления через циклическую частоту ω .

В рассматриваемом случае [12, 13]

$$n_0^2(\omega, \omega_0) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (5)$$

$$n_x^2(\omega, \omega_0) = 1 - \frac{\omega_0^2 (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2) \omega^2 - \omega_H^2 \omega^2},$$

где ω_0 — плазменная частота, ω_H — гирочастота для электронов. Уравнения (1) можно переписать в виде

$$h_0(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \omega \int_0^{z_0(\omega)} n_0(\omega, \omega_0) dz \right\}, \quad (6)$$

$$h_x(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \omega \int_0^{z_x(\omega)} n_x(\omega, \omega_0) dz \right\},$$

где $z_0(\omega): n_0(\omega, \omega_0(z_0)) = 0$, т. е. $\omega_0(z_0) = \omega$, $z_x(\omega): n_x(\omega, \omega_0(z_x)) = 0$,

т. е. $\omega_0(z_x) = \sqrt{\omega(\omega - \omega_H)}$.

Левые части уравнений известны для $\omega > \omega_{1,2} > 0$. Докажем теорему 1.

Доказательство. Вначале разберем случай возрастающих функций $N(z)$, т. е. $N(0) = 0$, $N'(z) > 0$ для $z > 0$. Первое из уравнений (6) можно записать в виде

$$h_0(\omega) = \int_0^{z_0(\omega)} \frac{dz}{\sqrt{1 - \omega_0^2(z)/\omega^2}}.$$

Введем функцию, обратную $\omega_0^2(z) = z(\omega_0^2)$, и для удобства введем обозначения

$$y = \omega_0^2; \quad x = \omega^2; \quad \Psi(x) = \frac{h_0(x)}{\sqrt{x}}. \quad (7)$$

Тогда

$$\Psi(x) = \int_0^x \frac{dz(y)}{\sqrt{x-y}}. \quad (8)$$

Отсюда [14]

$$z(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\Psi(y)}{\sqrt{x-y}} dy.$$

Из условий, наложенных на $N(z)$, следует, что $\Psi(x)$ представим в виде $\Psi(x) = \sqrt{x} \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция. Легко видеть, что (9) можно переписать в виде

$$z(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^x \sqrt{x-y} \Psi(y) dy. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь второе уравнение (6). Проинтегрируем его от ω_2 до ω :

$$\mu(\omega) = \int_{\omega_2}^{\omega} h_x(\xi) d\xi = \omega \int_0^{z_x(\omega)} h_x(\omega, \omega_0) dz - \omega_2 \int_0^{z_x(\omega_2)} h_x(\omega; \omega_0) dz.$$

Отсюда

$$\omega \int_0^{z_x(\omega)} h_x(\omega, \omega_0) dz = \mu(\omega) + c, \quad (10)$$

где $\mu(\omega)$ — функция, известная при $\omega > \omega_2$, а c — неизвестная константа. Переходя от функции $\omega_0^2(z)$ к функции $z(\omega_0^2) = z(y)$ и меняя порядок интегрирования, получаем из (10)

$$\begin{aligned} \mu(\omega) + c &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega(\omega - \omega_H)} \omega n_x(\omega, \sqrt{y}) \left\{ \int_0^y \frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{y-\xi}} \right\} dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega(\omega - \omega_H)} \Psi(\xi) K(\omega, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

В последнем интеграле введено обозначение

$$K(\omega, \xi) = \int_0^{\omega(\omega - \omega_H)} \sqrt{\frac{(\omega(\omega - \omega_H) - y)(\omega(\omega + \omega_H) - y)}{(\omega^2 - \omega_H^2 - y)(y - \xi)}} dy. \quad (12)$$

Все написанные интегралы существуют, так как входящие в них функции имеют, самое большее, интегрируемые особенности.

Теперь воспользуемся тем, что функция $\Psi(\xi)$ известна при $\xi > x_{01}$. Левая часть выражения

$$\mu(\omega) + c = \frac{2}{\pi} \int_{x_{0,1}}^{\omega(\omega - \omega_H)} \Psi(\xi) K(\omega, \xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_{0,1}} \Psi'(\xi) K(\omega, \xi) d\xi \quad (13)$$

известная функция с точностью до произвольной постоянной. Обозначаем эту функцию $2/\pi(f(\omega) + c)$, получаем уравнение

$$\int_0^{x_{0,1}} \Psi'(\xi) K(\omega, \xi) d\xi = f(\omega) + c. \quad (14)$$

Заметим, что $K(\omega, \xi)$ — функция, аналитическая по ω при $\xi < x_{0,1}$ и достаточно больших ω . В самом деле, введем новую переменную η соотношением $y = \xi + (\omega(\omega - \omega_H) - \xi)\eta$. Запишем (12) в виде

$$\begin{aligned} K(\omega, \xi) &= (\omega(\omega - \omega_H) - \xi) \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{\eta}} \times \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{\omega(\omega + \omega_H) - \xi - [\omega(\omega - \omega_H) - \xi]\eta}{\omega^2 - \omega_H^2 - \xi - [\omega(\omega - \omega_H) - \xi]\eta}} \right\} d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\omega(\omega + \omega_H) > \omega(\omega - \omega_H)$ и $\omega^2 \omega_H^2 > \omega(\omega - \omega_H)$ при $\omega > \omega_H$, то корень в фигурных скобках можно разложить в ряд по ω , равномерно сходящийся относительно $\xi > x_{0,1}$ и η . Отсюда следует аналитичность $K(\omega, \xi)$ по ω при $\omega > \omega_H$ и, следовательно, аналитичность $f(\omega)$ при $\omega > \omega_H$.

Заметим, что функция $K(\omega, \xi)$ определена и дифференцируема при любых комплексных ω . Следовательно, функция $f(\omega)$ допус-

кает аналитическое продолжение в полуплоскость $\text{Im } \omega > 0$ и в силу единственности аналитического продолжения определена в этой полуплоскости однозначно.

Рассмотрим уравнение (14) в полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$. Правая часть этого уравнения известна в той же полуплоскости с точностью до константы.

Рассмотрим равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{x_{0,1}} \Psi'(\xi) K(\delta + i\varepsilon, \xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\delta + i\varepsilon) + c. \quad (16)$$

Так как функция $K(\omega, \xi)$ может иметь, самое большое, интегрируемые особенности по ξ (точнее, логарифмическую особенность при $\xi = \omega^2 - \omega_H^2$), то в (16) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Обозначим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} K(\delta + i\varepsilon, \xi) = K(\delta, \xi), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\delta + i\varepsilon) = f(\delta).$$

Рассмотрим $K(\delta, \xi)$ при различном соотношении δ с ξ . Введем новые переменные

$$u = \delta(\delta - \omega_H); \quad v = \delta^2 - \omega_H^2; \quad s = \delta^2(\delta + \omega_H).$$

При $0 < \delta < \omega_H$ выполняется неравенство $v < u < 0 < s$.

Если $\xi < s$, то

$$K(\delta, \xi) = - \int_u^\xi \sqrt{\frac{(u-y)(s-y)}{(v-y)(y-\xi)}} dy. \quad (17)$$

При указанном расположении ξ и δ выражение (17) — чисто мнимое:

$$K(\delta, \xi) = -i \int_u^\xi \sqrt{\frac{|(u-y)(s-y)|}{|(v-y)(y-\xi)|}} dy.$$

При $\xi > s$ имеем

$$\begin{aligned} K(\delta, \xi) &= \int_\xi^s \sqrt{\frac{(u-y)(s-y)}{(v-y)(y-\xi)}} dy + \int_s^u \sqrt{\frac{(u-y)(s-y)}{(v-y)(y-\xi)}} dy = \\ &= - \int_s^\xi \sqrt{\frac{|(u-y)(s-y)|}{|(v-y)(y-\xi)|}} dy - i \int_u^s \sqrt{\frac{|(u-y)(s-y)|}{|(v-y)(y-\xi)|}} dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$\text{Re} \int_0^{x_{0,1}} K(\delta, \xi) \Psi'(\xi) d\xi = \text{Re} \{f(\delta)\} + c.$$

Его можно записать в виде

$$\int_0^{x_{0,1}} \{ \text{Re} K(\delta, \xi) \} \Psi'(\xi) d\xi = \{ \text{Re} f(\delta) \} + c,$$

но

$$\text{Re} K(\delta, \xi) = \begin{cases} 0 & \xi \leq s \\ M(\delta, \xi) = \int_\xi^s \sqrt{\frac{(u-y)(s-y)}{(v-y)(y-\xi)}} dy, & \xi \geq s. \end{cases}$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\int_s^{x_{10}} M(\delta, \xi) \Psi'(\xi) d\xi = \text{Re} f(\delta) + c.$$

Если $\omega_H(\omega_H + \omega_H) \geq x_{10}$, то получено уравнение Вольтерра, которое, как нетрудно видеть, имеет единственное решение. В самом деле, запишем последнее уравнение в виде

$$\int_s^{x_{10}} M(s, \xi) \Psi'(\xi) d\xi = q(s) + c. \quad (18)$$

Здесь

$$M(s, \xi) = (s - \xi) \int_0^1 \sqrt{\frac{u - \xi - (s - \xi)\eta}{v - \xi - (s - \xi)\eta}} \frac{\sqrt{1 - \eta}}{\sqrt{\eta}} d\eta,$$

$$q(s) = \text{Re} f(\delta).$$

Функции $u(\omega) < 0 < s$ и $v(\omega) < 0 < s$ можно выразить через s , причем это будут дифференцируемые функции. Отсюда следует, что $M(s, \xi)$ — дифференцируемая функция:

$$M(s, -s) = 0, \quad M'_s(s, s) \neq 0.$$

Таким образом, если продифференцировать (18) два раза, то получим уравнение Вольтерра второго рода, имеющее не более одного решения:

$$-M'_s(s, s) \Psi'(s) + \int_s^{x_{10}} M''_s(s, \xi) \Psi'(\xi) d\xi = q''(s). \quad (19)$$

Аналогично рассматривается случай, когда $\omega_H(\omega_H + \omega_H) < x_{10}$. При этих значениях параметров тоже получается уравнение Вольтерра второго рода, имеющее не более одного решения. Тем самым функция $\Psi'(\xi)$ однозначно определяется при всех значениях ξ .

По формуле (9) можно определить функцию $z(y)$ и, стало быть, $N(z)$.

Рассмотрим случай, когда

$$N(z) = 0, \quad z < z_0; \quad N'(z) > 0, \quad z > z_0. \quad (20)$$

Покажем, что уравнение (19) имеет место и в этом случае, хотя все промежуточные выкладки уже неправомерны, так как функция $\Psi'(\xi) = 0(\xi^{-3/2})$ для этого случая неинтегрируема на любом отрезке, содержащем точку $\xi = 0$.

Итак, пусть данным функциям $h_{0,x}(f)$ удовлетворяет некоторая функция вида (20). Рассмотрим последовательность функций $N_k(z)$, равномерно сходящуюся к $N(z)$ при $k \rightarrow \infty$:

$$N_k(z) = \frac{1}{k} z, \quad 0 < z < z_k; \quad z_k: \frac{1}{k} z_k = N(z_k); \quad N_k(z) = N(z), \quad z \geq z_k.$$

Совершенно очевидно, что соответствующие функции $h_{0,x}^{(k)}(f)$ будут равномерно сходиться к функциям $h_{0,x}(f)$ вместе со своими производными на любом интервале $\xi \geq \delta > 0$. Для функций $\Psi'_k(\xi)$ уравнение (19) выполняется по доказанному. Переходя в этих уравнениях к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что и функция $\Psi(\xi)$, соответствующая $N(z)$ вида (20), удовлетворяет тем же самым уравнениям. Теорема доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 (ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ)

Легко видеть, что доказательство теоремы сводится к вопросу о разрешимости уравнения (14) при произвольной правой части, которую мы обозначим через $v(\omega)$:

$$\int_0^{x_{01}} \Psi'(\xi) K(\omega, \xi) d\xi = v(\omega). \quad (14')$$

В самом деле, если с помощью выбора функции $\Psi'(\xi)$ можно как угодно близко приблизить функцию $v(\omega)$ вместе с ее производными, то по формуле (7) найдем функцию $z(N)$, которая по (14) с нужной точностью приблизит $h_x(f)$ на заданном интервале. Итак, докажем, что множество функций

$$\int_0^{x_{01}} \varphi(\xi) K(\omega, \xi) d\xi = \Phi(\omega), \quad (21)$$

где $\varphi(\xi) \in L_2(0, x_{01})$, плотно в пространстве $L_2(\omega_{x1}, \omega_{x2})$ (т. е. любую функцию можно как угодно точно приблизить функциями вида

(21)). Для этого достаточно доказать, что если для функции $f(\omega)$ при любых $\varphi(\xi)$ выполняется равенство [15]

$$\int_{\omega_{x1}}^{\omega_{x2}} \Phi(\omega) f(\omega) d\omega = 0, \quad (22)$$

то $\Phi(\omega) = 0$. Докажем сначала, что совокупность функции $K(\omega, \xi)$, где $0 < \xi < x_{01}$, всюду плотна в $L_2(\omega_{x1}, \omega_{x2})$. Этого будет достаточно.

Действительно, любую функцию $f(\omega)$ можно приблизить линейными комбинациями функций $K(\omega, \xi)$, т. е.

$$\left\| f(\omega) - \sum_{i=1}^n a_i K(\omega, \xi_i) \right\| < \varepsilon/2. \quad (23)$$

Легко видеть, что функцию $K(\omega, \xi_i)$ можно приблизить с любой точностью функциями вида (21). Для этого рассмотрим δ -образную последовательность $\varphi_k(\xi) \rightarrow \delta(\xi - \xi_i)$. Тогда

$$\int_0^{x_{01}} \varphi_k(\xi) K(\omega, \xi) d\xi \rightarrow K(\omega, \xi_i)$$

на отрезке $[\omega_{x1}, \omega_{x2}]$. Выбрав для каждого i достаточно большой номер k_i , получим, используя (23), оценку

$$\left\| f(\omega) - \sum_{i=1}^n \Phi_{i, k_i} \right\| < \varepsilon.$$

Итак, достаточно доказать, что из равенства

$$\int_{\omega_{x1}}^{\omega_{x2}} K(\omega, \xi) f(\omega) d\omega = 0, \quad f(\omega) \in L_2(\omega_{x1}, \omega_{x2}), \quad 0 < \xi < x_{01}, \quad (24)$$

следует равенство $f(\omega) = 0$.

Соотношение (24) можно рассматривать как интегральное уравнение для определения функции $f(\omega)$. Как и в § 2, уравнение (24) можно свести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, откуда уже следует нужный результат. Теорема 2 доказана.

Из доказанных результатов следует, что полностью определить $N(h)$ -профиль по ионограммам невозможно. В то же время показано, что достаточно полная информация о $N(h)$ -профиле может быть определена, а именно определяются несколько монотонных функций (по числу слоев), каждая из которых совпадает с функцией $N(h)$ в соответствующем слое. По этим функциям можно делать некоторые заключения и о межслоевой ионизации, в частно-

сти можно определить «ширину» и «глубину» долины. Изучен вопрос разрешимости уравнений (существования решения). Для этого введен класс функций, не все представители которого можно интерпретировать как $N(h)$ -профили, но в котором задача разрешима для любых входных данных. Этот результат может быть использован для выяснения вопроса, является ли ионосфера, соответствующая конкретным экспериментальным ионограммам, слоистой или не является.

При численной реализации предложенного метода потребуется искать решение в классе монотонных ограниченных функций. Эта задача корректна по Тихонову и достаточно подробно изучена [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Барашков А. С., Дмитриев В. И. Численное решение обратных задач наклонного электромагнитного зондирования ионосферы. — «Геоматематизм и аэрономия», 1974, т. 14, с. 261.
2. Titering I. E. Ray-parts in the ionosphere. Approximate calculations in the presence of the earth's magnetic field. — „J. Atmos. Ferr. Phys.“, 1959, 14, p. 50.
3. Budden K. G. The numerical solution of differential equations governing reflection of long radio waves from the ionosphere. — „Proc. Roy. Soc.“, 1955, 227, p. 516.
4. Roy R., Verma J. K. Polarization of electromagnetic waves for vertical propagation in the ionosphere. — „J. Geophys. Res.“, 1955, 60, p. 457.
5. Paul A. K. Aktiv Hochfrequenzspectrometer fur ionospharish Echolotung. — „Arch. Elek. Ubertragung“, 1960, 14, p. 468; 1960, 14, p. 561.
6. Farley D. T. Artificial heating of the electrons in the F-region of the ionosphere. — „J. Geophys. Res.“, 1963, 68, p. 401.
7. Мальцева О. А. Контроль корректирующего метода расчета $N(h)$ -профилей по тестовым моделям. — «Геоматематизм и аэрономия», 1974, т. 14, с. 53.
8. Данилкин Н. П., Денисенко П. Ф., Соцкий В. В. Расчет $N(h)$ -профилей ионосферы методом квадратичного программирования. — «Геоматематизм и аэрономия», 1975, т. 15, с. 355.
9. Dournik J. R., Schmerling E. R. The reduction of ionograms from the bottomside and topside. — „J. Atm. Terr. Phys.“, 1965, 27, p. 917.
10. Тихонов А. Н., Арсеньев В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
11. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, «Наука», 1962.
12. Дэвис К., Саха А. К. Распределение электронной концентрации в ионосфере и экзосфере. М., «Мир», 1964.
13. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука», 1967.
14. Забрейко П. П. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
15. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., «Наука», 1965.
16. Гончарский А. В., Ягола А. Г. О равномерном приближении монотонных решений некорректных задач. — ДАН, 1969, т. 184, № 4, с. 771—773.