Математический бой. ВМиК МГУ, 5 декабря 2009.

1. Дано вещественное евклидово пространство непрерывных вещественных функций, заданных на отрезке $[0,1]$, со скалярным произведением $(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Доказать, что элемент $t^\alpha, \alpha \geqslant 0$, принадлежит замыканию линейной оболочки элементов $t^{\alpha_i},\ 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ ..., \alpha \neq \alpha_i$, тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} = +\infty$.

---

2. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим образом:
$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}, n \geqslant 1.$$
Найти все a , при которых последовательность $\{x_n\}$ определена и имеет конечный предел.

---

3. При натуральных m, i, j обозначим через $N_m(i,j)$ количество решений уравнения
$$j = x_1^m + \ldots + x_i^m$$
в целых неотрицательных числах. Докажите, что при любых натуральных m, n
$$\det(N_m(i,j))_{i,j=1}^n = 1.$$

---

4. Сколькими способами можно выложить прямоугольную площадку длины 14 и ширины 4 с помощью прямоугольной плитки длины 2 и ширины 1?

---

5. Человек пьет воду из конического бокала, наклоняя его с постоянной угловой скоростью. При каком угле наклона «расход воды» максимален? При каком угле наклона площадь свободной поверхности воды в бокале максимальна?

---

6. Построить функцию f, непрерывную на $[0,1]$ и имеющую в каждой точке y образа либо 1, либо 3 прообраза, причем некоторая точка y имеет 3 прообраза.