

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Студенческая олимпиада по математике
17 апреля 2010 года

1 курс

1. Найти множество предельных точек множества $\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Многочлен $f(x)$ степени n с вещественными коэффициентами принимает целые значения при $x = 0, \dots, n$. Доказать, что он принимает целые значения при всех целых x .
3. Выделить главный член при $x \rightarrow +\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(xu - 1) du}{(xu - 1)\sqrt{u^2 - 1}}$.
4. Функция $f(x) \in C[0, +\infty)$ такова, что при $\forall a > 0$ выполняется $f(na) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Доказать, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.
5. Вычислить определитель матрицы $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q_{ij} = (a_i + b_j)^{-1} + c$, где a_i, b_i, c — заданные числа.
6. Доказать, что по любому простому модулю одно из чисел 2, 3 или 6 есть полный квадрат.
7. Найти граф с как можно меньшим числом вершин, не имеющий треугольников, но имеющий хроматическое число не меньше четырёх.
8. В черном ящике реализуется неизвестная монотонная функция трёх переменных. Запрос адресуется к любому подкубу области определения. Ответ — сумма по модулю два числа единиц. Какое минимальное число запросов требуется для расшифровки функции (последующий запрос может зависеть от предыдущих)?