Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Студенческая олимпиада по математике
16 апреля 2011 года

1 курс

1. Докажите, что для любого натурального m

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}} = \dfrac{1}{m+1}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1^m + 2^m + \dots + n^m - \dfrac{n^{m+1}}{m+1}\right) / n^m = \dfrac{1}{2}$.

2. Пусть $p \geqslant 1$. Докажите, что для любых неотрицательных $a_1, \dots, a_n$ справедливо неравенство $a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \leqslant (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p$.

3. Из каждой точки интервала $(0, 1)$ проведен отрезок положительной длины. Докажите, что сумма длин всех таких отрезков бесконечна.

4. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция такая, что для любого $x \in [0,\ 1]$ выполнено неравенство $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt \geqslant \frac{1 - x^2}{2}$. Докажите, что

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \geqslant \frac{1}{3}.$$

5. Приведите пример положительного многочлена от двух переменных, нижняя грань которого на всей плоскости равна нулю (т.е. нижняя грань не достигается).

6. Пусть $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказать, что

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

7. Привести пример распределения вероятностей (частот) появления букв, для которого имеются три различных набора длин оптимальных кодов.

8. Найти минимальное n, для которого существует монотонная самодвойственная несимметричная функция, существенно зависящая от всех n переменных.