Агаян Г.М.

Численное решение задачи формирования изображения в двух плоскостях с использованием интегральной формулы Френеля.

Рассмотрим задачу о построении фазового плоского оптического элемента, расположенного в плоскости $Z=0$,формирующего, при освещении его плоской волной от когерентного источника с длиной волны λ, в двух плоскостях, $Z=f_1$ и $Z=f_2$, различные, наперед заданные изображения с амплитудами A_1 и A_2 соответственно.

Будем рассматривать математическую постановку задачи, используя скалярное волновое приближение.

Пусть на оптический элемент расположенный в плоскости $Z=0$ падает плоская волна от когерентного источника с длиной волны λ, амплитуда которой описывается функцией $A_0(x,y)$. Тогда после прохождения элемента формируется волновое поле

$$u(x,y,0+) = A_0(x,y)\exp\{ik\varphi_0(x,y)\},$$

где $\varphi_0(x,y)$ – функция, характеризующая оптический фазовый элемент. Заметим, что существуют технологии, позволяющие реализовать подобные фазовые элементы в оптическом диапазоне длин волн.

Мы будем интересоваться величиной амплитуды волнового поля, сформированного в двух плоскостях $Z=f_1$ и $Z=f_2$, считая, что распространение излучения в области $Z>0$ подчиняется интегральной формуле Френеля

$$u(x,y,z) = \Phi\{u\}(x,y,z) = \frac{k}{2\pi z}\iint_G u(\xi,\eta,0+)\exp\left\{ik\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2z}\right\}d\xi d\eta$$

где область G – апертура падающего излучения,т.е. $u(x,y,+0)=0$ вне G.

Таким образом, наша задача сводится к следующему:

требуется найти функцию $\varphi_0(x,y)\in\Phi(G)$,где $\Phi(G)$ – множество допустимых фазовых функций, формирующую в плоскости $Z=f_1$ волновое поле $u(x,y,f_1)$ с наперед заданной амплитудой $A_{f1}(x,y)=|u(x,y,f_1)|$ и, одновременно, в плоскости $Z=f_2$ волновое поле $u_2(x,y,f_2)$ с амплитудой $A_{f2}(x,y)=|u(x,y,f_2)|$, где функция $u(x,y,z)$ определяется интегралом Френеля.

Множество $\Phi(G)$ описывает фазовые функции на которые наложены ограничения как вычислительного, так и чисто технологического свойства. Мы будем рассматривать кусочно-постоянные функции $\Phi(G)$ принадлежащие двум основным классам:

1. Бинарные фазовые элементы, допускающие лишь два значения функции $\varphi_0(x,y)=0$, $\varphi_0(x,y)=\lambda/2$. Значение $\varphi_0(x,y)=\lambda/2$ соответствует набегу фазы равному $\lambda/2$. Обозначим этот класс $\Phi_2(G)$. Искомая функция $\varphi_0(x,y)$ в силу технологических ограничений должна принадлежать именно этому классу допустимых фазовых функций.
2. "Непрерывные" фазовые элементы, допускающие M значений функции $\varphi_0(x,y)$. ($\varphi_0(x,y)=\varphi_i$, $\varphi_i = \frac{\lambda}{4M}*i$, $i=-M/2, M/2$; $-\lambda/2 \le\varphi_0(x,y)\le \lambda/2$). В рассматриваемом случае $M=256$. Этот класс обозначим $\Phi_M(G)$.

Приближенное численное решение поставленной задачи будем строить опираясь на:

1. Хорошо известный факт тесной связи интегральных формул Френеля и Фурье (см. например [1])

$$\Phi\{u\}(x,y,z)=\frac{k}{z}\exp\left\{ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right\}F\left\{u(\xi,\eta,0+)\exp\left\{ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2z}\right\}\right\}\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right) \quad (1)$$

где

$$F\{v\}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_G v(\xi,\eta)\exp\{-ik(x\xi+y\eta)\}d\xi d\eta$$

- преобразование Фурье функции $v(\xi,\eta)$.

2. Необходимости получения искомой функции $\varphi_0(x,y)$ из класса $\Phi_2(G)$.

Перейдем к описанию алгоритма.

Рассмотрим две взаимосвязанные задачи: задачу $I_{FOURIER}$ о формировании заданной амплитуды волнового фронта в приближении интеграла Фурье (что соответствует формированию изображения в дальней зоне, т.е. при $Z=\infty$):

Найти функцию $\varphi_\infty(x,y)\in\Phi_M(G)$ такую,что :

$$u_0^{FOURIER}(x,y,0+)=A_0(x,y)\exp\{ik\varphi_\infty(x,y)\}$$

$$u^{FOURIER}(x,y,+\infty)=\frac{1}{2\pi}\iint_G u_0^{FOURIER}(\xi,\eta,0+)\exp\{-ik(x\xi+y\eta)\}d\xi d\eta$$

$$\left|u^{FOURIER}(x,y,+\infty)\right|=A_\infty(x,y)$$

и задачу I_{FREN} о формировании заданной амплитуды волнового фронта в приближении интеграла Френеля (что соответствует формированию изображения в плоскости, отстоящей от плоскости элемента на фиксированное фокусное расстояние $Z=f$).

Найти функцию $\varphi_f(x,y)\in\Phi_M(G)$ такую,что :

$$u^{FREN}(x,y,0+)=A_0(x,y)\exp\{ik\varphi_f(x,y)\}$$

$$u^{FREN}(x,y,f)=\frac{k}{2\pi f}\iint_G u^{FREN}(\xi,\eta,0+)\exp\left\{ik\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{2f}\right\}d\xi d\eta$$

$$\left|u^{FREN}(x,y,f)\right|=A_f(x,y)$$

Если нам удалось найти решение задачи $I_{FOURIER}$ функцию $\varphi_f(x,y)$, тогда согласно формуле (1) мы получаем

$$\varphi_f(x,y)=\varphi_\infty(x,y)-k\frac{x^2+y^2}{2f} \quad (2)$$

Задача $I_{FOURIER}$ может быть достаточно эффективно решена с помощью различных подходов [2]. Решая эту задачу численными методами, используя начальные данные $A_0(x,y)$, $A_{f1}(x,y)$ и $A_0(x,y)$, $A_{f2}(x,y)$, мы получим две различные функции $\varphi_\infty^1(x,y)$ и $\varphi_\infty^2(x,y)$. Пересчитывая эти функции по формуле (2) можно получить $\varphi_{f1}(x,y)$ и $\varphi_{f2}(x,y)$ - фазовые функции, формирующие требуемые изображения в плоскостях $Z=f_1$ и $Z=f_2$ соответственно.

Далее воспользуемся тем, что фазовая функция, которую требуется построить принадлежит классу $\Phi_2(G)$. В результате численного решения задачи $I_{FOURIER}$, функции $\varphi_{f1}(x,y)$ и $\varphi_{f2}(x,y)$ принадлежат множеству $\Phi_M(G)$. Искомую функцию $\varphi_0(x,y)$ будем строить с помощью специального оператора проектирования на множество $\Phi_2(G)$.

Его можно строить различными способами, например оператор $P_1(\varphi_1, \varphi_2)$:
Можно также рассматривать оператор $P_2(\varphi_1, \varphi_2)$:

$$\varphi_0^{\,2}(x,y) = P_2(\varphi 1, \varphi 2) = \begin{cases} 0, -\dfrac{\lambda}{4} \le \dfrac{\varphi 1 + \varphi 2}{2} \le \dfrac{\lambda}{4}; \\ \lambda/2, -\dfrac{\lambda}{2} \le \dfrac{\varphi 1 + \varphi 2}{2} < -\dfrac{\lambda}{4}, \dfrac{\lambda}{4} < \dfrac{\varphi 1 + \varphi 2}{2} \le \dfrac{\lambda}{2}; \end{cases}$$

Для исследования эффективности предложенного алгоритма был проведен ряд численных экспериментов.

Поставленная задача решалась для следующих амплитуд:

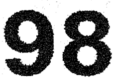


Рис.1. Амплитуда изображения в плоскости $Z=f_1$.

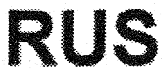


Рис.2. Амплитуда изображения в плоскости $Z=f_2$.

Амплитуда падающего излучения считалась равной константе. Длина волны излучения λ=0.63мкм. Апертура падающего фронта - 0.9 мм. Фокусное расстояние - f_1=0.5см, f_2=1см.

В качестве результатов численного моделирования приведем распределение интенсивности излучения в двух фокальных плоскостях (см. рис.3(а,б)).

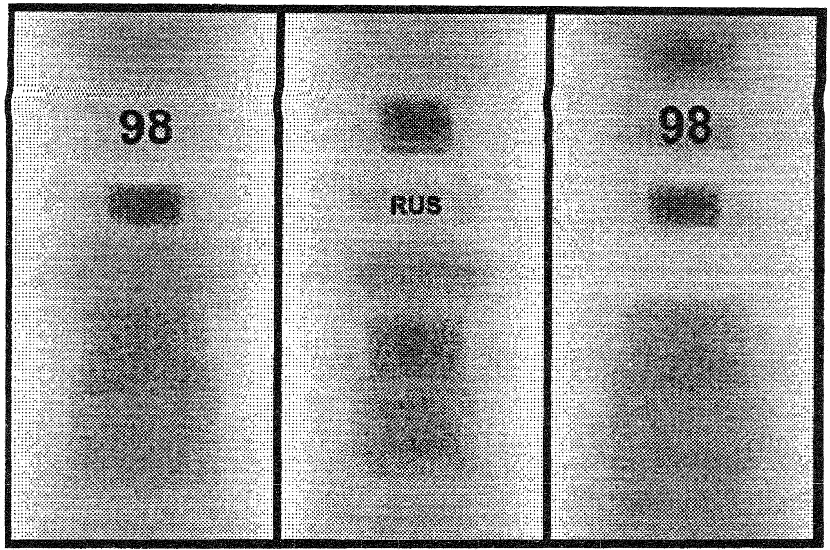
С помощью численного моделирования прямого преобразования Френеля можно вычислить значения невязки, полученные при использовании оператора P_1 и P_2 в каждой из плоскостей $Z=f_1, Z=f_2$, например, по формуле.

$$E(f) = \iint_{G'} \left(|u(\xi,\eta,f)| - A_f \right)^2 d\xi d\eta$$

Как показали расчеты, оператор P_1 оказывается предпочтительнее, так как значения соответствующих невязок оказываются практически одинаковыми, при этом в “существенной” области амплитуда изображения, полученная с помощью оператора P_1 оказывается лучше (см. рис.3(а,в)).

Настоящая работа выполнялась совместно с научно-техническим центром “АТЛАС” при ФАПСИ , владеющего технологией изготовления подобных оптических элементов. Это позволило изготовить полученный бинарный фазовый оптический элемент с помощью электронно-лучевой литографии.

Результаты экспериментов по освещению оптического элемента лазерным источником с длиной волны λ=0.63 микрона подтвердили результаты численного моделирования и показали достаточно хорошую для рассматриваемого класса оптических элементов фокусировку изображений в обеих плоскостях.



а) б) в)

Рис.3. а) Распределение интенсивности излучения в плоскости $Z=f_1$.
б) Распределение интенсивности излучения в плоскости $Z=f_2$.
в) Распределение интенсивности излучения в плоскости $Z=f_2$.
Фазовая функция получена с помощью оператора P_2.

Литература.

1. Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В.. Введение в компьютерную оптику. Москва, изд-во МГУ, 1991г., 312с.

2.F.Wyrowski and O.Bryngdahl, "Iterative Fourier-transform algorithm applied to computer holography,"J.Opt.Soc.Am.A 5,1058-1065 (1988).