М.Б. Ахмади

РАСЧЕТ РЕЗЕРВНОГО КОЛЬЦА ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СЕТИ СВЯЗИ

Под иерархической сетью связи (ИСС) понимается многопродуктовая потоковая сеть [1,2,3], в которой логический граф, или граф тяготений, имеет структуру звезды, т.е. тяготеющие пары p_i (источник, сток) заданы в виде (v_0, v_i), $i \in M \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, m\}$ с общим источником v_0.

Как правило, физический граф иерархической сети повторяет ее логическую структуру и имеет тип звезды:
$G = \langle V, E \rangle$, где $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $e_i = (v_0, v_i)$, $i \in M$. Формальная модель ИСС рассмотрена в [4].

Будем обозначать через d_i положительное число, имеющее смысл требований на передачу потока между центром (v_0) и i-м подчиненным (i-м стоком), а через y_k – неотрицательное число, имеющее смысл пропускной способности ребра e_k.

Уже известно, что физические структуры типа звезды обладают плохими характеристиками живучести. Поэтому в данной работе предложено создание дополнительной кольцевой структуры, связывающей все подчиненные узлы с целью дублирования сообщений в случае потери связи между v_0 и кем-либо из v_i, $i \in M : \bar{G} = \langle V, \bar{E} \rangle$, $\bar{E} = E \cup \hat{E}$, где $\hat{E} = \{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_m\}$, $\hat{e}_i = (v_i, v_{i+1})\ \forall i < m$, $\hat{e}_m = (v_m, v_1)$. Обозначим через α_k -- неотрицательное число, имеющее смысл пропускной способности кольцевого ребра $\hat{e}_k$, $k = 1, \ldots, m$. Указанная структура имеет смысл резерва. В дальнейшем мы не будем выделять последний и первый индексы, формально полагая, что все целые индексы для всех переменных берутся по модулю m.

Будем для простоты полагать все логические ребра и ребра графа G ориентированными, например от центра к подчиненным. Ребра резервного кольца являются неориентированными, или двунаправленными. Соответственно будет удобно ввести на кольце два типа потоковых переменных $f_k^{j\rightarrow} \geq 0$ и $f_k^{j\leftarrow} \geq 0$ для потоков по и против часовой стрелки, а на радиальных ребрах потоковые переменные будут обозначаться без стрелок как $f_k^j \geq 0$. Здесь и далее верхний индекс j указывает, что рассматривается поток от центра к j—му подчиненному, а нижний индекс – индекс ребра, на котором рассматривается этот поток. В таких переменных условия неразрывности потоков в k–м узле сети $\forall k \in M$, $i \in M$ запишутся с учетом введенной нумерации ребер следующим образом:

$$f_k^i = f_k^{i\rightarrow} - f_{k-1}^{i\rightarrow} + f_{k-1}^{i\leftarrow} - f_k^{i\leftarrow} \quad \forall k \neq i, \quad f_i^{i\rightarrow} = 0, \quad f_{i-1}^{i\leftarrow} = 0. \qquad (1)$$

При этом значение переменной

$$z_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in M} f_k^i = f_i^i + f_i^{i\leftarrow} + f_{i-1}^{i\rightarrow} \qquad (2)$$

равно величине потока от центра к i–му подчиненному. (Равенство в (2) доказано в [4].)

Обозначим через $f \in \mathbf{R}_+^{3m^2}$ набор потоковых переменных $f_k^i, f_k^{i\rightarrow}, f_k^{i\leftarrow}, k \in M$,
$i \in M$, удовлетворяющий (1). Набор f задает распределение потоков по сети. Соответствующий вектор значений (2) $z = z(f) = (z_1, \ldots, z_m)$ называется мультипотоком, задаваемым распределением f. Вектор требований $d = (d_1, \ldots, d_m)$ определяет требования к мультипотоку: $z = d$. Но существование такого f, чтобы $z(f) = d$ (задача о допустимости сети [1]), зависит от ограничений по пропускной способности ребер, поскольку суммарный поток по любому ребру не должен превышать пропускной способности этого ребра. А именно:

$$\sum_{i \in M} f_k^i \leq y_k \quad \forall e_k \in E, \qquad (3)$$

$$\sum_{i \in M} \left(f_k^{i\leftarrow} + f_k^{i\rightarrow} \right) \leq \alpha_k \quad \forall \hat{e}_k \in \hat{E}. \qquad (4)$$

Случай, когда кольцевые ребра отсутствуют (граф G вместо $\bar{G}$), будем для единообразия описывать с помощью тех же переменных, формально полагая $\alpha_k = 0 \quad \forall k \in M$. Обозначим через $\bar{y}$ вектор пропускной способности $(y_1, \ldots, y_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, через y – укороченный вектор $(y_1, \ldots, y_m)$.

Ограничения (1), (3), (4) определяют многогранник возможных распределений потоков

$$F(\bar{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \geq 0 | \text{ выполнено (1), (3), (4)}\}. \qquad (5)$$

Множество всех мультипотоков $z(f)$, для которых существует набор $f \in \mathbf{R}_+^{3m^2}$, удовлетворяющий условиям (1) – (4), будем называть множеством достижимости в ИСС с вектором $\bar{y}$ пропускной способности физических ребер и обозначать $Z(\bar{y})$, т.е.

$$Z(\bar{y})\stackrel{\text{def}}{=}\{z \geq 0 | \exists f \in F(\bar{y}) : \quad z = z(f)\}.$$

Введем для любого распределения потоков f значение

$$\min_{i \in M} \frac{z_i(f)}{d_i},$$

называемое уровнем обеспеченности потоковых требований (о.п.т.) при распределении f.

Мерой эффективности функцирования ИСС будем называть максимально достижимый в сети уровень о.п.т.

$$\theta(\bar{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(\bar{y})} \min_{i \in M} \frac{z_i}{d_i}.$$

Если $\theta(\bar{y}) \geq 1$, то ИСС с вектором пропускной способности $\bar{y}$ допустима для вектора требований d, а при $\theta(\bar{y}) < 1$ недопустима. Чем больше отличается от 1 значение $\theta(\bar{y})$, тем хуже функционирует ИСС, независимо от значения $\sum\limits_{i \in M} z_i$. Значит эффективность ИСС не определяется суммой величин потоков, а более адекватно выражается минимумом из этих величин.

Живучесть ИСС будем характеризовать гарантированным значением максимального уровня о.п.т. следующим образом.

Введем параметр γ, характеризующий мощность поражающего воздействия и показывающий, какая часть суммарной пропускной способности ребер может оказаться потерянной. Поражающим воздействиям мощности γ соответствует множество возможных значений вектора пропускной способности радиальных ребер

$$Y_\gamma(a) = \{y \geq 0 | \sum_{i \in M} y_i = (1 - \gamma) \sum_{i \in M} a_i, \ y_i \leq a_i, \quad i \in M\}, \qquad (6)$$

где $a = (a_1, \ldots, a_m)$ – исходный вектор пропускной способности радиальных ребер. Здесь мы учитываем воздействия только на радиальные ребра ($e_k \in E$) и не рассматриваем возможности поражения кольца, считая, к примеру, что потенциальный противник не догадывается о месторасположении резерва (поскольку ребра из $\hat{E}$ удалены от ребер из E и передачи потока по ним не ведется).

Пусть $\bar{c} = (a, c_1, \ldots, c_m)$ – исходный вектор пропускной способности. Для каждого значения $\gamma \in (0,1)$ определим

$$\theta_\gamma^\Gamma(\bar{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Y_\gamma(a)} \theta(y, c_1, \ldots, c_m) = \min_{y \in Y_\gamma(a)} \max_{z \in Z(y, c_1, \ldots, c_m)} \min_{i \in M} \frac{z_i}{d_i}$$

гарантированное значение максимума о.п.т.

Теперь предположим, что исходная структура ИСС была выбрана оптимальной: взяли вектор пропускной способности радиальных ребер равный вектору d (вектору требований), т.е. все требуемые потоки по такой сети проходят и избыточной пропускной способности не создается. Для этой структуры $\theta(d, 0_M) = 1$, где 0_M – вектор из m нулей. Очевидно (см.[4]), что $\forall\ c_1, \ldots, c_m$

$$\theta_\gamma^\Gamma(d, c_1, \ldots, c_m) \leq 1 - \gamma.$$

Для ИСС с неукрепленным графом G при $\gamma \geq \frac{1}{m}$ живучесть ИСС обращается в ноль:

$$\theta_{1/m}^\Gamma(d, 0_M) = 0.$$

Можно доказать [4], что для графа $\bar{G}$ (укрепленный граф) при любых $\gamma < 1$ найдется такое число t, что

$$\theta(y, t, \ldots, t) = 1 - \gamma \quad \forall y \in Y_\gamma(d),$$

т.е. $\theta_\gamma^\Gamma(d, t, \ldots, t) = 1 - \gamma$ – достижение верхней оценки живучести (величина t – достаточный резерв).

Обозначим $t(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{\theta_\gamma^\Gamma(d,t,\ldots,t) = 1-\gamma} t$. В [4] была получена верхняя оценка достаточного резерва

$$\max_{\gamma \in (0,1)} t(\gamma) \leq \frac{\sum\limits_{i \in M} d_i}{8}.$$

Следующая теорема дает точную оценку. Здесь дается формула для вычисления величины необходимого и достаточного кольцевого резерва, для того чтобы гарантировать уровень $\theta_\gamma^\Gamma(d, c) = 1 - \gamma$ – достижение верхней оценки живучести.

Введем множество возможных вариантов достаточного кольцевого резерва

$$C(\gamma) = \{c = (c_1, \ldots, c_m) | (1 - \gamma)d \in Z(y, c) \quad \forall y \in Y_\gamma(d)\}. \tag{7}$$

Обозначим $\forall\gamma \in (0,1)$

$$y_q^- = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; y_q > d_q(1-\gamma) \\ y_q, & \text{если} \;\; y_q \le d_q(1-\gamma) \end{cases}, y_q^+ = \begin{cases} y_q, & \text{если} \;\; y_q > d_q(1-\gamma) \\ d_q, & \text{если} \;\; y_q \le d_q(1-\gamma) \end{cases}, \; q \in M, \tag{8}$$

$$Y_1(\gamma) = \{y^i = (0,\dots,0,d_i,d_{i+1},\dots,d_{i+j(i,\gamma)-1},y_{i+j(i,\gamma)},0\dots,0),$$

$$y'^i = (0,\dots,0,y_i,d_{i+1},\dots,d_{i+j(i,\gamma)},0\dots,0)|i \in M, \; y^i, y'^i \in Y_\gamma(d)\}, \tag{9}$$

где $j(i,\gamma) = \min\{0 \le j < m | \sum\limits_{l=i}^{i+j} d_l > (1-\gamma)\sum\limits_{l \in M} d_l\}$,

$y_k = d_k - \sum\limits_{l=i}^{i+j(i,\gamma)} d_l + (1-\gamma)\sum\limits_{l\in M} d_l$ для $k = i, i+j(i,\gamma)$.

Отметим, что $|Y_1(\gamma)| \le 2m$.

Введем зависящие от γ величины

$$b(y^i) = \max\{y^-_{i+j(i,\gamma)}\gamma, \; (d_{i+j(i,\gamma)} - y^+_{i+j(i,\gamma)})(1-\gamma)\}, \tag{10}$$

$$b(y'^i) = \max\{y_i^-\gamma, \; (d_i - y_i^+)(1-\gamma)\} \;\; \forall i \in M, \tag{11}$$

$$b[\gamma] = \min_{i\in M} \min\{b(y^i), b(y'^i)\}. \tag{12}$$

Теорема: $\forall\gamma \in (0,1)$

$$\min_{c\in C(\gamma)} \max_{l\in M} c_l = \frac{\gamma(1-\gamma)\sum\limits_{l=1}^{m} d_l - b[\gamma]}{2}. \tag{13}$$

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы, введем некоторые обозначения и докажем несколько лемм.

Обозначим через $\hat{t}(\gamma)$ правую часть (13) и введем $\forall y \in Y_\gamma(d)$

$$C[y] = \{c = (c_1,\dots,c_m)|(1-\gamma)d \in Z(y,c)\}, \tag{14}$$

$$t_l(y) = y_l - d_l(1-\gamma), \; l \in M, \tag{15}$$

$$\hat{t}[y] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y)/2. \tag{16}$$

Здесь и далее знак суммы, в котором верхний индекс сумирования меньше нижнего, будем интерпретировать как сумму до верхнего индекса плюс m без введения дополнительных обозначений. Таким образом, с учетом индексов по модулю m у переменных, получаем циклическую сумму.

Обозначим через $[j]_m$ значение переменной j по модулю m.

Фиксируем произвольный вектор $y \in Y_\gamma(d)$. Пусть

$$\max_{i,j\in M}\sum_{l=i}^{j} t_l(y)=\sum_{l=r}^{s} t_l(y)(\doteq 2\hat{t}[y]),\ r,s\in M. \tag{17}$$

Определим $f(y) \in \mathbf{R}_+^{3m^2}$ – набор значений потоковых переменных $f_k^j(y)$, $f_k^{j\rightarrow}(y)$,
$f_k^{j\leftarrow}(y)$, $k\in M$, $j\in M$ следующим образом:

$$f_j^{j\rightarrow}(y)=0,\ f_{j-1}^{j\leftarrow}(y)=0\ \ \forall j\in M, \tag{18}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_k^{k\leftarrow}(y)=\min(h(y,k),|t_k(y)|)\chi_{I^-}(k),\\ f_k^{j\leftarrow}(y)=\min(h(y,k)-\sum\limits_{l=j+1}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y),|t_j(y)|)\chi_{I^-}(j),\\ j=k-1,k-2,\dots 1,m,m-1,\dots,k+2,\end{array}\right. \tag{19}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_k^{k+1\rightarrow}(y)=\min(g(y,k),|t_{k+1}(y)|)\chi_{I^-}([k+1]_m),\\ f_k^{j\rightarrow}(y)=\min(g(y,k)-\sum\limits_{l=k+1}^{j-1} f_k^{l\rightarrow}(y),|t_j(y)|)\chi_{I^-}(j),\\ j=k+2,k+3,\dots m,1,\dots,k-1,\end{array}\right. \tag{20}$$

где

$$\begin{array}{l} h(y,k)=\max(0,\hat{t}[y]+\sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y)),\\ g(y,k)=\max(0,\hat{t}[y]+\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y)),\end{array} \tag{21}$$

$$\chi_A(x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{array}\right.$$

$$I^-=\{i\in M|t_i(y)<0\},\ I^+=M\setminus I^-, \tag{22}$$

$$\begin{array}{l} f_j^j(y)=\left\{\begin{array}{ll} y_j, & j\in I^-,\\ d_j(1-\gamma), & j\in I^+,\end{array}\right.\\ f_k^j(y)=f_k^{j\rightarrow}(y)-f_{k-1}^{j\rightarrow}(y)+f_{k-1}^{j\leftarrow}(y)-f_k^{j\leftarrow}(y)\quad \forall k\neq j.\end{array} \tag{23}$$

Докажем, что $f_k^{j\leftarrow}(y) \geq 0\ \forall k \in M,\ \forall j \in M$. Так как $h(y,k) \geq 0\ \forall k \in M$, из (19) следует, что $f_k^{k\leftarrow}(y) \geq 0$, $h(y,k) \geq f_k^{k\leftarrow}(y)\ \forall k \in M$. Тогда $h(y,k) - f_k^{k\leftarrow}(y) \geq 0\ \forall k \in M$, и из (19) следует, что $f_k^{k-1\leftarrow}(y) \geq 0\ \forall k \in M$. Предполагая, что $f_k^{t\leftarrow}(y) \geq 0$, $t \in M$, $t \neq k$ докажем, что $f_k^{t-1\leftarrow}(y) \geq 0$.

$$0 \leq f_k^{t\leftarrow}(y) \overset{(19)}{\leq} h(y,k) - \sum_{l=t+1}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y)$$

$$\Longrightarrow h(y,k) - \sum_{l=t}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) \geq 0.$$

Отсюда с учетом (19) получаем $f_k^{t-1\leftarrow}(y) \geq 0$.
Аналогично можно доказать, что $f_k^{j\rightarrow}(y) \geq 0\ \forall k \in M,\ \forall j \in M$.

Далее второй аргумент функций g, h рассматривается по модулю m. Также при $s < r$ под $r \leq i \leq s$ понимается, что $i = [i']_m$, $r \leq i' \leq m + s$, т.е. $i = r, r+1, \ldots, m, 1, \ldots, s$.

Лемма 1.

a. $\sum\limits_{l \in M} t_l(y) = 0$,

b. $\sum\limits_{l \in J} t_l(y) = -\sum\limits_{l \in M \setminus J} t_l(y)\quad \forall J \subset M$,

c. $\hat{t}[y] \geq 0$,

d. $\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) \leq 0$, $\sum\limits_{l=k}^{r-1} t_l(y) \leq 0\quad \forall k \in M$.

Доказательство.
a. $\sum\limits_{l \in M} t_l(y) \overset{(15)}{=} \sum\limits_{l \in M} y_l - (1-\gamma) \sum\limits_{l \in M} d_l \overset{(6)}{=} (1-\gamma) \sum\limits_{l \in M} d_l - (1-\gamma) \sum\limits_{l \in M} d_l = 0.$
b. Сразу следует из пункта **a.**
c. Очевидно, что $\exists l \in M:\ t_l(y) \geq 0$, иначе, если бы $\forall l \in M\ \ t_l(y) < 0$, то $\sum\limits_{l \in M} t_l(y) < 0$, а это противоречит пункту (a). Допустим $t_k(y) \geq 0$, тогда

$$0 \leq \sum_{l=k}^{k} t_l(y) \leq \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) = \sum_{l=r}^{s} t_l(y) \doteq 2\hat{t}[y].$$

Значит $\hat{t}[y] \geq 0$.

d. Допустим $\exists k \in M : \sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) > 0$. Поскольку $\sum\limits_{l \in M} t_l(y) = 0$, то

$$\sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) = \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) + \sum_{l=r}^{k} t_l(y) \overset{\text{л.1(b)}}{=} -\sum_{l=r}^{s} t_l(y) + \sum_{l=r}^{k} t_l(y) > 0,$$

и отсюда $\sum\limits_{l=r}^{k} t_l(y) > \sum\limits_{l=r}^{s} t_l(y)$, но это противоречит (17). Значит $\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) \leq 0 \ \forall k \in M$.

Аналогично можно доказать, что $\sum\limits_{l=k}^{r-1} t_l(y) \leq 0 \ \forall k \in M$.

Лемма 2. Следующие равенства имеют место:

1. $g(y,k) = \sum\limits_{j \in M} f_k^{j\rightarrow}(y)$,

2. $h(y,k) = \sum\limits_{j \in M} f_k^{j\leftarrow}(y)$,

3. $h(y,k)g(y,k) = 0$,

4. $g(y,k) - g(y,k-1) + h(y,k-1) - h(y,k) = t_k(y)$.

Доказательство.

1. Сначала докажем, что при $k \neq [r-2]_m$ равенство $f_k^{r-1\rightarrow}(y) = g(y,k) - \sum\limits_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y)$ имеет место.

Допустим это не так, тогда

$$f_k^{r-1\rightarrow}(y) \neq g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y), \ k \neq [r-2]_m. \tag{24}$$

Возможны 2 случая

1. $[r-1]_m \in I^-$,
2. $[r-1]_m \in I^+$, $t_{r-1}(y) = f_k^{r-1\rightarrow}(y) = 0$ (согласно (17), (20)).

В случае 1 из (20), (24) следует, что

$$g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y) > |t_{r-1}(y)|,$$

$$f_k^{i\rightarrow}(y) = |t_i(y)|,\ k+1 \le i \le r-2,\ [i]_m \in I^-.$$

В случае 2, поскольку $f_k^{l\rightarrow}(y) \ge 0\ \ \forall l \in M,\ \forall k \in M$, то из (24) следует, что

$$g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y) > 0 = |t_{r-1}(y)|,$$

Докажем, что в случае 2 тоже $f_k^{i\rightarrow}(y) = |t_i(y)|,\ k+1 \le i \le r-2,\ [i]_m \in I^-$. В противном случае

$$\exists q:\ [q]_m \in I^-,\ k+1 \le q \le r-2,\ f_k^{q\rightarrow}(y) \ne |t_q(y)|. \tag{25}$$

При $q = [k+1]_m$ из (20) следует, что

$$f_k^{q\rightarrow}(y) = f_k^{k+1\rightarrow}(y) = g(y,k),\ f_k^{t\rightarrow}(y) = 0,\ t = k+2,\dots,m,1,\dots,k-1,$$

и отсюда $g(y,k) - \sum\limits_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y) = 0 = f_k^{r-1\rightarrow}(y)$. Но это противоречит (24).
При $k+2 \le q \le r-2$ из (20), (25) следует, что

$$f_k^{q\rightarrow}(y) = g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{q-1} f_k^{l\rightarrow}(y)$$

$$\Longrightarrow\ g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{q} f_k^{l\rightarrow}(y) = 0$$

Отсюда следует, что $f_k^{t\rightarrow}(y) = 0,\ q+1 \le t \le r-2$ и следовательно $g(y,k) - \sum\limits_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y) = 0$. А это противоречит (24).
Значит, в любом случае

$$f_k^{i\rightarrow}(y) = |t_i(y)|,\ k+1 \le i \le r-2,\ [i]_m \in I^-, \tag{26}$$

и также

$$g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y) > |t_{r-1}(y)|.$$

Так как в силу (20) $f_k^{l\rightarrow}(y) = 0,\ l \in I^+$, то

$$g(y,k) - \sum_{\substack{l=k+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{r-2} f_k^{l\rightarrow}(y) > |t_{r-1}(y)|$$

$$\stackrel{(26)}{\Longrightarrow}\ g(y,k) - \sum_{\substack{l=k+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{r-2} |t_l(y)| > |t_{r-1}(y)|$$

$$\Longrightarrow g(y,k) > \sum_{\substack{l=k+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{r-1} |t_l(y)| > 0 \tag{27}$$

$$\overset{(21)}{\Longrightarrow} g(y,k) = \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) > 0.$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) > -\hat{t}[y]$ и поскольку $\sum\limits_{l=r}^{s} t_l(y) = 2\hat{t}[y]$, то согласно лемме 1 имеем $\sum\limits_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) = -2\hat{t}[y]$, и отсюда $\sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) < -\hat{t}[y]$, и поэтому $\sum\limits_{\substack{l=k+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{r-1} t_l(y) < -\hat{t}[y]$. Тогда $-\sum\limits_{\substack{l=k+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{r-1} t_l(y) > \hat{t}[y]$ и следовательно $\sum\limits_{\substack{l=k+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{r-1} |t_l(y)| > \hat{t}[y]$. Отсюда и с учетом (27) имеем

$$g(y,k) > \hat{t}[y]. \tag{28}$$

С другой стороны, так как по лемме 1
$\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) \le 0 \quad \forall k \in M, \ \hat{t}[y] \ge 0$, то из (21) получаем

$$g(y,k) \le \hat{t}[y] \quad \forall k \in M. \tag{29}$$

Значит (28) не верно, а тогда (24) не верно и

$$f_k^{r-1\to}(y) = g(y,k) - \sum_{l=k+1}^{r-2} f_k^{l\to}(y)$$

$$\Longrightarrow g(y,k) = \sum_{l=k+1}^{r-1} f_k^{l\to}(y) \tag{30}$$

$$\overset{(20)}{\Longrightarrow} f_k^{t\to}(y) = 0, \ t = r, \ldots, m, 1, \ldots, k-1. \tag{31}$$

Из (30), (31) следует, что

$$g(y,k) = \sum_{l=k+1}^{k-1} f_k^{l\to}(y),$$

и поскольку согласно (18) $f_k^{k\to}(y) = 0$, то $g(y,k) = \sum\limits_{l \in M} f_k^{l\to}(y)$.

Теперь допустим, что $k = [r-2]_m$. Тогда докажем, что $f_{r-2}^{r-1\to}(y) = g(y, r-2)$.

Возможны 2 случая

1. $[r-1]_m \in I^-$,
2. $[r-1]_m \in I^+,\ t_{r-1}(y) = 0$.

В случае 1 допустим, что $f_{r-2}^{r-1\to}(y) \neq g(y, r-2)$. Так как

$$f_{r-2}^{r-1\to}(y) = \min(g(y, r-2), |t_{r-1}(y)|),$$

то

$$g(y, r-2) > |t_{r-1}(y)| > 0 \tag{32}$$

$$\overset{(21)}{\Longrightarrow} \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-2} t_l(y) > 0.$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{l=s+1}^{r-2} t_l(y) > -\hat{t}[y]$ и поскольку $\sum\limits_{l=r}^{s} t_l(y) = 2\hat{t}[y]$, то согласно лемме 1 имеем $\sum\limits_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) = -2\hat{t}[y]$, следовательно $\sum\limits_{l=r-1}^{r-1} t_l(y) = t_{r-1}(y) < -\hat{t}[y]$, и поэтому $|t_{r-1}(y)| > \hat{t}[y]$. С учетом (32) имеем

$$g(y, r-2) > \hat{t}[y]. \tag{33}$$

Но это противоречит (29).

В случае 2, поскольку $[r-1]_m \in I^+$, то $f_{r-2}^{r-1\to}(y) = 0$,

$$\begin{aligned} g(y, r-2) &= \max(0, \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-2} t_l(y)) \\ &= \max(0, \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y)) \\ &= \max(0, -\hat{t}[y]) \ \text{ (в силу леммы 1(b), (17))} \\ &= 0 \ \text{ (в силу леммы 1(c)).} \end{aligned}$$

Значит, в любом случае $f_{r-2}^{r-1\to}(y) = g(y, r-2)$, и согласно (18), (20)

$$f_{r-2}^{t\to}(y) = 0,\ t = r, \dots, m, 1, \dots, r-2,$$

а тогда $\sum\limits_{l\in M} f_{r-2}^{l\to} = g(y, r-2)$.

2. Сначала докажем, что при $k \neq [s+1]_m$ равенство $f_k^{s+1\leftarrow}(y) = h(y,k) - \sum\limits_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y)$ имеет место.

Допустим, это не так, и

$$f_k^{s+1\leftarrow}(y) \neq h(y,k) - \sum_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y), \;\; k \neq [s+1]_m. \tag{34}$$

Возможны 2 случая

1. $[s+1]_m \in I^-$,
2. $[s+1]_m \in I^+, \;\; t_{s+1}(y) = f_k^{s+1\leftarrow}(y) = 0.$

В случае 1 из (19),(34) следует, что

$$h(y,k) - \sum_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) > |t_{s+1}(y)|,$$

$$f_k^{i\leftarrow}(y) = |t_i(y)|, \;\; s+2 \leq i \leq k, \;\; [i]_m \in I^-.$$

В случае 2, поскольку $f_k^{l\leftarrow}(y) \geq 0 \;\; \forall l \in M, \; \forall k \in M$, то из (34) следует, что

$$h(y,k) - \sum_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) > 0 = |t_{s+1}(y)|,$$

Докажем, что в случае 2 тоже $f_k^{i\leftarrow}(y) = |t_i(y)|, \;\; s+2 \leq i \leq k, \;\; [i]_m \in I^-$. В противном случае

$$\exists q : [q]_m \in I^-, \;\; s+2 \leq q \leq k, \;\; f_k^{q\leftarrow}(y) \neq |t_q(y)|. \tag{35}$$

При $q = k$ из (19), (35) следует, что

$$f_k^{q\leftarrow}(y) = f_k^{k\leftarrow}(y) = h(y,k), \;\; f_k^{t\leftarrow}(y) = 0, \;\; t = k-1, \ldots, 1, m, \ldots, k+2,$$

и отсюда $h(y,k) - \sum\limits_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) = 0 = f_k^{s+1\leftarrow}(y)$. Но это противоречит (34).

При $s+2 \leq q \leq k-1$ из (19), (35) следует, что

$$f_k^{q\leftarrow}(y) = h(y,k) - \sum_{l=q+1}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y)$$

$$\Longrightarrow \;\; h(y,k) - \sum_{l=q}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) = 0,$$

Отсюда вытекает, что $f_k^{t\leftarrow}(y) = 0, \;\; s+2 \leq t \leq q-1$, и следовательно, $h(y,k) - \sum\limits_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) = 0$. А это противоречит (34).

Значит, в любом случае

$$f_k^{i\leftarrow}(y) = |t_i(y)|,\ s+2 \le i \le k,\ [i]_m \in I^- \tag{36}$$

$$\overset{(19),(34)}{\Longrightarrow} h(y,k) - \sum_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) > |t_{s+1}(y)|$$

$$\overset{(19)}{\Longrightarrow} h(y,k) - \sum_{\substack{l=s+2 \\ [l]_m \in I^-}}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) > |t_{s+1}(y)|$$

$$\overset{(36)}{\Longrightarrow} h(y,k) - \sum_{\substack{l=s+2 \\ [l]_m \in I^-}}^{k} |t_l(y)| > |t_{s+1}(y)|$$

$$\Longrightarrow h(y,k) > \sum_{\substack{l=s+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{k} |t_l(y)| > 0 \tag{37}$$

$$\overset{(21)}{\Longrightarrow} h(y,k) = \hat{t}[y] + \sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) > 0.$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) > -\hat{t}[y]$, и поскольку $\sum\limits_{l=r}^{s} t_l(y) = 2\hat{t}[y]$, то согласно лемме 1 имеем $\sum\limits_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) = -2\hat{t}[y]$, следовательно $\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) < -\hat{t}[y]$, и поэтому $\sum\limits_{\substack{l=s+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{k} t_l(y) < -\hat{t}[y]$. Тогда $\sum\limits_{\substack{l=s+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{k} -t_l(y) > \hat{t}[y]$, и следовательно, $\sum\limits_{\substack{l=s+1 \\ [l]_m \in I^-}}^{k} |t_l(y)| > \hat{t}[y]$. С учетом (37) получаем

$$h(y,k) > \hat{t}[y]. \tag{38}$$

С другой стороны, поскольку по лемме 1 $\sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) \le 0,\ \hat{t}[y] \ge 0$, то из (21) следует, что

$$h(y,k) \le \hat{t}[y] \quad \forall k \in M. \tag{39}$$

Значит (38) не верно, а тогда (34) не верно и

$$f_k^{s+1\leftarrow}(y) = h(y,k) - \sum_{l=s+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y)$$

$$\Longrightarrow \quad h(y,k) = \sum_{l=s+1}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y) \tag{40}$$

$$\overset{(19),(40)}{\Longrightarrow} f_k^{t\leftarrow}(y) = 0,\ t = s, s-1, \dots, 1, m, \dots, k+2.$$

Отсюда с учетом равенства (40) имеем

$$h(y,k) = \sum_{l=k+2}^{k} f_k^{l\leftarrow}(y),$$

и поскольку согласно (18) $f_k^{k+1\leftarrow}(y) = 0$, то $h(y,k) = \sum\limits_{l\in M} f_k^{l\leftarrow}(y)$.

Теперь допустим, что $k = [s+1]_m$. Тогда докажем, что $f_{s+1}^{s+1\leftarrow}(y) = h(y, s+1)$.

Возможны 2 случая

1. $[s+1]_m \in I^-$,
2. $[s+1]_m \in I^+,\ t_{s+1}(y) = 0$.

В случае 1 допустим, что $f_{s+1}^{s+1\leftarrow}(y) \neq h(y, s+1)$. Так как

$$f_{s+1}^{s+1\leftarrow}(y) = \min(h(y, s+1), |t_{s+1}(y)|),$$

то

$$h(y, s+1) > |t_{s+1}(y)| > 0 \tag{41}$$

$$\overset{(21)}{\Longrightarrow} \hat{t}[y] + \sum_{l=s+2}^{r-1} t_l(y) > 0.$$

Отсюда следует, что $\sum\limits_{l=s+2}^{r-1} t_l(y) > -\hat{t}[y]$, и поскольку $\sum\limits_{l=r}^{s} t_l(y) = 2\hat{t}[y]$, то согласно лемме 1 имеем $\sum\limits_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) = -2\hat{t}[y]$, и отсюда $\sum\limits_{l=s+1}^{s+1} t_l(y) = t_{s+1}(y) < -\hat{t}[y]$, и поэтому $|t_{s+1}(y)| > \hat{t}[y]$. С учетом (41) имеем

$$h(y, s+1) > \hat{t}[y]. \tag{42}$$

Но это противоречит (39).

В случае 2, поскольку $[s+1]_m \in I^+$, то $f_{s+1}^{s+1\leftarrow}(y) = 0$,

$$\begin{aligned} h(y, s+1) &= \max(0, \hat{t}[y] + \sum_{l=s+2}^{r-1} t_l(y)) \\ &= \max(0, \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y)) \\ &= \max(0, -\hat{t}[y]) \ \text{(в силу леммы 1(b), (17))} \\ &= 0 \ \text{(в силу леммы 1(c))}. \end{aligned}$$

Значит, в любом случае $f_{s+1}^{s+1\leftarrow}(y) = h(y, s+1)$, и согласно (18), (19)

$$f_{s+1}^{t\leftarrow}(y) = 0, \; t = s, s-1 \ldots, 1, m \ldots, s+2,$$

а тогда $\sum\limits_{l \in M} f_{s+1}^{l\leftarrow} = h(y, s+1)$.

3. a. Если $h(y,k) > 0$, то согласно (21) имеем

$$\hat{t}[y] + \sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) > 0. \tag{43}$$

Поскольку $\sum\limits_{l \in M} t_l(y) = 0$, то

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) + \sum_{l=r}^{s} t_l(y) + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) = 0 \\
\overset{(17)}{\Longrightarrow} &\sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) + 2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) = 0 \\
\Longrightarrow\ &\hat{t}[y] + \sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) = -(\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y))
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(43)}{\Longrightarrow} \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) < 0 \\
&\overset{(21)}{\Longrightarrow} g(y,k) = 0.
\end{aligned}$$

b. Если $g(y,k) > 0$, то согласно (21)

$$\begin{aligned}
&\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) > 0 \\
&\overset{(44)}{\Longrightarrow} \hat{t}[y] + \sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) < 0 \\
&\overset{(21)}{\Longrightarrow} h(y,k) = 0.
\end{aligned}$$

Значит, в любом случае

$$h(y,k)g(y,k) = 0 \;\; \forall k \in M. \tag{45}$$

4. Согласно (45) возможны 4 ситуации

$$g(y,k) - g(y,k-1) + h(y,k-1) - h(y,k) =$$

$$= \begin{cases}
\textbf{a. } g(y,k) - g(y,k-1), & \text{если} \quad h(y,k) = h(y,k-1) = 0, \\
\textbf{b. } g(y,k) + h(y,k-1), & \text{если} \quad h(y,k) = g(y,k-1) = 0, \\
\textbf{c. } h(y,k-1) - h(y,k), & \text{если} \quad g(y,k) = g(y,k-1) = 0, \\
\textbf{d. } -g(y,k-1) - h(y,k), & \text{если} \quad g(y,k) = h(y,k-1) = 0.
\end{cases}$$

Сначала докажем, что если $h(y,k) = 0$, то $g(y,k) = \hat{t}[y] + \sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) \quad \forall k \in M$.

При выполнении условия $h(y,k) = 0$ из (21) следует, что

$$\hat{t}[y] + \sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) \leq 0, \tag{46}$$

и согласно (44)

$$\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) \geq 0$$

$$\overset{(21)}{\Longrightarrow} g(y,k) = \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y).$$

Аналогично можно доказать, что

при $h(y,k-1) = 0$ будет $g(y,k-1) = \hat{t}[y] + \sum\limits_{l=s+1}^{k-1} t_l(y)$,

при $g(y,k) = 0$ будет $h(y,k) = \hat{t}[y] + \sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y)$,

при $g(y,k-1) = 0$ будет $h(y,k-1) = \hat{t}[y] + \sum\limits_{l=k}^{r-1} t_l(y)$.

Значит, в случае **a**

$$g(y,k) - g(y,k-1) + h(y,k-1) - h(y,k) = g(y,k) - g(y,k-1)$$

$$= \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) - (\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k-1} t_l(y)) = t_k(y).$$

В случае **b**

$$g(y,k) - g(y,k-1) + h(y,k-1) - h(y,k) = g(y,k) + h(y,k-1)$$

$$= \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{k} t_l(y) + (\hat{t}[y] + \sum_{l=k}^{r-1} t_l(y)) = 2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) + t_k(y)$$

$$\overset{(17)}{=} \sum_{l=r}^{s} t_l(y) + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) + t_k(y) = \sum_{l \in M} t_l(y) + t_k(y) \overset{\text{п.1}}{=} t_k(y). \tag{47}$$

В случае **c**

$$g(y,k) - g(y,k-1) + h(y,k-1) - h(y,k) = h(y,k-1) - h(y,k)$$

$$= \hat{t}[y] + \sum_{l=k}^{r-1} t_l(y) - (\hat{t}[y] + \sum_{l=k+1}^{r-1} t_l(y)) = t_k(y).$$

В случае **d**

$$g(y,k)-g(y,k-1)+h(y,k-1)-h(y,k)=-g(y,k-1)-h(y,k)$$
$$=-(\hat{t}[y]+\sum_{l=s+1}^{k-1}t_l(y))-(\hat{t}[y]+\sum_{l=k+1}^{r-1}t_l(y))$$
$$=-2\hat{t}[y]-\sum_{l=s+1}^{r-1}t_l(y)+t_k(y)\overset{(47)}{=}t_k(y).$$

Значит, в любом случае

$$g(y,k)-g(y,k-1)+h(y,k-1)-h(y,k)=t_k(y)\ \ \forall k\in M.$$

Лемма доказана.

Теперь вернемся к доказательству теоремы.

Сначала докажем, что $\min\limits_{c\in C(\gamma)}\max\limits_{l\in M}c_l\ \le\ \hat{t}(\gamma)$. Предварительно покажем, что

$$\min_{c\in C[y]}\max_{l\in M}c_l\le\max_{i,j\in M}\sum_{l=i}^{j}t_l(y)/2\ (\doteq\hat{t}[y])\ \ \forall y\in Y_\gamma(d),$$

другими словами, что

$$\forall y\in Y_\gamma(d)\ \ \exists\hat{c}=(\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_m)\in C[y]:\ \forall l\in M\ \ \hat{c}_l\le\hat{t}[y].$$

Возьмем $\hat{c}=(\hat{t}[y],\hat{t}[y],\dots,\hat{t}[y])$. Ясно, что $\forall l\in M\ \ \hat{c}_l\le\hat{t}[y]$. Докажем, что $\hat{c}\in\ C[y]$. По определению (14) надо доказать, что

$$\forall y\in Y_\gamma(d)\ \ \exists f\in F(y,\hat{c}):\ z(f)=d(1-\gamma),\ d=(d_1,\dots,d_m). \qquad (48)$$

Покажем, что набор $f(y)\in\mathbf{R}_+^{3m^2}$, определенный равенствами (18) – (23), удовлетворяет (48). Согласно (23), (18) условие неразрывности уже выполнено. Проверим условие допустимости сети для вектора требований $(1-\gamma)d$ и ограничения (3), (4) для $\alpha=\hat{c}$.
Если $i\in I^+$, то

$$f_i^{i\leftarrow}(y)=f_{i-1}^{i\rightarrow}(y)\overset{(19),(20)}{=}0,\ \ f_i^i(y)\overset{(23)}{=}d_i(1-\gamma)\overset{(2)}{\Longrightarrow}z_i=d_i(1-\gamma).$$

Если $i\in I^-$, то

$$f_i^{i\leftarrow}(y)+f_{i-1}^{i\rightarrow}(y)\overset{(19),(20)}{=}\min(h(y,i),|t_i(y)|)+\min(g(y,i-1),|t_i(y)|). \qquad (49)$$

Рассмотрим следующие ситуации:

I. $h(y,i) \geq |t_i(y)|$,

II. $g(y,i-1) \geq |t_i(y)|$,

III. $h(y,i) < |t_i(y)|$, $g(y,i-1) < |t_i(y)|$.

В первой ситуации при выполнении условия $h(y,i) \geq |t_i(y)|$, $i \in I^-$ покажем, что $g(y,i-1) = 0$. Допустим это не так, тогда

$$
\begin{aligned}
& h(y,i) \geq |t_i(y)| \overset{i \in I^-}{>} 0, \; i \in I^-, \; g(y,i-1) > 0 \qquad (50) \\
\overset{(21)}{\Longrightarrow} \; & h(y,i) = \hat{t}[y] + \sum_{i+1}^{r-1} t_l(y), \quad g(y,i-1) = \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i-1} t_l(y) \\
\Longrightarrow \; & h(y,i) + g(y,i-1) = \hat{t}[y] + \sum_{l=i+1}^{r-1} t_l(y) + \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i-1} t_l(y) \overset{(50)}{>} |t_i(y)| \\
\Longrightarrow \; & 2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) > 0 \\
\overset{(17)}{\Longrightarrow} \; & \sum_{l=r}^{s} t_l(y) + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) > 0 \\
\Longrightarrow \; & \sum_{l \in M} t_l(y) > 0,
\end{aligned}
$$

а это противоречит лемме 1.
Итак мы доказали, что

$$g(y,i-1) = 0 \quad \text{при} \quad h(y,i) \geq |t_i(y)|, \; i \in I^-. \qquad (51)$$

Из (49), (51) следует, что

$$f_i^{i\leftarrow}(y) + f_{i-1}^{i\rightarrow}(y) = \min(h(y,i), |t_i(y)|) + 0 = |t_i(y)| = -t_i(y), \quad i \in I^-.$$

Отсюда и из (2), (23) имеем

$$z_i = y_i - t_i(y) = y_i - (y_i - d_i(1-\gamma)) = d_i(1-\gamma).$$

Во второй ситуации при выполнении условия $g(y,i-1) \geq |t_i(y)|$, $i \in I^-$, покажем, что $h(y,i) = 0$. Допустим это не так, тогда

$$g(y,i-1) \geq |t_i(y)|, \; h(y,i) > 0 \qquad (52)$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ g(y,i-1)+h(y,i) > |t_i(y)| \\
&\overset{(21)}{\Longrightarrow}\ \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i-1} t_l(y) + \hat{t}[y] + \sum_{l=i+1}^{r-1} t_l(y) > |t_i(y)| \\
&\Longrightarrow\ 2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) > 0 \\
&\overset{(17)}{\Longrightarrow}\ \sum_{l\in M} t_l(y) > 0,
\end{aligned}
$$

а это противоречит лемме 1. Поэтому, если $g(y,i-1) \geq |t_i(y)|$, то $h(y,i) = 0$, и в силу (49) имеем

$$f_i^{i\leftarrow}(y) + f_{i-1}^{i\rightarrow}(y) = 0 + \min(g(y,i-1), |t_i(y)|) = |t_i(y)| = -t_i(y).$$

Отсюда и из (2), (23) следует, что

$$z_i = y_i - t_i(y) = y_i - (y_i - d_i(1-\gamma)) = d_i(1-\gamma).$$

В третьей ситуации, предполагая, что

$$h(y,i) < |t_i(y)|,\ g(y,i-1) < |t_i(y)|,$$

докажем, что $h(y,i) > 0,\ g(y,i-1) > 0$.

Предположим $h(y,i) = 0$, тогда в силу (21)

$$\hat{t}[y] + \sum_{l=i+1}^{r-1} t_l(y) \leq 0. \tag{53}$$

С другой стороны

$$g(y,i-1) < |t_i(y)| \overset{(21)}{\Longrightarrow} \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i-1} t_l(y) < |t_i(y)| \Longrightarrow \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i} t_l(y) < 0.$$

Отсюда с учетом (53) имеем

$$2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) < 0 \overset{(17)}{\Longrightarrow} \sum_{l\in M} t_l(y) < 0,$$

а это противоречит лемме 1. Итак $h(y,i) > 0$.

Теперь предположим, что $g(y,i-1) = 0$. Из (21) следует, что

$$\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i-1} t_l(y) \leq 0. \tag{54}$$

С другой стороны

$$h(y,i) < |t_i(y)| \overset{(21)}{\Longrightarrow} \hat{t}[y] + \sum_{l=i+1}^{r-1} t_l(y) < |t_i(y)| \Longrightarrow \hat{t}[y] + \sum_{l=i}^{r-1} t_l(y) < 0. \quad (55)$$

Из (54), (55) следует, что

$$2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) < 0 \overset{(17)}{\Longrightarrow} \sum_{l\in M} t_l(y) < 0,$$

а это противоречит лемме 1. Таким образом $g(y, i-1) > 0$.
В силу (49)

$$f_i^{i\leftarrow}(y) + f_{i-1}^{i\rightarrow}(y) = h(y,i) + g(y,i-1) = \hat{t}[y] + \sum_{l=i+1}^{r-1} t_l(y) + \hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{i-1} t_l(y) =$$

$$= 2\hat{t}[y] + \sum_{l=s+1}^{r-1} t_l(y) - t_i(y) \overset{(17)}{=} \sum_{l\in M} t_l(y) - t_i(y) = 0 - t_i(y) = -t_i(y).$$

Отсюда с учетом (2), (23) получаем

$$z_i = y_i - t_i(y) = y_i - (y_i - d_i(1-\gamma)) = d_i(1-\gamma).$$

Таким образом в любом случае $z_i = d_i(1-\gamma)$ – проверили условие допустимости сети для $(1-\gamma)d$.

Теперь проверяем выполнения ограничений по пропускной способности на радиальных ребрах.

Выполнено

$$\sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_k^i(y) \overset{(23)}{=} \sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_k^{i\rightarrow}(y) - \sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_{k-1}^{i\rightarrow}(y) + \sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_{k-1}^{i\leftarrow}(y) - \sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_k^{i\leftarrow}(y).$$

Поскольку согласно (18) $f_k^{k\rightarrow}(y) = f_{k-1}^{k\leftarrow}(y) = 0$, имеем

$$\sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_k^i(y) = \sum_{i\in M} f_k^{i\rightarrow}(y) -$$

$$-(\sum_{i\in M} f_{k-1}^{i\rightarrow}(y) - f_{k-1}^{k\rightarrow}(y)) + \sum_{i\in M} f_{k-1}^{i\leftarrow}(y) - (\sum_{i\in M} f_k^{i\leftarrow}(y) - f_k^{k\leftarrow}(y)).$$

Используя лемму 2, получаем

$$\sum_{\substack{i\in M\\ i\neq k}} f_k^i(y) =$$

$$
\begin{aligned}
&= g(y,k) - (g(y,k-1) - f_{k-1}^{k\rightarrow}(y)) + h(y,k-1) - (h(y,k) - f_k^{k\leftarrow}(y)) \\
&= \quad g(y,k) - g(y,k-1) + h(y,k-1) - h(y,k) + f_{k-1}^{k\rightarrow}(y) + f_k^{k\leftarrow}(y) \\
&\overset{(\text{n.2})}{=} \quad t_k(y) + (f_{k-1}^{k\rightarrow}(y) + f_k^{k\leftarrow}(y)) \\
&\overset{(2)}{=} \quad t_k(y) + (z_k - f_k^k(y)) \\
&= \quad y_k - d_k(1-\gamma) + (d_k(1-\gamma) - f_k^k(y)) \\
&= \quad y_k - f_k^k(y) \\
&\overset{(23)}{=} \begin{cases} y_k - y_k, & k \in I^-, \\ y_k - d_k(1-\gamma), & k \in I^+, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & k \in I^-, \\ y_k - d_k(1-\gamma), & k \in I^+. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Итак

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in M} f_k^i(y) &= \begin{cases} 0 + f_k^k(y), & k \in I^-, \\ y_k - d_k(1-\gamma) + f_k^k(y), & k \in I^+, \end{cases} \\
&\overset{(23)}{=} \begin{cases} y_k, & k \in I^-, \\ y_k - d_k(1-\gamma) + d_k(1-\gamma), & k \in I^+, \end{cases} \\
&= \quad y_k \quad \forall k \in M
\end{aligned}
$$

– проверили выполнение ограничений по пропускной способности на радиальных ребрах.

Теперь проверяем выполнение ограничений по пропускной способности на кольце. Надо доказать, что

$$
\sum_{i \in M} (f_k^{i\leftarrow}(y) + f_k^{i\rightarrow}(y)) \le \hat{t}[y] \quad \forall k \in M.
$$

Имеем

$$
\sum_{i \in M} (f_k^{i\leftarrow}(y) + f_k^{i\rightarrow}(y)) \quad = \quad \sum_{i \in M} f_k^{i\leftarrow}(y) + \sum_{i \in M} f_k^{i\rightarrow}(y)
$$

$$\stackrel{(\text{п.2})}{=} \quad h(y,k) + g(y,k)$$

$$\stackrel{(\text{п.2})}{=} \begin{cases} h(y,k), & \text{если} \;\; h(y,k) > 0, \\ g(y,k), & \text{если} \;\; g(y,k) > 0, \\ 0, & \text{если} \;\; g(y,k) = h(y,k) = 0, \end{cases}$$

$$\stackrel{(21)}{=} \begin{cases} \hat{t}[y] + \sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y), & \text{если} \;\; h(y,k) > 0, \\ \hat{t}[y] + \sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y), & \text{если} \;\; g(y,k) > 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Поскольку по лемме 1 $\sum\limits_{l=k+1}^{r-1} t_l(y) \le 0$ и $\sum\limits_{l=s+1}^{k} t_l(y) \le 0$, то

$$\sum_{i \in M} (f_k^{i\leftarrow}(y) + f_k^{i\rightarrow}(y)) \le \hat{t}[y]$$

– получили выполнение ограничений по пропускной способности на кольце.

Значит, мы уже доказали, что

$$\min_{c \in C[y]} \max_{l \in M} c_l \le \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y)/2 (\doteq \hat{t}[y]) \quad \forall y \in Y_\gamma(d). \tag{56}$$

Возьмем максимум по $y \in Y_\gamma(d)$ в (56) и получим

$$\max_{y \in Y_\gamma(d)} \min_{c \in C[y]} \max_{l \in M} c_l \le \max_{y \in Y_\gamma(d)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y)/2. \tag{57}$$

Обозначая

$$\max_{y \in Y_\gamma(d)} \min_{c \in C[y]} \max_{l \in M} c_l = c_\gamma, \tag{58}$$

покажем, что

$$\hat{c} = (c_\gamma, c_\gamma, \ldots, c_\gamma) \in C(\gamma).$$

Допустим это не так, и $\hat{c} = (c_\gamma, c_\gamma, \ldots, c_\gamma) \notin C(\gamma)$, тогда из (7) получаем

$$\exists \hat{y} \in Y_\gamma(d) : (1-\gamma)d \notin Z(\hat{y}, \hat{c}),$$

откуда аналогично доказанному в [4] выводим неравенство

$$\min_{c \in C[\hat{y}]} \max_{l \in M} c_l > c_\gamma,$$

но это противоречит (58). Значит $\hat{c} = (c_\gamma, \dots, c_\gamma) \in C(\gamma)$, и поэтому из определения $C(\gamma)$ имеем

$$\min_{c \in C(\gamma)} \max_{l \in M} c_l \leq c_\gamma.$$

В результате с учетом (57), (58) получаем

$$\min_{c \in C(\gamma)} \max_{l \in M} c_l \overset{(58)}{\leq} \max_{y \in Y_\gamma(d)} \min_{C[y]} \max_{l \in M} c_l \overset{(57)}{\leq} \max_{y \in Y_\gamma(d)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y)/2. \tag{59}$$

Теперь найдем $\max\limits_{y \in Y_\gamma(d)} \max\limits_{i,j \in M} \sum\limits_{l=i}^{j} t_l(y)$. Для этого сначала докажем, что

$$\max_{y \in Y_\gamma(d)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) = \max_{y \in Y_1(\gamma)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y). \tag{60}$$

Пусть $\hat{y}^1 \in \operatorname{Arg} \max\limits_{y \in Y_\gamma(d)} (\max\limits_{i,j \in M} \sum\limits_{l=i}^{j} t_l(y))$, $\max\limits_{i,j \in M} \sum\limits_{l=i}^{j} t_l(\hat{y}^1) = \sum\limits_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^1)$. Значит

$$\max_{y \in Y_\gamma(d)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^1). \tag{61}$$

Далее для простоты рассмотрим случай $r \leq s < m$. Общий случай может быть исследован аналогично.

Пусть $\hat{y}^1 = (\hat{y}_1^1, \dots, \hat{y}_r^1, \dots, \hat{y}_s^1, \dots, \hat{y}_n^1)$. Возможны две ситуации

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} \ \sum\limits_{l=s+1}^{r-1} \hat{y}_l^1 > d_{s+1}(1-\gamma), \\ \mathbf{b.} \ \sum\limits_{l=s+1}^{r-1} \hat{y}_l^1 \leq d_{s+1}(1-\gamma). \end{array}\right.$$

В ситуации **a** введем $\hat{y}^2 = (\hat{y}_1^2, \dots, \hat{y}_{r-1}^2, \hat{y}_r^1, \dots, \hat{y}_s^1, \hat{y}_{s+1}^2, \dots, \hat{y}_m^2)$, где

$$\begin{aligned} &\hat{y}_{s+1}^2 = \min(d_{s+1}, \ \sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1), \\ &\hat{y}_l^2 = \min(d_l, \ \max(\sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1 - \sum_{i=s+1}^{l-1} d_i, \ 0)), \ s+2 \leq l \leq r-1. \end{aligned} \tag{62}$$

Если $d_{s+1} \geq \sum\limits_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1$, то

$$\begin{cases} \hat{y}_{s+1}^2 = \sum\limits_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1, \\ \hat{y}_k^2 = 0, \qquad\qquad s+2 \leq k \leq r-1, \end{cases}$$

и отсюда

$$\sum_{i\in M}\hat{y}_i^2=\sum_{i=r}^{s}\hat{y}_i^1+\sum_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^2=\sum_{i=r}^{s}\hat{y}_i^1+\sum_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1=\sum_{i\in M}\hat{y}_i^1,$$

а это значит, что $\hat{y}^2\in Y_\gamma(d)$.

С другой стороны поскольку в этом случае $\hat{y}_{s+1}^2=\sum\limits_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1>d_{s+1}(1-\gamma)$, то $t_{s+1}(\hat{y}^2)>0$ и получаем

$$\sum_{i=r}^{s+1}t_i(\hat{y}^2)=\sum_{i=r}^{s}t_i(\hat{y}^2)+t_{s+1}(\hat{y}^2)=\sum_{i=r}^{s}t_i(\hat{y}^1)+t_{s+1}(\hat{y}^2)>\sum_{i=r}^{s}t_i(\hat{y}^1),$$

но это противоречит (61).

Теперь допустим, что $d_{s+1}<\sum\limits_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1$. Ясно, что $\hat{y}_{r-1}^1\neq d_{r-1}$, иначе если $\hat{y}_{r-1}^1=d_{r-1}$, то $t_{r-1}(\hat{y}^1)>0$ и $\sum\limits_{l=r-1}^{s}t_l(\hat{y}^1)>\sum\limits_{l=r}^{s}t_l(\hat{y}^1)$, но это противоречит (61).

Множество $L\doteq\{l:\ d_l>\max(\sum\limits_{i=s+2}^{r-1}\hat{y}_i^1-\sum\limits_{i=s+1}^{l-1}d_i,\ 0),\ s+2\leq l\leq\ r-1\}$ непусто. Действительно, в противном случае, поскольку $d_l>0\ \forall l\in M$, то

$$0<d_l\leq\sum_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1-\sum_{i=s+1}^{l-1}d_i\quad\forall l:\ s+2\leq l\leq r-1,$$

и отсюда $\sum\limits_{i=s+1}^{l}d_i\ \leq\ \sum\limits_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1\quad\forall l\ :\ \ s+2\ \leq\ l\ \leq\ r-1$. Поэтому $\sum\limits_{i=s+1}^{r-1}d_i\leq\sum\limits_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1$. Тогда либо

$$d_i=\hat{y}_i^1\quad\forall i:\ s+1\leq i\leq r-1,$$

либо

$$\exists i:\ s+1\leq i\leq\ r-1,\ d_i<\hat{y}_i^1.$$

Так как $\hat{y}_{r-1}^1\neq d_{r-1}$ и $\hat{y}_i^1\leq d_i\ \forall i\in M$, то $L\neq\emptyset$.
Пусть $l'=\min\limits_{l\in L}l$. Тогда согласно (62) имеем

$$\begin{cases}\hat{y}_k^2=d_k, & s+1\leq k\leq l'-1,\\ \hat{y}_k^2=\sum\limits_{i=s+1}^{r-1}\hat{y}_i^1-\sum\limits_{i=s+1}^{l'-1}d_i, & k=l',\\ \hat{y}_k^2=0, & l'+1\leq k\leq r-1,\end{cases}$$

и отсюда

$$\sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^2 = \sum_{i=s+1}^{l'-1} d_i + \sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1 - \sum_{i=s+1}^{l'-1} d_i = \sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1 \Longrightarrow \sum_{i\in M} \hat{y}_i^1 = \sum_{i\in M} \hat{y}_i^2,$$

а это значит, что $\hat{y}^2 \in Y_\gamma(d)$.

С другой стороны поскольку в этом случае $\hat{y}_{s+1}^2 = \min(d_{s+1}, \sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1) > d_{s+1}(1-\gamma)$, то $t_{s+1}(\hat{y}^2) > 0$ и получаем

$$\sum_{i=r}^{s+1} t_i(\hat{y}^2) = \sum_{i=r}^{s} t_i(\hat{y}^2) + t_{s+1}(\hat{y}^2) = \sum_{i=r}^{s} t_i(\hat{y}^1) + t_{s+1}(\hat{y}^2) > \sum_{i=r}^{s} t_i(\hat{y}^1),$$

но это противоречит (61). Значит в ситуации **a** мы пришли к противоречию, а это означает, что ситуация **a** невозможна.

В ситуации **b** возможны два случая

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{b.1.}\ 0 < \sum_{l=s+1}^{r-1} \hat{y}_l^1 \le d_{s+1}(1-\gamma), \\ \mathbf{b.2.}\ \sum_{l=s+1}^{r-1} \hat{y}_l^1 = 0. \end{array}\right.$$

В случае **b.1** введем $\hat{y}^3 = (0,\dots,0,\hat{y}_r^1,\dots,\hat{y}_s^1, \sum_{l=s+1}^{r-1} \hat{y}_l^1, 0,\dots,0)$.

Поскольку $\sum_{l\in M} \hat{y}^3 = \sum_{l\in M} \hat{y}^1$, $\hat{y}^1 \in Y_\gamma(d)$, то $\hat{y}^3 \in Y_\gamma(d)$. Если $\exists l: \ r \le l \le s, \ \hat{y}_l^1 < d_l$, тогда введем

$$\hat{y}^4 = (0,\dots,0,\hat{y}_r^1,\dots,\hat{y}_{l-1}^1,\hat{y}_l^4,\hat{y}_{l+1}^1\dots,\hat{y}_s^1,\hat{y}_{s+1}^4,0,\dots,0),$$

где $\hat{y}_l^4 = \hat{y}_l^1 + \epsilon$, $\hat{y}_{s+1}^4 = \sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1 - \epsilon$, $0 < \epsilon \le \min(d_l - \hat{y}_l^1, \sum_{i=s+1}^{r-1} \hat{y}_i^1)$, и получим

$$\sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^4) = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^3) + \epsilon \Longrightarrow \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^4) > \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^3) = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^1),$$

но это противоречит (61), поскольку данный выбор ϵ обеспечивает $\hat{y}^4 \in Y_\gamma(d)$. Остается возможность $\hat{y}_l^1 = d_l \ \forall l : \ r \le l \le s$. А тогда $\hat{y}^3 \in Y_1(\gamma)$, так как $\hat{y}^3 = y^r$, при этом $r + j(r,\gamma) = s+1$ и $\hat{y}_{s+1} = d_{s+1} - \sum_{l=r}^{s+1} d_l + (1-\gamma)\sum_{l\in M} d_l$. Следовательно

$$\max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(\hat{y}^3) = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^3) = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \max_{y\in Y_\gamma(d)} \max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) \le \max_{y\in Y_1(\gamma)} \max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y).$$

Поскольку $Y_1(\gamma) \subseteq Y_\gamma(d)$, то $\max\limits_{y\in Y_\gamma(d)} \max\limits_{i,j\in M} \sum\limits_{l=i}^{j} t_l(y) = \max\limits_{y\in Y_1(\gamma)} \max\limits_{i,j\in M} \sum\limits_{l=i}^{j} t_l(y)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай **b.2**. При условии $\sum\limits_{l=s+1}^{r-1} \hat{y}_l^1 = 0$ имеем

$$\hat{y}^1 = (0,\dots,0,\hat{y}_r^1,\dots,\hat{y}_s^1,0,\dots,0).$$

Если $r = s$, тогда $\hat{y}^1 = (0,\dots,0,\hat{y}_r^1,0,\dots,0)$ и $\hat{y}^1 \in Y_1(\gamma)$. Тогда аналогично предыдущему приходим к требуемому результату.

Теперь допустим, что $r < s$. У нас возможны две ситуации:

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{b.2.1.} \sum\limits_{l=r}^{s-1}(d_l - \hat{y}_l^1) \ge \hat{y}_s^1, \\ \textbf{b.2.2.} \sum\limits_{l=r}^{s-1}(d_l - \hat{y}_l^1) < \hat{y}_s^1. \end{array}\right.$$

b.2.1. В этом случае $\sum\limits_{l=r}^{s-1} d_l \ge \sum\limits_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1$ и введем

$$\hat{y}^5 = (0,\dots,\hat{y}_r^5,\dots,\hat{y}_{s-1}^5,\hat{y}_s^5,0,\dots,0),$$

где

$$\hat{y}_r^5 = \min(d_r, \sum_{k=r}^{s} \hat{y}_k^1)$$
$$\hat{y}_l^5 = \min(d_l, \max(\sum_{k=r}^{s} \hat{y}_k^1 - \sum_{k=r}^{l-1} d_k, 0)),\ r+1 \le l \le s.$$

Как и для $\hat{y}^2$, можно доказать, что $\hat{y}^5 \in Y_\gamma(d)$. Согласно определению $\hat{y}^5$ имеем $\hat{y}_s^5 = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{l=r}^{s-1} t_l(\hat{y}^5) &= \sum_{l=r}^{s-1} \hat{y}_l^5 - \sum_{l=r}^{s-1} d_l(1-\gamma) \\ &= \sum_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1 - \sum_{l=r}^{s-1} d_l(1-\gamma) \\ &> \sum_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1 - \sum_{l=r}^{s} d_l(1-\gamma) = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^1), \end{aligned}$$

но это противоречит (61).

b.2.2. В этом случае $\sum\limits_{l=r}^{s-1} d_l < \sum\limits_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1$ и введем

$$\hat{y}^6 = (0, \ldots, 0, d_r, \ldots, d_{s-1}, \sum_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1 - \sum_{l=r}^{s-1} d_l, 0, \ldots, 0).$$

Поскольку $\sum\limits_{l \in M} \hat{y}_l^6 = \sum\limits_{l=r}^{s} \hat{y}_l^6 = \sum\limits_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1 = \sum\limits_{l \in M} \hat{y}_l^1$, то $\hat{y}^6 \in Y_\gamma(d)$.
С другой стороны

$$\sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^6) = \sum_{l=r}^{s} \hat{y}_l^6 - (1-\gamma) \sum_{l=r}^{s} d_l = \sum_{l=r}^{s} \hat{y}_l^1 - (1-\gamma) \sum_{l=r}^{s} d_l = \sum_{l=r}^{s} t_l(\hat{y}^1).$$

По построению $\hat{y}^6 \in Y_1(\gamma)$, $\hat{y}^6 = y^r$, при этом $r + j(r,\gamma) = s$ и

$$\hat{y}_s^6 = d_s - \sum_{l=r}^{s} d_l + \sum_{l=r}^{s} y_l^1 = d_s - \sum_{l=r}^{s} d_l + \sum_{l \in M} y_l^1 = d_s - \sum_{l=r}^{s} d_l + (1-\gamma) \sum_{l \in M} d_l.$$

Поэтому для рассматриваемого случая снова получаем

$$\max_{y \in Y_\gamma(d)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) = \max_{y \in Y_1(\gamma)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y).$$

Таким образом, (60) доказано.

Теперь для доказательства теоремы надо доказать, что

$$\max_{y \in Y_1(\gamma)} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) = \gamma(1-\gamma) \sum_{l \in M} (d_l - b[\gamma])/2 (\doteq \hat{t}(\gamma)).$$

Пусть $y \in Y_1(\gamma)$, для определенности предположим, что

$$y = y^r = (0, \ldots, 0, d_r, \ldots, d_s, y_{s+1}^r, 0, \ldots, 0),$$

где $r \in M, s = r + j(r,\gamma) - 1$ по модулю m. Здесь возможны два случая

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a.}\ y_{s+1}^r > d_{s+1}(1-\gamma), \\ \textbf{b.}\ y_{s+1}^r \le d_{s+1}(1-\gamma). \end{array} \right.$$

В случае **a**

$$\begin{aligned} \max_{i,j \in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y^r) &= \sum_{l=r}^{s} (d_l - d_l(1-\gamma)) + (y_{s+1}^r - d_{s+1}(1-\gamma)) \\ &= \gamma \sum_{l=r}^{s} d_l + (\gamma y_{s+1}^r + (1-\gamma) y_{s+1}^r) - d_{s+1}(1-\gamma) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma(\sum_{l=r}^{s} d_l + y^r_{s+1}) + (y^r_{s+1} - d_{s+1})(1-\gamma) \\
&= \gamma \sum_{l\in M} y^r_l + (y^r_{s+1} - d_{s+1})(1-\gamma) \\
&= \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - (d_{s+1} - y^r_{s+1})(1-\gamma). \qquad (63)
\end{aligned}
$$

В случае **b**

$$
\begin{aligned}
\max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y^r) &= \sum_{l=r}^{s}(d_l - d_l(1-\gamma)) = \gamma \sum_{l=r}^{s} d_l = \gamma \sum_{l=r}^{s} y^r_l = \gamma \sum_{l\in M} y^r_l - \gamma y^r_{s+1} \\
&= \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - \gamma y^r_{s+1}.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (63) следует, что

$$
\begin{aligned}
\max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y^r) &= \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - \max\{y^{r-}_{s+1}\gamma, (d_{s+1} - y^{r+}_{s+1})(1-\gamma)\}, \\
&= \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - b(y^r).
\end{aligned}
$$

Аналогично можно доказать, что для $y'^r \in Y_1(\gamma)$

$$
\max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y'^r) = \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - b(y'^r),
$$

и отсюда

$$
\begin{aligned}
\max_{y\in Y_1(\gamma)} \max_{i,j\in M} \sum_{l=i}^{j} t_l(y) &= \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - \min_{r\in M} \min\{b(y^r), b(y'^r)\} \\
&= \gamma(1-\gamma) \sum_{l\in M} d_l - b[\gamma]\ (\doteq 2\hat{t}(\gamma)).
\end{aligned}
$$

С учетом (59), (60) получаем

$$
\min_{c\in C(\gamma)} \max_{l\in M} c_l \le \hat{t}(\gamma). \qquad (64)
$$

Осталось наконец доказать, что $\forall c \in C(\gamma) \quad \exists l \in M : \quad c_l \ge \hat{t}(\gamma)$. Фиксируем $\gamma \in (0,1)$. Пусть $c = (c_1, \ldots, c_m) \in C(\gamma)$,

$$
r \in \operatorname{Arg} \min_{i\in M} \min\{b(y^i), b(y'^i)\}, \qquad (65)
$$

где зависящие от γ y^i, y'^i и $b(\cdot)$ определены согласно (9) – (11).

Выбираем

$$\begin{cases} \textbf{1. } y^* = y^r = (0, \ldots, 0, d_r, d_{r+1}, \ldots, d_{r+j(r,\gamma)-1}, y_{r+j(r,\gamma)}, 0, \ldots, 0), \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } b(y^r) \le b(y'^r), \\ \textbf{2. } y^* = y'^r = (0, \ldots, 0, y_r, d_{r+1}, d_{r+2}, \ldots, d_{r+j(r,\gamma)}, 0, \ldots, 0), \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } b(y^r) > b(y'^r). \end{cases}$$

Покажем, что из условия $(1-\gamma)d \in Z(y^*, c)$ с необходимостью вытекает существование $l \in M \ : \ c_l \ge \hat{t}(\gamma)$. Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $s = r + j(r,\gamma) - 1$ по модулю m, тогда в случае 1

$$y^* = (0, \ldots, 0, d_r, \ldots, d_s, y_{s+1}, 0, \ldots, 0) \tag{66}$$

и возможны две ситуации

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a. } y_{s+1} > d_{s+1}(1-\gamma), \\ \textbf{b. } y_{s+1} \le d_{s+1}(1-\gamma). \end{array} \right.$$

Для определенности полагаем, что $1 \le r \le s < m$. Согласно (22) в ситуации **a** $I^+ = \{r, r+1, \ldots, s+1\}$ и в ситуации **b** $I^+ = \{r, r+1, \ldots, s\}$.

Ситуация **a**: На основе ограничения пропускной способности на кольце $\forall f \in F(y^*, c)$ имеем

$$\sum_{i \in M} f_{r-1}^{i\leftarrow} \le c_{r-1},$$

$$\sum_{i \in M} f_{s+1}^{i\rightarrow} \le c_{s+1},$$

и отсюда

$$\sum_{i \in M} (f_{r-1}^{i\leftarrow} + f_{s+1}^{i\rightarrow}) \le c_{r-1} + c_{s+1}. \tag{67}$$

С другой стороны в общем случае имеем

$$\sum_{k=i+1}^{j} (f_k^{i\rightarrow} - f_{k-1}^{i\rightarrow}) = f_j^{i\rightarrow} - f_i^{i\rightarrow} = f_j^{i\rightarrow} \quad \forall i, j \in M, \tag{68}$$

$$\sum_{k=j+1}^{i-1} (f_{k-1}^{i\leftarrow} - f_k^{i\leftarrow}) = f_j^{i\leftarrow} - f_{i-1}^{i\leftarrow} = f_j^{i\leftarrow} \quad \forall i, j \in M. \tag{69}$$

Поскольку

$$\sum_{k=l}^{l-1} (f_k^{l-1\rightarrow} - f_{k-1}^{l-1\rightarrow}) \overset{(68)}{=} f_{l-1}^{l-1\rightarrow} \overset{(1)}{=} 0 \quad \forall l \in M, \tag{70}$$

$$\sum_{k=l}^{l-1}(f_{k-1}^{l\leftarrow}-f_k^{l\leftarrow}) \overset{(69)}{=} f_{l-1}^{l\leftarrow} \overset{(1)}{=} 0 \quad \forall l \in M, \tag{71}$$

то $\forall i \in I^-$ (т.е. $s+2 \leq i \leq r-1$) имеем

$$\begin{aligned} f_{s+1}^{i\rightarrow} = \sum_{k=i+1}^{s+1}(f_k^{i\rightarrow}-f_{k-1}^{i\rightarrow}) &\overset{(70)}{=} \sum_{k=i+1}^{r-1}(f_k^{i\rightarrow}-f_{k-1}^{i\rightarrow})+\sum_{k=r}^{s+1}(f_k^{i\rightarrow}-f_{k-1}^{i\rightarrow}) \\ &\overset{(68)}{=} f_{r-1}^{i\rightarrow}+\sum_{k=r}^{s+1}(f_k^{i\rightarrow}-f_{k-1}^{i\rightarrow}) \\ &\geq \sum_{k=r}^{s+1}(f_k^{i\rightarrow}-f_{k-1}^{i\rightarrow}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{r-1}^{i\leftarrow} = \sum_{k=r}^{i-1}(f_{k-1}^{i\leftarrow}-f_k^{i\leftarrow}) &\overset{(71)}{=} \sum_{k=r}^{s+1}(f_{k-1}^{i\leftarrow}-f_k^{i\leftarrow})+\sum_{k=s+2}^{i-1}(f_{k-1}^{i\leftarrow}-f_k^{i\leftarrow}) \\ &\overset{(69)}{=} \sum_{k=r}^{s+1}(f_{k-1}^{i\leftarrow}-f_k^{i\leftarrow})+f_{s+1}^{i\leftarrow} \\ &\geq \sum_{k=r}^{s+1}(f_{k-1}^{i\leftarrow}-f_k^{i\leftarrow}). \end{aligned}$$

Тогда

$$f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_{s+1}^{i\rightarrow} \geq \sum_{k=r}^{s+1}(f_k^{i\rightarrow}-f_{k-1}^{i\rightarrow}+f_{k-1}^{i\leftarrow}-f_k^{i\leftarrow}) \overset{(1)}{=} \sum_{k=r}^{s+1} f_k^i.$$

А поскольку согласно (66) $y_k^* = 0 \;\; \forall k: \; s+2 \leq k \leq r-1$, то $\forall i \in I^-$,

$$f_k^i = 0 \;\; \forall k: \; s+2 \leq k \leq r-1$$

и отсюда

$$\sum_{k=r}^{s+1} f_k^i = \sum_{k \in M} f_k^i \overset{(2)}{=} z_i,$$

значит

$$f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_{s+1}^{i\rightarrow} \geq z_i.$$

Следовательно

$$\sum_{i \in M}(f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_{s+1}^{i\rightarrow}) \geq \sum_{i \in I^-}(f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_{s+1}^{i\rightarrow}) \geq \sum_{i \in I^-} z_i.$$

Теперь поскольку $c \in C(\gamma)$, то $(1-\gamma)d \in Z(y^*, c)$ и отсюда по определению $Z(y^*, c)$ $\exists f \in F(y^*, c): \; z = (1-\gamma)d$. Тогда для такого f имеем

$$\sum_{i \in M}(f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_{s+1}^{i\rightarrow}) \geq \sum_{i \in I^-} z_i = \sum_{i \in I^-} d_i(1-\gamma).$$

В ситуации **a** для (66), так как $y_i^* = 0 \ \ \forall i \in I^-$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I^-} d_i(1-\gamma) &= -\sum_{i \in I^-} (y_i^* - d_i(1-\gamma)) \\
&= -\sum_{i \in I^-} t_i(y^*) \overset{(\text{л.}1)}{=} \sum_{i \in I^+} t_i(y^*) = \sum_{l=r}^{s+1} t_l(y^*) \\
&\text{по определению } \ I^+ \text{ для } y^*.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{i \in M} (f_{r-1}^{i\leftarrow} + f_{s+1}^{i\rightarrow}) \geq \sum_{l=r}^{s+1} t_l(y^*)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}
\sum_{l=r}^{s+1} t_l(y^*) &= \sum_{l=r}^{s}(d_l - d_l(1-\gamma)) + y_{s+1} - d_{s+1}(1-\gamma) \\
&= \gamma \sum_{l=r}^{s} d_l + (\gamma y_{s+1} + (1-\gamma) y_{s+1}) - d_{s+1}(1-\gamma) \\
&= \gamma \sum_{l \in M} y_l + (y_{s+1} - d_{s+1})(1-\gamma) \\
&= \gamma(1-\gamma) \sum_{l \in M} d_l - (d_{s+1} - y_{s+1})(1-\gamma) \\
&= \gamma(1-\gamma) \sum_{l \in M} d_l - b(y^r) \\
&\overset{(65)}{=} \gamma(1-\gamma) \sum_{l \in M} d_l - b[\gamma] = 2\hat{t}(\gamma),
\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\sum_{i \in M} (f_{r-1}^{i\leftarrow} + f_{s+1}^{i\rightarrow}) \geq 2\hat{t}(\gamma). \tag{72}$$

В силу (67), (72)

$$c_{r-1} + c_{s+1} \geq 2\hat{t}(\gamma).$$

Тогда либо $c_{r-1} \geq \hat{t}(\gamma)$, либо $c_{s+1} \geq \hat{t}(\gamma)$, и следовательно,

$$\exists l \in M : c_l \geq \hat{t}(\gamma). \tag{73}$$

Ситуация **b**: На основе ограничения пропускной способности на кольце $\forall f \in \ F(y^*, c)$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in M} f_{r-1}^{i\leftarrow} &\leq c_{r-1}, \\
\sum_{i \in M} f_{s}^{i\rightarrow} &\leq c_s,
\end{aligned}$$

и отсюда получаем

$$\sum_{i\in M}(f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_s^{i\rightarrow})\le c_{r-1}+c_s. \tag{74}$$

С другой стороны, аналогично ситуации **a**, $\exists f\in F(y^*,c)$ такое, что

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in M}(f_{r-1}^{i\leftarrow}+f_s^{i\rightarrow}) &\ge \sum_{l=r}^{s}t_l(y^*)=\sum_{l=r}^{s}(d_l-d_l(1-\gamma))\\
&= \gamma\sum_{l=r}^{s}d_l=\gamma(\sum_{l\in M}y_l-y_{s+1})\\
&= \gamma\sum_{l\in M}y_l-\gamma y_{s+1}=\gamma(1-\gamma)\sum_{l\in M}d_l-\gamma y_{s+1}\\
&= \gamma(1-\gamma)\sum_{l\in M}d_l-b(y^r)\\
&= \gamma(1-\gamma)\sum_{l\in M}d_l-b[\gamma]\overset{(12)}{=}2\hat{t}(\gamma).
\end{aligned} \tag{75}$$

Из (74), (75) следует, что

$$c_{r-1}+c_s\ge 2\hat{t}(\gamma).$$

Тогда либо $c_{r-1}\ge\hat{t}(\gamma)$, либо $c_s\ge\hat{t}(\gamma)$, и следовательно,

$$\forall c\in C(\gamma)\ \ \exists l\in M:\ c_l\ge\hat{t}(\gamma).$$

Отсюда с учетом (64), (73) получаем

$$\min_{c\in c(\gamma)}\max_{l\in M}c_l=\frac{\gamma(1-\gamma)\sum\limits_{i=1}^{m}d_i-b[\gamma]}{2}(\doteq\hat{t}(\gamma))$$

Аналогичный результат можно получить для случая 2, т.е. для

$$y^*=(0,\dots,0,y_r,d_{r+1},d_{r+2},\dots,d_{r+j(r,\gamma)},0,\dots,0).$$

Теорема полностью доказана.

Литература

1. Карзанов А.В. Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.:ВНИИСИ, 1979.

2. Филипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

3. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

4. Ахмади М.Б., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Исследование живучести иерархической сети. //Вестн. моск. ун-та. сер. 15, вычисл. матем. и киберн. 2001. № 3.