А. В. Анисимов, Н. Л. Григоренко, Л. Н. Лукьянова

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ*

1. Введение.

Односекторные модели экономического роста относятся к сильно агрегированным моделям экономической динамики и в совокупности с двусекторными и трехсекторными моделями, используются для прогнозирования динамики экономических показателей [1]-[5]. Исследованию односекторных моделей и соответствующих задач оптимального управления для экономических процессов отличающихся от процессов, рассмотренных в работах [1]-[5], посвящены работы [6]-[14]. В работах [6]-[13], исследуемые односекторные модели отличаются выбором управляющих параметров и ограничений на них. В работе [6] рассмотрена модель односекторной экономики при наличии внешних инвестиций, в работах [7], [8], [11] рассмотрена задача максимизации потребления работодателей на конечном интервале времени при постоянных трудовых ресурсах, в работе [9] рассмотрена задача управления основными фондами и величиной кредитного займа для максимизации прибыли, в работах [10], [12] рассмотрена задача управления односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом налоговых отчислений, в работе [13] рассмотрена задача управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление. В настоящей работе рассматривается модель из работы [3] с управляемым параметром - уровнем потребления на одного работающего $c(t)$. Обозначим $k(t)$ - фондовооруженность одного работающего, $f(k)$ - производственная функция рассматриваемого процесса. При ограничении $0 \le c(t) \le f(k(t))$ соответствующая задача управления рассмотрена в работе [4]. При ограничении $\mu f(k(t)) \le c(t) \le f(k(t)),\ \mu < 1$ соответствующая задача управления может быть сведена к случаю $c(t) \in [\bar{c}, f(k(t))]$ заменой переменных. В настоящей работе приведено решение задачи управления для ограничения вида $\bar{c} \le c(t) \le f(k(t))$, в случае экспоненциального закона изменения трудовых ресурсов. Соответствующая модель описана в работах [2], [3], [5]. Приведены результаты расчета управления для тестовых параметров модели.

*Работа поддержана грантами РФФИ (проект № $13-01-12446$ офи-м), программы поддержки ведущих научных школ (НШ.6512.2012.1), программы Президиума РАН № 14 проект 208.

2. Постановка задачи оптимального управления для модели Солоу со смешанным ограничением.

Пусть

1) $k = K/L, c = C/L, y = Y/L$ - удельные относительно трудовых ресурсов L основные фонды (фондовооружённость), потребление и произведённый продукт ;

2) $\mu > 0$ - коэффициент амортизации основных фондов, $\delta > 0$ - коэффициент дисконтирования;

3) $f(k) = F(K, L)/L = F(k, 1)$, где $F(K, L)$ - линейно-однородная производственная функция, удовлетворяющая неоклассическим условиям [4].

Тогда задача максимизации удельного интегрального потребления на конечном интервале времени $[0, T]$ [3]-[4], (Т- фиксировано) является задачей оптимального управления следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - \mu k(t),\ k(0) = k_0,\ k(T) = k_T,\ t \in [0, T], \\ 0 < \bar{c} \le c \le f(k),\ f(k_0) > \bar{c}, \\ J = \int\limits_0^T e^{-\delta t} U(c(t))\, dt \to \max_{c(t)} . \end{cases} \tag{1}$$

Функция $f(k)$ удовлетворяет неоклассическим условиям [4]: $f(0) = 0$,

$$f'(k) > 0,\ f''(k) < 0,\ \lim_{k->0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k->\infty} f(k) = \infty,\ \lim_{k->\infty} f'(k) = 0. \tag{2}$$

Функция полезности $U(c)$ удовлетворяет условиям [3], [4]:

$$U(c) > 0,\ U'(c) > 0,\ U''(c) \le 0,\ \lim_{c->0} U'(c) = \infty,\ \lim_{c->\infty} U'(c) = 0. \tag{3}$$

3. Существование решения в задаче оптимального управления (1).

Для обоснования существования решения в задаче (1), применим теорему существования из работы [19] для задач со смешанными ограничениями следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{z} = f_1(z(t), w(t), t),\ z(t_0) = z_0,\ z(T) = z_T, \\ h(z(t), w(t), t) \ge 0, \\ \int\limits_0^T f_0(z(t), w(t), t) dt \to max_{w(t)}, \end{cases} \tag{4}$$

где $z \in R^n,\ w \in R^r,\ h \in R^m,\ w(t)$ - управляющий параметр.

Теорема 1. *(Теорема существования [19], стр. 285). Предположим, что в задаче (4):*

1) существует допустимое управление $w(t)$*, такое, что для соответствующей траектории* $z(t):\ z(0)=z_0,\ z(T)=z_T$*;*
2) множество $N(z,t)=\{(f_0(z,w,t)+\gamma, f_1(z,w,t)):\ \gamma\le 0,\ h(z,w,t)\ge 0\}$ *выпукло* $\forall z$ *и* $\forall t\in[t_0,t_1]$;
3) существует константа b*, такая что* $||z(t)||\le b$*, для любой допустимой пары* $(z(t),w(t))$ *и для любого* $t\in[t_0,t_1]$;
4) существует шар $B(0,b_1)$ *в* R^r*, который при любом* $z:||z||\le b_1$ *и любом* $t\in[t_0,t_1]$ *содержит множество* $U(z,t)=\{w:\ h(z,w,t)\ge 0\}$.
Тогда, в задаче (4), существует измеримое по Лебегу оптимальное управление.

Проверим выполнение условий теоремы 1 для задачи (1). Приведем соотношения для $x_0,\ x_T,\ T$, при которых имеет решение задача управляемости (условие 1 теоремы 1) для системы (1). Обозначим η_1,η_2,η_4 корни уравнений $f(\eta_1)=\bar c,\ f(\eta_2)=\bar c+\mu\eta_2,\ f(\eta_4)=\bar c+\mu\eta_4,\ \eta_2<\eta_4$.

Предположение 1. Параметры $\bar c,\mu$ таковы, что корни η_1,η_2,η_3 существуют; для $x_0,\ x_T,\ T$ выполнено одно из условий
1) $\eta_2<x_0<x_T<\eta_4,\ T\ge\int_{x_0}^{x_T}\frac{dx}{f(x)-\mu x-\bar c}$;
2) $\eta_1<x_T<x_0,\ T\ge\int_{x_0}^{x_T}\frac{dx}{-\mu x}$.

Выполнение условия 1) теоремы 1 для параметров x_0,x_T,T, приведенных в предположении 1, проверяется указанием явного вида допустимого управления. Условие 2) выполнено, так как множество $N(x,t)$

$$N(x,t)=\{(e^{-\delta t}U(c)+\gamma, f(x)-\lambda x-c):\ \gamma\le 0,\ h(x,c,t)\ge 0,\ c\in[\bar c,f(r)]\},$$

выпукло при каждом фиксированном x и $t\in[0,T]$, так как при $c\in[\bar c,f(x)]$, первая компонента - отрезок $[e^{-\delta t}U(\bar c)+\gamma, e^{-\delta t}U(f(x))+\gamma]$, вторая компонента - отрезок $[f(x)-\lambda x-\bar c,\lambda x]$ и каждому значению c соответствует единственные точки этих отрезков в силу выпуклости функций $e^{-\delta t}U(c)+\gamma$ и $f(x)-\lambda x-c$ по c при фиксированных t и x. Условие 3) и 4) выполнены, так как для любого $c(t)\in[\bar c,f(k(t))]$ найдутся такие числа b и b_1, что $||x||\le b$, а следовательно и $c\le f(x)\le b_1$. Отсюда следует утверждение:

Утверждение 1. *При выполнении предположения 1, в задаче (1) существует оптимальное управление.*

4. Необходимые условия оптимальности для задачи со смешанным ограничением.

Исследование задачи (1) проведем на основании необходимых условий оптимальности [17] для задачи оптимального управления со смешанными ограничениями . Пусть $x_1 = k,\ x_2 = J$. Тогда задача (1) может быть записана в следующем виде виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f(x_1(t)) - c(t) - \mu x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = e^{-\delta t} U(c(t)), \\ \varphi_1(t, x_1, x_2, c) = c - f(x_1) \leq 0, \\ \varphi_2(t, x_1, x_2, c) = \bar{c} - c \leq 0, \\ K_1(x(0), x(T)) = x_1(0) - x_1^0 = 0, \\ K_2(x(0), x(T)) = x_1(T) - x_1^T = 0, \\ K_3(x(0), x(T)) = x_2(0) = 0, \\ F_0(x(0), x(T)) = -x_2(T) \to \min_{c(t)} . \end{cases} \tag{5}$$

Условие 1. (Условие регулярности смешанных ограничений ([17], стр.110-111)). Во всех точках $(t, x, c) : \varphi(t, x, c) \leq 0$, градиенты по c активных функций $\varphi_i,\ i = 1, 2$ линейно позитивно независимы, т.е. не существует нетривиального набора коэффициентов $\alpha_i,\ i \in I = I(t, x, c),\ \alpha_i \geq 0$, таких что $\sum_{i \in I} \alpha_i \varphi'_{ic}(t, x, c) = 0$. Здесь $I(t, x, c) = \{i = \{1, 2\},\ \varphi_i(t, x, c) = 0\}$ есть множество активных индексов для смешанных ограничений неравенства.

Теорема 2. *(Необходимые условия оптимальности ([17], стр.124-127)). Пусть функции $f(x),\ U(c)$ удовлетворяют условиям (2), (3), функции $\varphi_1,\ \varphi_2$ удовлетворяют условию 1 и траектория $(x^0(t),\ c^0(t))$ доставляет понтрягинский минимум для задачи (5). Тогда найдется число $\alpha_0 \geq 0$, вектор $\beta \in R^3$, 2 - мерная функция ограниченной вариации $\psi(t)$, непрерывная в концах отрезка, непрерывные в концах отрезка функции $h_i(t) \in L_\infty([0, T]),\ i = 1, 2,\ h_i \geq 0$, для которых выполнены следующие условия*

а) условие нетривиальности

$$a_0 + |\beta| + \Sigma_{i=1}^2 \int_0^T h_i(t) dt > 0; \tag{6}$$

б) условие дополняющей нежесткости

$$h_i(t) \varphi_i(t, x^0(t), c^0(t)) = 0, \ \textit{почти всюду}, \forall i; \tag{7}$$

в) сопряженное уравнение

$$\begin{cases} -\dot{\psi}_1 &= \bar{H}_{x_1} = (f'_{x_1} - \mu)\psi_1 + h_1 f'_{x_1}(x_1) = \\ &= \begin{cases} (f'_{x_1} - \mu)\psi_1 + h_1 f'_{x_1}(x_1), & c = \ f(x_1), \\ (f'_{x_1} - \mu)\psi_1, & c < \ f(x_1), \end{cases} \\ -\dot{\psi}_2 &= \bar{H}_{x_2} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

все функции берутся вдоль траектории (x^0, c^0)*, где*

$$\bar{H}(t,x,c) = \psi_1(f(x_1) - c - \mu x_1) + \psi_2 e^{-\delta t} U(c) - h_1(c - f(x_1)) - h_2(\bar{c} - c); \qquad (9)$$

- расширенная функция Понтрягина,

$$h_1 = \begin{cases} \geq 0, & c = f(k), \\ = 0, & c < f(k), \end{cases} \quad h_2 = \begin{cases} \geq 0, & c = \bar{c}, \\ = 0, & c > \bar{c}; \end{cases}$$

г) условия трансверсальности

$$\psi(0) = l_{x(0)}(x(0), x(T)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x_1^0} \\ \frac{\partial l}{\partial x_2^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 = a_0 \end{pmatrix},$$

$$\psi(T) = -l_{x(T)}(x(0), x(T)) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial l}{\partial x_{1}(T)} \\ -\frac{\partial l}{\partial x_2(T)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $l(x(0), x(T)) = -\alpha_0 x_2(T) + \beta_1(x_1(0) - x_1^0) + \beta_2(x_1(T) - x_1) + \beta_3(x_2(0))$ *- концевая функция Лагранжа;*
д) условие стационарности (уравнение Эйлера - Лагранжа) по c*:*

$$\bar{H}'_c = -\psi_1 + \psi_2 e^{-\delta t} U'_c - h_1 + h_2 = 0, \qquad (11)$$

вдоль траектории $(x^0(t), c^0(t))$*;*
е) условие максимума: для любой измеримой функции $c(t)$*, удовлетворяющей ограничениям*

$$\varphi(t, x^0(t), c(t)) \leq 0, \qquad (12)$$

почти всюду на $[0, T]$ *выполнено неравенство*

$$H(t, x^0(t), c(t)) \leq H(t, x^0(t), c^0(t)), \qquad (13)$$

где $H = \psi_1(f(x_1) - c - \mu x_1) + \psi_2 e^{-\delta t} U(c)$ *- функция Понтрягина.*

5. Исследование задачи (1)

Утверждение 2. *Для задачи (5) со смешанными ограничениями выполнено условие регулярности.*

Доказательство. Так как $\varphi'_{1c} = 1$, $\varphi'_{2c} = -1$, и множество $I(t,x,c) = \{1|\varphi_1(t,x,c) = 0\}$ и $I(t,x,c) = \{2|\varphi_2(t,x,c) = 0\}$ то условие $\sum_{i \in I} \alpha_i \varphi'_{ic}(t,x,c) = 0$ может быть выполнено только при тривиальном наборе коэффициентов a_1, a_2.

5.1. Экстремальное управление при $U(c) = c$.

Функция Понтрягина для модели (5) имеет вид:

$$H(t,x,c) = \psi_1(f(x_1) - c - \mu x_1) + \psi_2 e^{-\delta t} c = e^{-\delta t} c(-\psi_1 e^{\delta t} + \psi_2) + \psi_1(f(x_1) - \mu x_1). \quad (14)$$

Из (6) и условия $\alpha_0 \geq 0$ получаем, что в силу однородности сопряженных переменных, можно рассмотреть случаи $\psi_2 = 1$ и $\psi_2 = 0$. Пусть $\psi_2 = 1$. Полагая $\xi = \psi_1 e^{\delta t}$ согласно (14), получаем , что экстремальное управление имеет вид

$$c^* = \begin{cases} f(x_1), & \xi(t) < 1, \\ \bar{c}, & \xi(t) > 1, \\ c^{**}, & \xi(t) \equiv 1. \end{cases} \quad (15)$$

Будем считать новой сопряженной переменной $\xi = \psi_1 e^{\delta t}$. Имеем

$$\dot{\xi} = \begin{cases} \xi(\mu + \delta - f'_{x_1}) - h_1 f'_{x_1} e^{\delta t}, & c = \ f(x_1), \\ \xi(\mu + \delta - f'_{x_1}), & c < \ f(x_1). \end{cases} \quad (16)$$

5.2. Вычисление особого управления

Пусть $\xi(t) \equiv 1$ для $t \in [t_1, t_2]$, $t_2 > t_1$. Отметим, что в этом случае для ξ имеет место второе уравнение из (16). Тогда

$$\frac{d}{dt}\Big(\xi(t) - 1\Big) \equiv 0, \ \Rightarrow f'(x_1) = \mu + \delta. \quad (17)$$

Корень уравнения (17) обозначим η_3.

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(\xi(t) - 1\Big) = f'' \dot{x}_1 \equiv 0, \ \Rightarrow c^{**} = f(\eta_3) - \mu\eta_3. \quad (18)$$

Особое управление c^{**} является допустимым, при $f(\eta_3) \geq \bar{c} + \mu\eta_3$ или $\eta_3 \in [\eta_2, \eta_4]$.

Утверждение 3. *Если $\bar{c}$, μ, δ таковы, что существуют η_2, η_4, $\eta_2 < \eta_4$, корни уравнения $f(x_1) = \bar{c} + \mu x_1$, для которых выполнено условие $f'(\eta_4) < \mu + \delta < f'(\eta_2)$, то управление c^{**} допустимо (удовлетворяет ограничениям). В противном случае особого режима нет.*

Таким образом. из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Утверждение 4. *В случае $U(c) = c$ экстремальное управление имеет вид (15),(18), где $\xi(t)$ удовлетворяет (16).*

5.3. Экстремальные траектории, соответствующие управлению (15)

При $c^* = f(x)$, имеем $h_1(t) \geq 0,\ h_2(t) = 0$ и

$$\dot{\xi} = \xi\Big(-f'_{x_1} + \mu + \delta\Big) - e^{\delta t} h_1(t) f'_{x_1}, \tag{19}$$

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1. \tag{20}$$

Соотношения (5) определяют $x_1^0(t),\ x_1(0) = x_1^0$. Из (11) находится $h_1 : h_1 = e^{-\delta t}(1 - \xi(t))$. Подставляя h_1 в (19), имеем

$$\dot{\xi} = \xi\Big(-f'_{x_1} + \mu + \delta\Big) - (1 - \xi) f'_{x_1} = \xi\Big(\mu + \delta\Big) - f'_{x_1}. \tag{21}$$

Из (20) следует: $\dot{x}_1 < 0$. Из (21) следует:

$$\dot{\xi} > 0, \text{ при } \xi > \frac{f'_{x_1}}{\mu + \delta}; \quad \dot{\xi} < 0, \text{ при } \xi < \frac{f'_{x_1}}{\mu + \delta}; \quad \dot{\xi} = 0, \text{ при } \xi = \frac{f'_{x_1}}{\mu + \delta}.$$

Кривая $\xi = G(x) = \frac{f'_x}{\mu+\delta}$ обладает свойством: $G(x) > 0,\ G'_x < 0,\ G(\eta_3) = 1$; $G(x) \to +\infty$ при $x \to 0 + 0$; $G(x) > 1$, при $x < \eta_3$; $G(x) < 1$, при $x > \eta_3$; $G(x) \to 0 + 0$ при $x \to +\infty$. При $c = \bar{c}$ имеем $h_1(t) = 0$ и:

$$\dot{\xi} = \xi(-f'_{x_1} + \mu + \delta), \tag{22}$$

$$\dot{x}_1 = f(x_1) - \bar{c} - \mu x_1. \tag{23}$$

Из (23) следует: $\dot{x}_1 < 0,$ при $x_1 < \eta_2$; $\dot{x}_1 > 0,$ при $\eta_2 \leq x_1 \leq \eta_4$; $\dot{x}_1 < 0,$ при $x_1 > \eta_4$, где $\eta_1 : f(\eta_1) = \bar{c};\ \eta_2 \leq \eta_4 : f(\eta_2) = \bar{c} + \mu\eta_2,\ f(\eta_4) = \bar{c} + \mu\eta_4;\ \eta_3 : f'(\eta_3) = \mu + \delta$. Так как $\xi(t) > 1$, то из (22) следует: $\dot{\xi} > 0 :$ при $f'_{x_1} < \mu + \delta;\ \dot{\xi} < 0 :$ при $f'_{x_1} > \mu + \delta;\ \dot{\xi} = 0 :$ при $f'_{x_1} = \mu + \delta.$ Экстремальные траектории при $U(c) = c$ представлены на рис.1.

5.4. Оптимальное управление при различных положениях $x_0,\ x_T$

При описании оптимальных траекторий для различных положениях $x_0,\ x_T$ будем ссылаться на экстремальные траектории, изображенные на рис.1.

Пусть $\eta_3 < x_T < \eta_4$. Тогда, если $x_0 < \eta_2$, то не существует решений задачи управляемости для таких граничных значений и следовательно не существует экстремальных траекторий с такими начальными и конечными условиями.

Если $\eta_2 < x_0 < \eta_3$ то положим $\xi(0)$ равным второй координате ξ траектории (5) при управлении $c^*(t) = \bar{c}$, приходящей на особое множество (точку $(\eta_3, 1)$). За время $T_1 = \int_{x_0}^{\eta_3} \frac{dx}{f(x) - \bar{c} - \mu x}$ такая траектория приходит на особое множество, далее, при управлении c^{**} (18) на отрезке времени $T - (T_1 + T_2)$ фазовая точка находится на особом множестве и далее, при управлении $c^*(t) = \bar{c}$

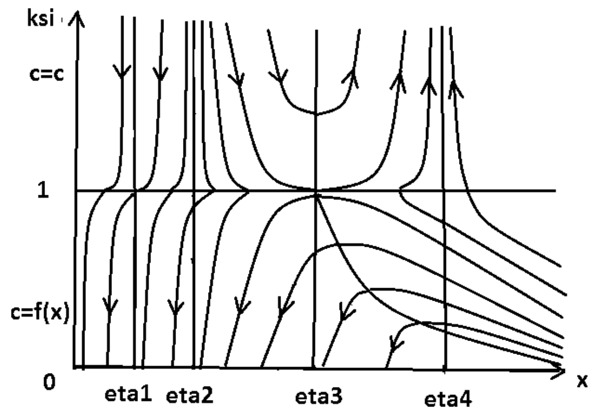


Рис. 1. Экстремали при $U(c) = c$.

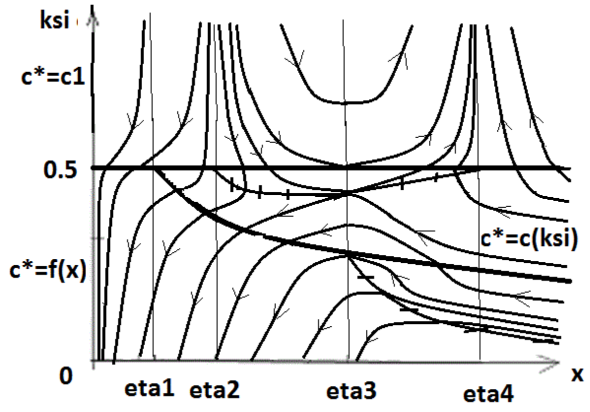


Рис. 2. Экстремали при $U(c)$ вида (3).

на отрезке времени $T_2 = \int_{\eta_3}^{\eta_4} \frac{dx}{f(x)-\bar{c}-\mu x}$, в момент T приходит на уровень x_T. При $T = T_1 + T_2$ такие начальные значения $\xi(0)$ принадлежат множеству $(x = x_0,\ \xi \geq \xi(0))$. При $T > T_1 + T_2$ такое начальное значение единственно.

Если $\eta_3 < x_0 < x_T < \eta_4$ то введем величины $T_3 = \int_{x_0}^{x_T} \frac{dx}{f(x)-\bar{c}-\mu x}$, $T_4(h) = \int_{x_0}^{h} \frac{dx}{-\mu x} = \frac{1}{\mu} ln \frac{x_0}{h}$, $T_5(h) = \int_{h}^{x_T} \frac{dx}{f(x)-\bar{c}-\mu x}$, $T_6 = \int_{x_0}^{\eta_3} \frac{dx}{-\mu x} = \frac{1}{\mu} ln \frac{x_0}{\eta_3}$.

Если $T < T_3$ то задача управляемости не имеет решения. Если $T_3 < T < T_6 + T_2$ то обозначим h_1 решение уравнения $T = T_4(h_1) + T_5(h_1)$ относительно h_1. Нетрудно видеть, что при сделанных предположениях такое решение существует. Выпуская из точки $(h_1, 1)$ в обратном времени траекторию системы (19), (20) с управлением $c(t) = f(x(t))$, находим начальное значение $\xi(0)$, соответствующее h. Получаем траекторию с одним переключением управления: $c^*(t) = f(x(t)),\ t \in [0, T_4(h)];\ c^*(t) = \bar{c},\ t \in [T_4(h), T_5(h)]$.

Если $T \geq T_6 + T_2$ то имеем траекторию с двумя переключениями управления : $c^*(t) = f(x(t)),\ t \in [0, T_6];\ c^*(t) = c^{**},\ t \in [T_6, T - T_2 - T_6];\ c^*(t) = \bar{c},\ t \in [T - T_2 - T_6, T]$.

Другие варианты расположения $x_0,\ x_T$ рассматриваются аналогичным образом. Все совокупности вариантов расположения $x_0,\ x_T$ и соответствующий вид траектории и управлений составляют магистральную теорему, которую мы в данной статье полностью не приводим. Оптимальность построенных экстремальных траекторий следует из достаточных условий оптимальности [19] и в случае $U(c) = c$ может быть так же доказана непосредственным сравнением функционала на произвольном и экстремальном управлении [20].

5.5. Экстремальное управление в случае функции $U(c)$, удовлетворяющей условиям (3).

Функция Понтрягина для модели (5) имеет вид:

$$H(t, x_1, c) = e^{-\delta t}(-\psi_1 e^{\delta t} c + \psi_2 U(c)) + \psi_1(f(x_1) - \mu x_1). \tag{24}$$

Члены функции Понтрягина, зависящие от управления c, имеют вид: $H_1(c) = -\psi_1(t)c + \psi_2 e^{-\delta t}U(c)$. Из (6), (8), (10) и условия $\alpha_0 \geq 0$ получаем, что в силу однородности сопряженных переменных, можно рассмотреть случаи $\psi_2 = 1$ и $\psi_2 = 0$. Введем обозначение $\xi = \psi_1 e^{\delta t}$. Тогда $H_1(c, \xi, \psi_2) = e^{-\delta t}(\psi_2 U(c) - \xi(t)c)$ и для ξ справедливы соотношения:

$$\dot{\xi} = \begin{cases} \xi(\mu + \delta - f'_{x_1}) - h_1 f'_{x_1} e^{\delta t}, & c = \ f(x_1), \\ \xi(\mu + \delta - f'_{x_1}), & c < \ f(x_1). \end{cases} \tag{25}$$

В регулярном случае зависимости функции $H_1(c, \xi, \psi_2)$ от управления и фазовых переменных (функция $H_1(c, \xi, \psi_2)$ зависит от c, максимизатор по c функции $H(c, \xi, \psi_2)$ состоит из одного значения), обозначим $c^*(x_1, \xi, \psi_2) = argmax_{c \in [\bar{c}, f(x_1)]} H_1(c, \xi, \psi_2)$, $\hat{c}(\xi, \psi_2) = argmax_{c \in [0, \infty)} H_1(c, \xi, \psi_2)$, $\xi(t) = \psi_1(t)e^{\delta t}$.

Если $\psi_2 = 0, \ \xi \neq 0$, то

$$c^*(x_1, \xi, \psi_2) = \begin{cases} f(x_1(t)), & \xi(t) < 0, \\ \bar{c}, & \xi(t) > 0, \end{cases} \tag{26}$$

Если $\psi_2 = 0, \ \psi_1(t) \equiv 0, \ t \in [t_1, t_2]$, то из (8) следует $\dot{\psi}_1(t) \equiv 0$ и в силу линейности системы (8) по ψ_1 следует, что $\psi_1(t) \equiv 0$ и следовательно $\psi_1(0) = \beta_1 = 0, \ \psi_1(T) = -\beta_2 = 0$ и получаем противоречие с условием (10).

Пусть $\psi_2 = 1$. При $\psi_1 \leq 0, \ \xi(t) = \psi_1 e^{-\delta t}$, функция $H_1(c) = e^{-\delta t}(U(c) - \xi(t)c)$ монотонно возрастающая, вогнутая функция c. Следовательно: $c^*(x_1, \xi) = f(x_1)$. При $\psi_1 > 0, \ \xi(t) = \psi_1 e^{-\delta t}$, функция $H_1(c) = e^{-\delta t}(U(c) - \xi(t)c)$ вогнутая функция c имеющая единственный максимум $\hat{c}(\xi)$ для всех $\xi > 0$. Таким образом $c^*(x_1, \xi) \in [\bar{c}, f(x_1)]$, при $\psi_2 = 1$, имеет вид:

$$c^*(x_1, \xi, 1) = \begin{cases} f(x_1), & \text{при} \ \ \hat{c}(\xi(t)) > f(x_1(t)), & \xi \geq 0, \\ \hat{c}(\xi), & \text{при} \ \ \bar{c} \leq \hat{c}(\xi(t)) \leq f(x_1(t)), & \xi \geq 0, \\ \bar{c}, & \text{при} \ \ \hat{c}(\xi(t)) < \bar{c}, & \xi \geq 0, \\ f(x_1), & \text{при} & \xi < 0. \end{cases} \tag{27}$$

В нерегулярном случае зависимости функции $H_1(c, \xi, 1)$ от управления и фазовых переменных (случай не единственного максимизатора по c функции $H_1(c, \xi, 1)$), обозначим $\check{c}(\xi)$ управление, при котором функция $H_1(c, \xi, 1)$ не зависит от c. Имеем: $H_1(c, \xi, 1) = e^{-\delta t}(U(c) - \xi(t)c) \equiv 0, \ t \in [t_1, t_2]$. Следовательно

$$\xi(t) = \frac{U(c(t))}{c(t)}, \ t \in [t_1, t_2], \ \dot{\xi}_t = \frac{U'_c c'_t c - U c'_t}{c^2} = \ c'_t(\frac{U'_c}{c} - \frac{U}{c^2}).$$

Из условия стационарности (11) имеем $U'_c(c(t)) = \xi(t)$. Таким образом $\dot{\xi}_t(t) \equiv 0$ при $t \in [t_1, t_2]$. Из $\xi > 0$ и (16) имеем $f'_{x_1}(x_1(t)) = \mu + \delta$, следовательно $x_1(t) = \eta_3$ и $\dot{x}_1(t) = 0$, откуда следует $\check{c}(\xi) = f(\eta_3) - \mu\eta_3$. Таким образом, в этом случае особое множество - точка $(\eta_3, U'_c(f(\eta_3) - \mu\eta_3))$ и особое управление $\check{c}(\xi) = f(\eta_3) - \mu\eta_3$. В силу наложенных условий на параметры процесса, управление $\check{c}$ допустимо.

5.6. Экстремальные траектории в случае функции $U(c)$, удовлетворяющей условиям (3).

При $c^* = f(x_1)$, имеем $h_1(t) \geq 0,\ h_2(t) = 0$,

$$\dot{\xi} = \xi\Big(-f'_{x_1} + \mu + \delta\Big) - e^{\delta t} h_1(t) f'_{x_1}, \tag{28}$$

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1. \tag{29}$$

Соотношение (5) определяет $x^0(t),\ x(0) = x_0$, и h_1 находится из (11): $h_1 = e^{-\delta t}(U'_c - \xi(t))$. Подставляя в (28), имеем

$$\dot{\xi} = \xi\Big(-f'_{x_1} + \mu + \delta\Big) - (U'_c - \xi) f'_{x_1} = \xi\Big(\mu + \delta\Big) - U'_c(c^*) f'_{x_1}. \tag{30}$$

Из (20) следует: $\dot{x}_1 < 0$. Из (21) следует:

$$\dot{\xi} > 0,\ \xi > U'_c(f(x_1))\frac{f'_{x_1}}{\mu + \delta},\quad \dot{\xi} < 0,\ \xi < U'_c(f(x_1))\frac{f'_{x_1}}{\mu + \delta},\ \dot{\xi} = 0,\ \xi = U'_c(f(x_1))\frac{f'_{x_1}}{\mu + \delta}.$$

Кривая $\xi = G_1(x_1) = U'_c(f(x_1))\frac{f'_{x_1}}{\mu+\delta}$ обладает свойством: $G_1(x_1) \to +\infty$ при $x_1 \to 0+0$; $G_1(x_1) \to 0+0$ при $x_1 \to +\infty$. При $c = \bar{c}$ имеем $h_1(t) = 0$ и:

$$\dot{\xi} = \xi(-f'_{x_1} + \mu + \delta), \tag{31}$$

$$\dot{x}_1 = f(x_1) - \bar{c} - \mu x_1. \tag{32}$$

Из (32) следует: $\dot{x} < 0,\ x < \eta_2;\ \dot{x} > 0,\ \eta_2 \leq x \leq \eta_4;\ \dot{x} < 0,\ x > \eta_4,$ где $\eta_1 : f(\eta_1) = \bar{c},\ \eta_2 \leq \eta_4 : f(\eta_2) = \bar{c} + \mu\eta_2,\ f(\eta_4) = \bar{c} - \mu\eta_4,\ \eta_3 : f'(\eta_3) = \mu + \delta$. Из (31) следует:

$$\dot{\xi} > 0: \text{ при } \{f'_x < \mu + \delta\};\ \dot{\xi} < 0: \text{ при } \{f'_x > \mu + \delta\}.\ \dot{\xi} = 0: \text{ при } \{f'_x = \mu + \delta\}.$$

При $c = \hat{c}(\xi)$ имеем $h_1(t) = 0,\ h_2(t) = 0$ и:

$$\dot{\xi} = \xi(-f'_{x_1} + \mu + \delta), \tag{33}$$

$$\dot{x}_1 = f(x_1) - \hat{c}(\xi) - \mu x_1. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует:

$$\begin{cases} \dot{\xi} > 0, & f'_{x_1} < \mu + \delta, \\ \dot{\xi} < 0, & f'_{x_1} > \mu + \delta, \\ \dot{\xi} = 0, & f'_{x_1} = \mu + \delta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 > 0, & f(x_1) > \mu x_1 + \hat{c}(\xi), \\ \dot{x}_1 < 0, & f(x_1) < \mu x_1 + \hat{c}(\xi), \\ \dot{x}_1 = 0, & f(x_1) = \mu x_1 + \hat{c}(\xi). \end{cases}$$

Система (33)-(34) обладает положением равновесия $(\eta_3, U'_c(f(\eta_3) - \mu\eta_3))$ и управление $\check{c}(\xi) = f(\eta_3) - \mu\eta_3$ оставляет фазовый вектор (ξ, x_1) в положении равновесия сколь угодно долго.

Экстремальные траектории при $f(x) = \sqrt{x},\ U(c) = \ln(1+c)$ представлены на рис. 5-7. На рисунках 4-8: $A = \{(x_1, \xi) : \hat{c}(\xi) = \bar{c}\},\ B = \{(x_1, \xi) : \hat{c}(\xi) = f(x_1)\}$, $D = \{(x_1, \xi) : \hat{c}(\xi) = f(x_1) - \mu x_1\},\ E = \{(x_1, \xi) : \xi = \frac{U'(f(x_1))f'(x_1)}{\nu+\delta}\}$.

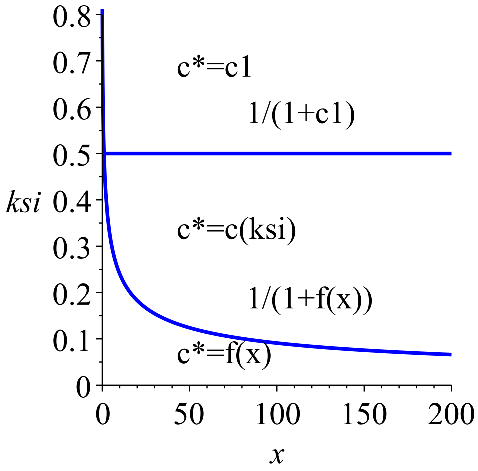


Рис. 3. Области значений c^*.

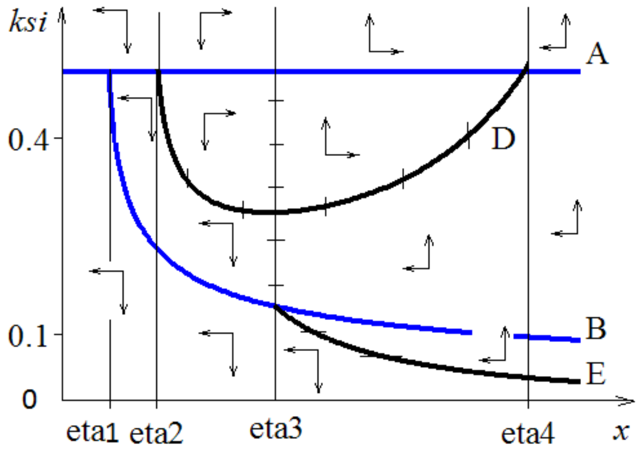


Рис. 4. Области значений $c^*, \dot{x}, \dot{\xi}$.

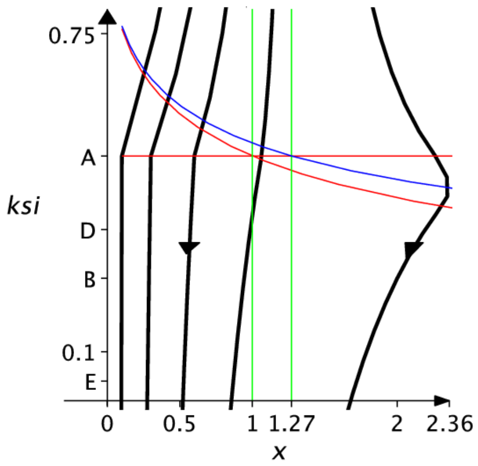


Рис. 5. Экстремали: $x \in [0, 2]$.

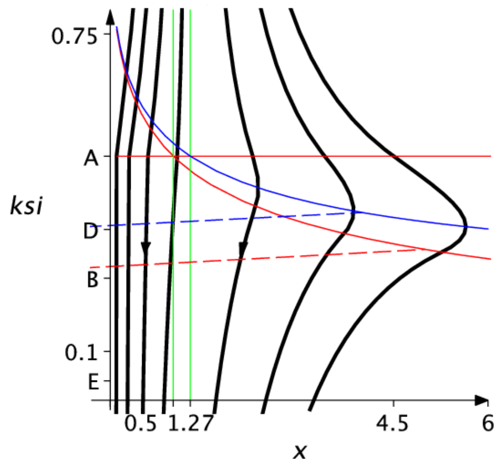


Рис. 6. Экстремали: $x \in [0, 6]$.

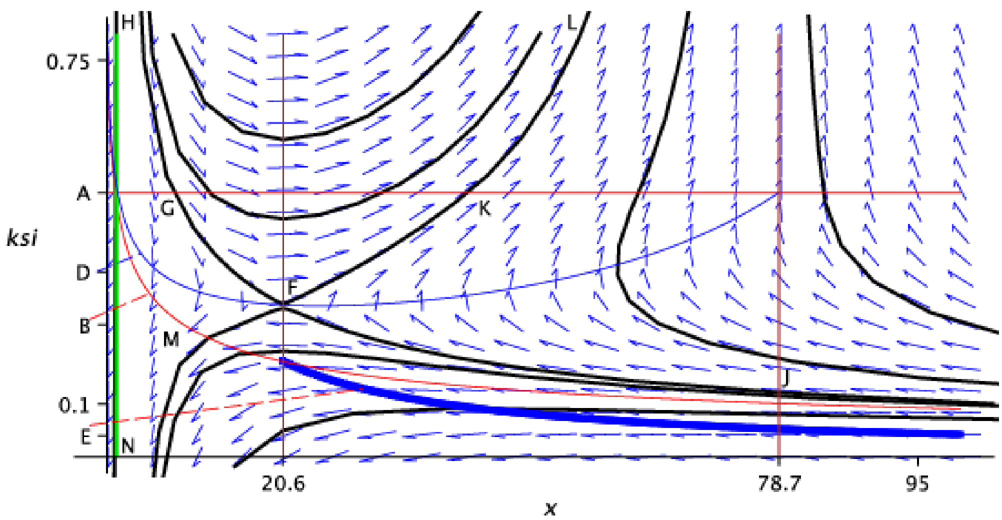


Рис. 7. Экстремали: $x \in [0, 100]$.

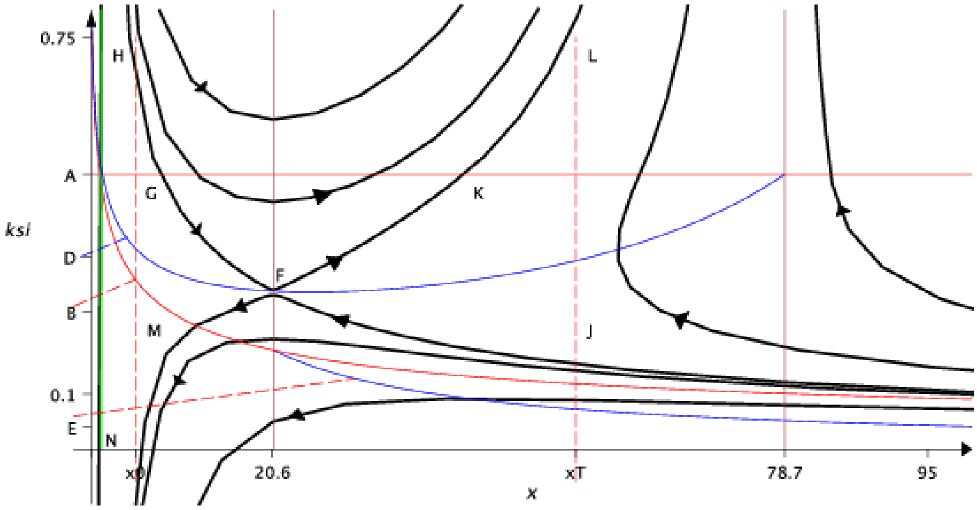
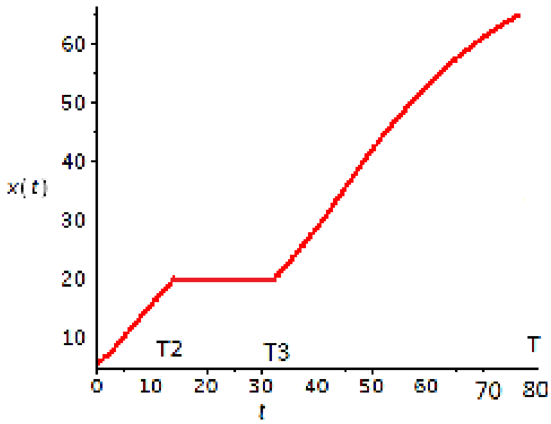


Рис. 8. Случай $\eta_1 < x_0 < \eta_3 < x_T < \eta_4$.



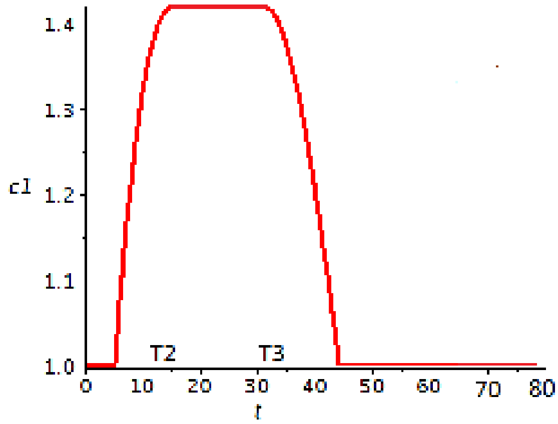


Рис. 9. $x^*(t)$, $\eta_1 < x_0 < \eta_3 < x_T < \eta_4$. Рис. 10. $c^*(t)$, $\eta_1 < x_0 < \eta_3 < x_T < \eta_4$.

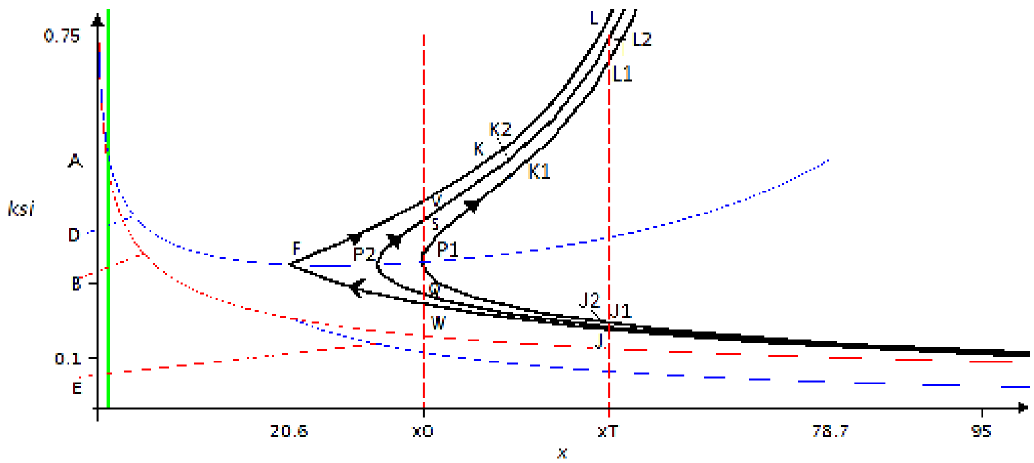


Рис. 11. Случай $\eta_3 < x_0 < x_T < \eta_4$.

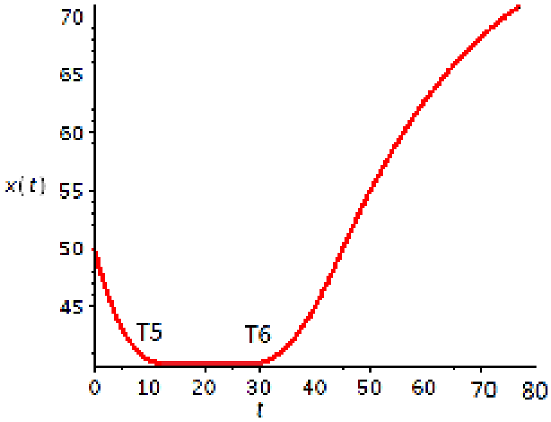


Рис. 12. $x^{*}(t)$, $\eta_3 < x_0 < x_T < \eta_4$.

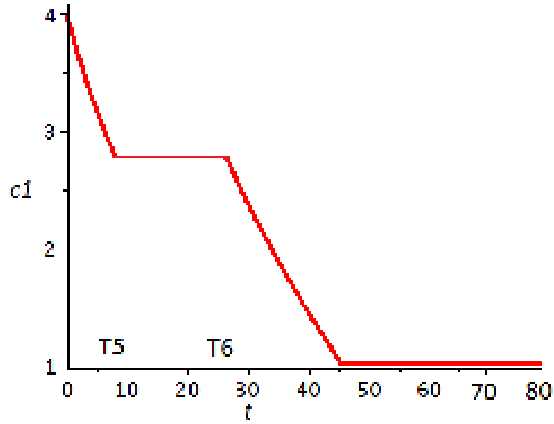


Рис. 13. $c^{*}(t)$, $\eta_3 < x_0 < x_T < \eta_4$.

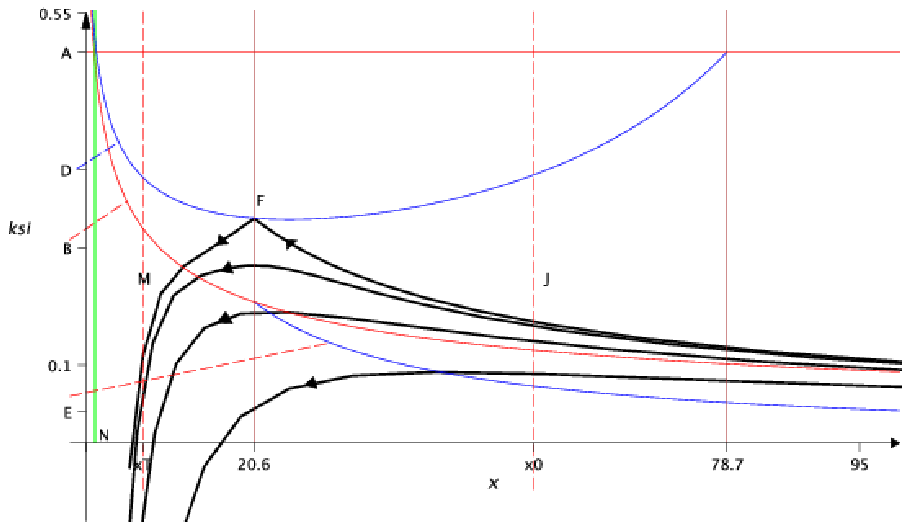


Рис. 14. Случай $\eta_1 < x_T < \eta_3 < x_0 < \eta_4$.

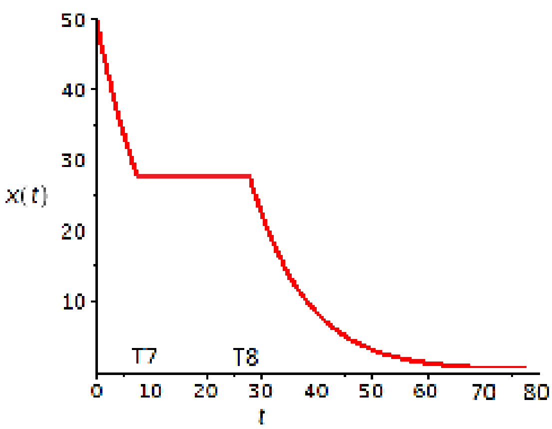


Рис. 15. $x^{*}(t)$, $\eta_1 < x_T < \eta_3 < x_0 < \eta_4$.

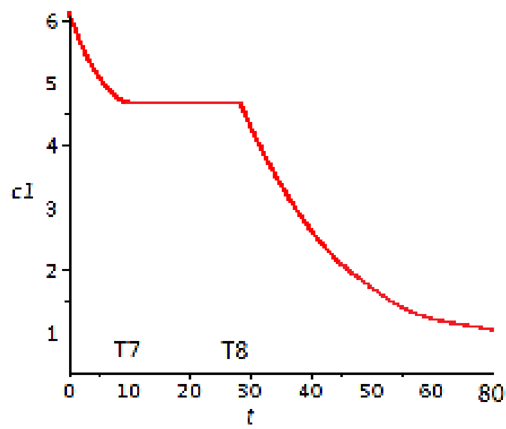


Рис. 16. $c^{*}(t)$, $\eta_1 < x_T < \eta_3 < x_0 < \eta_4$.

5.7. Оптимальное управление при различных положениях $x_0,\ x_T$.

При описании траекторий, претендующих на оптимальные, для различных положениях $x_0,\ x_T$, будем ссылаться на экстремальные траектории изображенные на рис.7. Для решений системы системы (1), (16) с управлением (27), при начальных условиях $x_1(0)=\eta_3,\ \xi(0)=U'_c(f(\eta_3)-\mu\eta_3)$, имеют место следующие соотношения:
при $t\to-\infty,\ x_1(t)\to\eta_2,\ \xi(t)\to+\infty,\ c^*=\{\hat c(\xi),\xi\le A;\ \bar c,\ \xi>A\}$;
при $t\to-\infty,\ x_1(t)\to+\infty,\ \xi(t)\to\{\xi:\hat c(\xi)=f(x_1)\},\ c^*=\hat c(\xi)$;
при $t\to\infty,\ x_1(t)\to\eta_4,\ \xi(t)\to+\infty,\ c^*=\{\hat c(\xi),\xi\le A;\ \bar c,\ \xi>A\}$;
при $t\to\infty,\ x_1(t)\to 0,\ \xi(t)\to-\infty,\ c^*=\{\hat c(\xi),\hat c(\xi)\ge f(x);\ f(x),\hat c(\xi)<f(x)\}$.

На рис. 7 изображены траектории системы (1), (16) с управлением (27), приходящие и исходящие из точки $F=(\eta_3,U'_c(f(\eta_3)-\mu\eta_3))$. На рис.7 HGF, JF - экстремальные траектории приходящие в точку F ; FMN, FKL - экстремальные траектории выходящие из точки F. Каждая траектория со своим управление в соответствии с (27). Участок HG соответствует управлению $c^*=\bar c$, участок GF соответствует управлению $c^*=\hat c(\xi)$. Участок JF соответствует управлению $c^*=\hat c(\xi)$. Участок MF соответствует управлению $c^*=\hat c(\xi)$, участок NM соответствует управлению $c^*=f(x_1)$. Участок FK соответствует управлению $c^*=\hat c(\xi)$, участок KL соответствует управлению $c^*=\bar c$. Здесь: $G=(x_G,\xi_G)$ - точка пересечения траектории HGF с кривой $\{\xi:\hat c(\xi)=\bar c\}$, $K=(x_K,\xi_K)$ - точка пересечения траектории FKL с кривой $\{\xi:\hat c(\xi)=\bar c\}$, $M=(x_M,\xi_M)$ - точка пересечения траектории NMF с кривой $\{\xi:\hat c(\xi)=f(x_1)\}$.

Если $x_0<\eta_2,\ \eta_3<x_T<\eta_4$, (см.рис. 4-6) то не существует решений задачи управляемости для таких граничных значений и следовательно не существует экстремальных траекторий с такими начальными и конечными условиями.

5.7.1. *Случай* $\eta_2<x_0<\eta_3<x_T<\eta_4$.

Обозначим (см.рис. 8):

H - точку пересечения прямой $x_1=x_0$ и траектории HGF,

L - точку пересечения прямой $x_1=x_T$ и траектории FKL,

J - точка пересечения траектории (1),(16), выпущенной в обратном времени из точки F, с управлением $\hat c(\xi)$, с прямой $x_1=x_T$,

$\theta_1=\int_{x_0}^{x_T}\frac{dx}{f(x)-\bar c-\mu x}$ - время движения траектории системы (1) с уровня x_0 до уровня x_T с управлением $c=\bar c$, (при достаточно большом $\xi(0)$)

$\theta_2=\int_{x_0}^{x_G}\frac{dx}{f(x)-\bar c-\mu x}$ - время движения траектории системы (1) из точки H в точку G с управлением $c=\bar c$,

$\theta_3=\theta(GF)$ - время движения траектории системы (1), (16) от G к F с управлением $\hat c(\xi)$,

$\theta_5 = \theta(FK)$ - время движения траектории системы (1), (16) от F к K с управлением $\hat{c}(\xi)$,

$\theta_6 = \theta(KL) = \int_{x_K}^{x_T} \frac{dx}{f(x)-\bar{c}-\mu x}$ - время движения траектории системы (1), (16) от K к L с управлением $\bar{c}$,

$T_1 = \theta_2,\ T_2 = \theta_2 + \theta_3,\ T_3 = T - (\theta_5 + \theta_6), T_4 = T - \theta_6$.

При $\eta_2 < x_0 < \eta_3$, траектория, составленная из экстремалей принципа максимума имеет $\xi(0) = \xi_H$.

При $t \in [0, T_1]$, траектория системы (1), (16) при $c^*(t) = \bar{c}$ - HG,

при $t \in [T_1, T_2]$, траектория системы (1), (16) при $c^*(t) = \hat{c}(\xi)$ - GF,

при $t \in [T_2, T_3]$, траектория системы (1), (16) при $c^*(t) = \hat{c}(U_c'(f(\eta_3) - \mu\eta_3))$ - находится в точке F,

при $t \in [T_3, T_4]$, траектория системы (1), (16) при $c^*(t) = \hat{c}(\xi)$ - FK,

при $t \in [T_4, T]$, траектория системы (1), (16) при $c^*(t) = \bar{c}$ - KL.

Если $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ такое начальное значение $\xi(0)$ неединственно. Оно принадлежит множеству $(x = x_0,\ \xi \geq \xi(0))$. При $T > T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ такое начальное значение $\xi(0)$ единственно.

Графики соответствующих функций $x_1(t),\ t \in [0, T]$ и $c(t),\ t \in [0, T]$ приведены на рис. 9,10.

5.7.2. Случай $\eta_3 < x_0 < x_T < \eta_4$ (рис. 11). Для начальных позиций P_1, P_2 с координатами $P_1 = (x_0, \hat{c}^{-1}(f(x_0) - \mu x_0)),\ P_2 = (x_0, \hat{c}^{-1}(f(x) - \mu x)),\ \eta_3 < x < x_0$, выпустим траектории в прямом и обратном времени и обозначим точки пересечения таких траекторий с прямой $x = x_T$:

$J_1 = (x_T, \xi_{J_1}),\ J_2 = (x_T, \xi_{J_2}),\ \xi_J < \xi_{J_2} < \xi_{J_1}$,

$L_1 = (x_T, \xi_{L_1}),\ L_2 = (x_T, \xi_{L_2}),\ \xi_{L_1} < \xi_{L_2} < \xi_L$,

и точки пересечения таких траекторий с прямой $x_1 = x_0$:

W - точка пересечения прямой $x_1 = x_0$ и траектории JF,

V - точка пересечения прямой $x_1 = x_0$ и траектории FKL,

S - точка пересечения прямой $x_1 = x_0$ и траектории P_2L_2,

Q - точка пересечения прямой $x_1 = x_0$ и траектории J_2P_2,

Обозначим $\theta_{10} = T(P_2, L_2)$ - время перехода из т. $P_2 = (x_0, \xi_{P_2})$ в точку $L_2 = (x_T, \xi_{L_2})$ при управлении $\hat{c}(\xi)$ на первом этапе и управлении $\bar{c}$ на втором. Для $T > \theta_{10}$, решая уравнение относительно первой координаты точки P_2 (вторая координата $\xi : \hat{c}(\xi) = f(x) - \mu x$) для времени перехода из точки Q в L_2 По траектории QP_2SL_2: $T(QP_2SK_2) + T(K_2, L_2) = T,$ находим точку переключения управления и далее восстанавливаем управление. При $T > T(WF) + T(FL)$, экстремальное управление имеет вид

$$c(t) = \begin{cases} \hat{c}(\xi(t)), & t \in [0, T(WF)], \\ \hat{c}(U_c'(f(\eta_3) - \mu\eta_3), & t \in [T(WF), T - (T(FK) + T(KL))], \\ \hat{c}(\xi(t)), & t \in [T - (T(FK) + T(KL)), T - T(KL)], \\ \bar{c}, & t \in [T - T(KL), T]. \end{cases}$$

J_1, J_2 - точки пересечения траектории (1), (16), выпущенной в обратном времени из точки $P_1,\ P_2,\ x_0 = x_{P_1} > x_{P_2}$ с управлением $\hat{c}(\xi)$, с прямой $x = x_T$, L_1, L_2 - точки пересечения траектории (1), (16), выпущенной в прямом времени из точки P_1, P_2 (с управлением $\hat{c}(\xi)$, в области $\xi \leq A$ и с управлением $\bar{c}$, в области $\xi > A$) с прямой $x = x_T$. Графики соответствующих функций $x^*(t),\ t \in [0, T]$ и $c^*(t),\ t \in [0, T]$ приведены на рис. 12, 13.

5.7.3. Случай $\eta_1 < x_T < \eta_3 < x_0$ (рис.14). Обозначим $\theta_4 = \theta(JF)$ - время движения траектории системы (1), (16) от J к F с управлением $\hat{c}(\xi)$, $\theta_7 = \theta(FM)$ - время движения траектории системы (1), (16) от F к M с управлением $\hat{c}(\xi)$, $\theta_8 = \theta(MN) = \int_{x_M}^{x_N} \frac{dx}{-\mu x}$ - время движения траектории системы (1), (16) от M к N с управлением $f(x)$. Если $T < \theta_4 + \theta_7 + \theta_8$, то задача управляемости для рассматриваемых значений $x_0,\ x_T$ не имеет решения, а следовательно, не имеет решения задача оптимального управления. Если $T = \theta_4 + \theta_7 + \theta_8$, то в качестве $\xi(0)$ можно взять точки $\xi(0) \leq \xi_J$. Если $T > \theta_4 + \theta_7 + \theta_8$, то экстремальная траектория имеет вид JFN (рис. 14), причем $\hat{c}(\xi) = f(\eta_3) - \mu\eta_3$ для $t \in [\theta_4, T - (\theta_4 + \theta_7 + \theta_8)]$. Графики соответствующих функций $x^*(t),\ t \in [0, T]$ и $c^*(t),\ t \in [0, T]$ приведены на рис. 15,16. Другие варианты расположения $x_0,\ x_T$ рассматриваются аналогичным образом.

5.8. Достаточные условия оптимальности для задачи (1).

Для задачи (1) при выполнении условий (2), (3), выполнены условия теоремы о достаточных условиях оптимальности для задачи со смешанными ограничениями работы [19]. Таким образом, экстремальные траектории, описанные в п.5 являются оптимальными траекториями.

Список литературы

1. **Аллен Р.** Математическая экономия, М.Издательство иностранной литературы, 1963, с. 667.
2. **Эрроу К.** Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М.: Мир, 1974. С.7.45.
3. **Интриллигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория, 1975.
4. **Ашманов С.А.** Введение в математическую экономику. М.Наука, 1984.
5. **Колемаев В.А.** Экономико-математическое моделирование, 2005.
6. **Демин Н.С., Кулешова Е.В., Решетникова Г.Н.** Об эквивалентности решений задачи управления односекторной экономикой в моделях Рамсея и Солоу // Вестник Томского государственного университета. - 2002. - № 1(1). - С. 150 - 153.

7. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.** Максимизация потребления работодателей на конечном интервале времени при постоянных трудовых ресурсах // Вестник Томского государственного университета. Приложение. - 2004. -№ 9(11). - С. 150 - 155.
8. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.** Максимизация потребления работодателей в случае производственной функции общего вида // Обозрение прикладной и промышленной математики. - 2004. - Т. 11, вып. 2 - С. 326 -327.
9. **Лукьянова Л.Н.** Задача управления основными фондами и величиной кредитного займа для максимизации прибыли, Нелинейная динамика и управление, Сборник статей, Вып. 5, М. Физматлит, 2007, с.351-368.
10. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.** Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом налоговых отчислений // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2008. — № 6. - С. 87 - 98.
11. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.** Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. — 2008. - № 9.— С. 140 - 155.
12. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.** Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени по критерию максимизации налоговых отчислений // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2009. - Т. 12, № 1(37). - С. 74 - 88.
13. **Демин Н.С., Кулешова Е.В.** Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестник Томского государственного университета. УВТиИ. -2009. - № 2(7). - С. 5 - 23.
14. **Ю.И. Параев, Т.И. Грекова, Е.Ю. Данилюк** Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени, Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2011, № 4, с.5-15.
15. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. Изд-во Наука, 1983.
16. **Брайсон А., Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления. М.Мир, 1972.
17. **Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Принцип максимума в оптимальном управлении, М. Мех-мат МГУ, 2004, 167 стр.
18. **Арутюнов А.В.** Условия экстремума,М. Факториал, 1997, 254 стр.
19. **Seierstad A., Sydsaeter K.** Optimal control theory with economic application, Elsever Science Publishers B.V., 1987
20. **Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.** Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. Изд-во Макс-Пресс, Москва, 2007.