Раздел I.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В.Ф. Апельцин

Об одном обобщении метода Д.А. Граве решения плоских краевых задач теории гармонического потенциала.

Введение

Как известно, [1] метод конформных отображений хорошо развит для решения плоских краевых задач теории гармонического потенциала в ограниченных областях. Речь идет о краевых задачах следующего вида

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) \\ G(P,M_0)\big|_{P\in\partial D} = 0, \end{cases} = -\delta(M,M_0);\ M,M_0 \in D \tag{1}$$

где $G(M,M_0) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\, r^{-1}_{M,M_0}$ + g(M,M_0); D - ограниченная область с гладкой аналитической границей; g(M,M_0) - регулярная часть функции Грина, удовлетворяющая всюду в области D однородному уравнению Лапласа и краевому условию Дирихле

$$g(P,M_0)\big|_{P\in\partial D} = -\,G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\, r^{-1}_{M,M_0}\,.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться в $\mathbf{R}^2$ вместо декартовых, комплексными координатами z = x + iy; z* = x - iy; с помощью которых задача (1) переписывается в виде

$$\begin{cases} \Delta_M G(M,M_0) \\ G(P,M_0)\big|_{P\in\partial D} = 0, \end{cases} = -\delta(M,M_0);\ M,M_0 \in D \tag{1'}$$

где

$$\Delta_z = 4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z^*};\quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big);\quad \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big);\quad G(z,z_0) = G(z, z^*; z_0, z_0^*);$$

$\delta(z,z_0) = \delta(\mathrm{Re}z - \mathrm{Re}z_0;\ \mathrm{Im}z - \mathrm{Im}z_0)$; D и D* - исходная область D на плоскостях комплексного переменного **C** и **C*** соответственно. В этих обозначениях фундаментальное решние уравнения Лапласа $\dfrac{1}{2\pi}\ln\, r^{-1}_{M,M_0}$ записывается в виде $\dfrac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|^{-1}$. Если известна функция w(z), конформно отображающая область D на единичный круг, то [2] функция

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|1 - w(z)w^*(z_0)|}{|w(z) - w(z_0)|} \tag{2}$$

является решением исходной задачи Дирихле (1)' в области D. При этом

$$G_\Sigma(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|1 - zz_0^*|}{|z - z_0|}\,, -$$

функция Грина задачи (1)' для единичного круга Σ, полученная известным методом электростатических изображений [3], и вся проблема решения задачи (1)' сводится к явному или приближенному построению функции w(z). Заметим также, что в некоторых случаях задачи вида (1), (1)' для неограниченных областей, удобнее сводить ее к краевой задаче для полуплоскости, и строить решение в виде

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|w(z) - w^*(z_0)|}{|w(z) - w(z_0)|}, \tag{3}$$

где w(z) - аналитическая функция, конформно отображающая область D на полуплоскость $\mathrm{Im}w \geq 0$, а

$$\hat{G}(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|1 - zz_0^*|}{|z - z_0|}, -$$

функция Грина задачи (1)' для полуплоскости $\mathrm{Im}z \geq 0$, полученная простейшим методом отражения относительно границы $\mathrm{Im}z = 0$.

К сожалению, в общем случае произвольных областей D конструктивные методы явного построения функции w(z) неизвестны. Кроме того, последовательность действий при решении задачи (1)' остается двухступенчатой: вначале - построение функции w(z), затем - применение метода изображений для единичного круга или полуплоскости. Возникает вопрос о возможности миновать этап построения конформного отображения w(z) и непосредственно обобщить метод статических изображений для достаточно широкого класса областей D с аналитическими границами. В 1885 г. в работе Д.А. Граве [4] для некоторого довольно широкого класса областей с алгебраическими границами такое обобщение было получено. В основу примененной в этой работе техники положены свойства полной системы корней алгебраического уравнения, описывающего границу области. Решение получено в виде знакопеременной суперпозиции полей дискретной бесконечной, в общем случае, последовательности точечных источников, расположенных вне области D вдоль некоторых кривых, и имеющей бесконечно удаленную точку в качестве единственной предельной точки. Отметим, что метод Д.А. Гаве применим лишь для внутренних краевых задач теории гармонического потенциала и не допускает непосредственного обобщения на внешние задачи для неограниченных областей. Кроме того, в работе [4] решалась не краевая задача для функции Грина, а классическая краевая задача для уравнения Лапласа с неоднородным краевым условием.

1. *<u>Метод Д.А. Граве для внутренних задач.</u>*

Проиллюстрируем суть метода на примере простейшей задачи (1)', когда область D является внутренностью параболы $y^2 = 2p(x + p/2)$. Функция, конформно отображающая внутренность параболы на верхнюю полуплоскость имеет вид [1]:

$$w(z) = i\sqrt{2}\cos\frac{\pi i\sqrt{z}}{\sqrt{2p}}.$$

Пользуясь представлением (3), получаем, что искомая функция Грина, - решение задачи (1)' для параболы, имеет вид

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left|\cos\frac{\pi i}{2\sqrt{2p}}\left(\sqrt{z}+\sqrt{z_0^*}\right)\cos\frac{\pi i}{2\sqrt{2p}}\left(\sqrt{z}-\sqrt{z_0^*}\right)\right|}{\left|\sin\frac{\pi i}{2\sqrt{2p}}\left(\sqrt{z}+\sqrt{z_0}\right)\sin\frac{\pi i}{2\sqrt{2p}}\left(\sqrt{z}-\sqrt{z_0}\right)\right|}. \qquad (1.1)$$

Для преобразования выражения (1.1) к виду, соответствующему обобщению метода статических изображеий, воспользуемся формулами разложения $\sin\pi z$ и $\cos\pi z$ в бесконечные произведения [1]. Получим

$$G(z,z_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\pi^2}{8p} + \frac{1}{2\pi}\ln|z-z_0|^{-1} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{\left(\sqrt{z}+\sqrt{z_0^*}\right)^2}{2p(2n-1)^2}\right|\times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{\left(\sqrt{z}+\sqrt{z_0^*}\right)^2}{2p(2n-1)^2}\right| - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{\left(\sqrt{z}+\sqrt{z_0^*}\right)^2}{2p(2n-1)^2}\right|\left|1+\frac{\left(\sqrt{z}-\sqrt{z_0^*}\right)^2}{2p(2n-1)^2}\right|. \qquad (1.2)$$

Произведения модулей двух последних слагаемых формулы (1.2) преобразуются к виду

$$\left|1+\frac{z_0^*}{2p(2n-1)^2}\right|^2\left|1-\frac{z}{(\sqrt{z_0^*}+i\sqrt{2p}\,(2n-1))^2}\right|\left|1-\frac{z}{(\sqrt{z_0^*}-i\sqrt{2p}\,(2n-1))^2}\right|;$$

$$\left|1+\frac{z_0}{2p(2n)^2}\right|^2\left|1-\frac{z}{(\sqrt{z_0}+i\sqrt{2p}\,2n)^2}\right|\left|1-\frac{z}{(\sqrt{z_0}-i\sqrt{2p}\,2n)^2}\right|.$$

Тогда $G(z,z_0)$ принимает вид

$$G(z,z_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\pi^2}{8p} + \frac{1}{2\pi}\mathrm{n}|z-z_0|^{-1} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{z_0^*}{2p(2n-1)^2}\right|^2 -$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1+\frac{z_0}{2p(2n)^2}\right|^2 + \frac{1}{2\pi}\ln\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0^*}+i\sqrt{2p}(2n-1)\right)^2}\right|\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0^*}-i\sqrt{2p}(2n-1)\right)^2}\right|}{\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0}+i\sqrt{2p}2n\right)^2}\right|\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0}-i\sqrt{2p}2n\right)^2}\right|}.$$

Снова используя для преобразования третьего и четвертого слагаемых формулы разложения $\sin\pi z$ и $\cos\pi z$ в бесконечные произведения, получим

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z_0|}{|z-z_0|} + \frac{1}{\pi}\ln\left|ctg\frac{\pi i\sqrt{z_0}}{2\sqrt{2p}}\right|$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0^*}+i\sqrt{2p}(2n-1)\right)^2}\right|\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0^*}-i\sqrt{2p}(2n-1)\right)^2}\right|}{\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0}+i\sqrt{2p}2n\right)^2}\right|\left|1-\frac{z}{\left(\sqrt{z_0}-i\sqrt{2p}2n\right)^2}\right|}. \qquad (1.3)$$

Легко заметить, что у решения (1.3), продолженного на всю плоскость комплексного переменного z, кроме исходной логарифмической особенности в точке $z = z_0$, соответствующей точечному источнику внутри D, имеется бесконечная последовательность особенностей того же типа (точечных источников) в точках

$$z_n = (\sqrt{z_0^*} \pm i\sqrt{2p}(2n-1))^2;\ z_n = (\sqrt{z_0} \pm i\sqrt{2p}\,2n)^2 \ . \qquad (1.4)$$

Отделив мнимые и действительные части выражений (1.4) в виде $x_n(x_0;y_0)$ и $y_n(x_0;y_0)$, и исключив целочисленные параметры 2n - 1 и 2n, получим уравнение параболы, проходящей через точки $(x_0;y_0)$; $(x_0;-y_0)$:

$$x = \frac{-(y+y_0)^2}{2\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0\right)} + \frac{y_0(y+y_0)}{\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0\right)} + x_0 ,$$

ортогональной исходной параболе, вдоль которой расположена бесконечная последовательность точечных источников, внешних по отношению к области D. Перепишем теперь уравнение исходной параболы $y^2 = 2p(x + p/2)$ в комплексных координатах, положив $x = \dfrac{z+z^*}{2}$; $y = \dfrac{z-z^*}{2i}$:

$$(z^*)^2 + 2(2p-1)z^* + (z+2p)^2 = 0. \qquad (1.5)$$

Уравнение второго порядка (1.5) имеет два решения

$$F_1(z) = (\sqrt{z} - i\sqrt{2p})^2;\ F_2(z) = (\sqrt{z} + i\sqrt{2p})^2 .$$

Составим композиции отображений четных и нечетных порядков, осуществляемых этими функциями, вида $\overset{(2k)}{F}_2(F_{1,2}(z_0^*))$; $\overset{(2k+1)}{F}_2(F_{1,2}(z_0))$, которые несложно вычислить по индукции. Получим выражения

$$\overset{(2k)}{F}_2(F_1(z_0^*)) = (\sqrt{z_0^*} - i(2k+1)\sqrt{2p})^2;\ \overset{(2k+1)}{F}_2(F_1(z_0)) = (\sqrt{z_0} - i(2k+2)\sqrt{2p})^2;$$

$$\overset{(2k)}{F}_2(F_2(z_0^*)) = (\sqrt{z_0^*} + i(2k+1)\sqrt{2p})^2;\ \overset{(2k+1)}{F}_2(F_2(z_0)) = (\sqrt{z_0} + i(2k+2)\sqrt{2p})^2;$$

которые позволяют записать решение (1.3) более компактно

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z_0|}{|z-z_0|} + \frac{1}{\pi}\ln\left|ctg\frac{\pi i\sqrt{z_0}}{2\sqrt{2p}}\right|$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\left|1-\dfrac{z}{\overset{(2k)}{F}_2(F_1(z_0^*))}\right|\left|1-\dfrac{z}{\overset{(2k)}{F}_2(F_2(z_0^*))}\right|}{\left|1-\dfrac{z}{\overset{(2k+1)}{F}_2(F_1(z_0))}\right|\left|1-\dfrac{z}{\overset{(2k+1)}{F}_2(F_2(z_0))}\right|}. \qquad (1.6)$$

Решение исходной задачи, записанное в форме (1.6), означает, что положение внешних по отношению к параболе точечных источников (изображений) определено композициями отображений, осуществляемых соответствующими однозначными ветвями решения алгебраического уравнения (1.5), описывающего границу ∂D в комплексных координатах.

Покажем, что решение вида (1.6) может быть получено непосредственным обобщением метода изображений, минуя этап конформного отображения, что и составляет суть метода Д.А. Граве. Будем считать, что область D - односвязна, и что граница ∂D области D является алгебраической кривой S, неявное уравнение которой задается полиномом P(x;y) по переменным x;y:

$$P(x;y) = 0\ ,$$

причем полином P неприводим. Используя комплексные координаты z; z*, легко привести это уравнение к виду

$$Q(z;z^*) = 0 \quad (1.7)$$

где Q(z;z*) также полином по переменным z; z*. Уравнение (1.7) разрешимо в некоторой окрестности кривой S относительно z или z*: $z^* = F_1(z)$; $z = F_1^*(z)$, где $F_1(z)$ - один из корней уравнения (1.7), обладающий свойством

$$F_1(z)|_{z\in S} = z^* \in S^*, \qquad (1.8)$$

- так называемая функция Шварца [5], отображающая (с переменой ориентации) некоторые двусвязные области D_e и D_i, примыкающие к границе S извне и изутри:

$$F_1 : D_e \to D_i^*\ ;\ F_1^* : D_e^* \to D_i\ ;\ F_1 \circ F_1 = \mathrm{id}.$$

Индекс (1) у $F_1(z)$ означает, что функция Шварца есть лишь один из корней уравнения (1.7), обладающий свойством (1.8). Остальные корни $F_k(z)$; k = 2,..., N (где N- порядок полинома Q), очевидно свойством (1.8) не обладают (иначе они должны были бы тождественно совпадать с $F_1(z)$), и понадобятся позже.

Замечание. Существование среди корней $F_k(z)$ уравнения (1.7) единственной функции Шварца есть следствие неприводимости полинома P(x;y), т.е. границей ∂D области D является единственная аналитическая кривая S.

Поскольку S - алгебраическая кривая, особенностями корней уравнения (1.7) могут быть либо полюса, либо точки ветвления конечного порядка N , расположенные в D или в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Однако области D_e и D_i свободны от особенностей функций $F_k(z)$.

Продолжим функцию Грина $G(z,z_0)$ - решение задачи (1)', вне области D следующим нечетным образом

$$G(z,z_0)\,|_{z\in D_e} = -\,G(F_1(z),z_0),$$

точнее говоря,

$$G(z, z^*; z_0, z_0^*)\,|_{z\in D_e} = -\,G(F_1^*(z),F_1(z);z_0,z_0^*). \qquad (1.9)$$

Функция $G(F_1(z),z_0)$, удовлетворяет в области $D \cup D_e$ уравнению Лапласа (в силу аналитичности в D_e функции $F_1(z)$) и, благодаря продолжению (1.9), $G(z,z_0)$ удовлетворяет на S условию Дирихле. Пусть $z_0 \in D_i$. Применяя к функциям $\psi(z,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\ln|z-\xi|^{-1}$ и $G(F_1(\xi^*),z_0)$ в двусвязной области D_e формулу Грина по переменной ξ, и к функциям $\psi(z,\xi)$ и $G(\xi,z_0)$ по той же переменной, - в области D, учитывая краевое условие Дирихле на S, а также свойство

$$\partial_e G(F_1(\xi^*),z_0) = \partial_i G(\xi,z_0)\,|_{\xi\in S}$$

нормальной производной ∂_e функции $G(F_1(\xi^*),z_0)$ на границе S, получим следующее представление функции $G(z,z_0)$:

$$G(z,z_0) = \psi(z,z_0) - \psi(z,F_1(z_0^*)) +$$

$$\oint_{\Gamma_e}\left[\psi(z;\xi)\partial_e G(F_1(\xi^*),z_0) - \partial_e\psi(z;\xi)G(F_1(\xi^*),z_0)\right]ds_\xi\ ; \qquad (1.10)$$

во всей области $D \cup D_e$, где $\Gamma_e = \partial D_e \setminus S$; $F_1(z_0^*) \in D_e$. Представление (1.10) было получено в [6] и названо теоремой синтеза, поскольку иллиминирует границу S, а статическое поле $G(z,z_0)$ в области D создается, помимо поля $\psi(z,z_0)$ точечного источника, полем $\psi(z,F_1(z_0^*))$ его изображения, расположенного в точке $F_1(z_0^*) \in D_e$, и распределением плотностей потенциалов простого и двойного слоев на кривой $\Gamma_e \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{D}$, причем значения этих плотностей $G(F_1(\xi^*); z_0)$ и $\partial_e G(F_1(\xi^*); z_0)$ снимаются с кривой $\Gamma_i \in D$,- образа Γ_e при отображении F_1. Приводя в (1.10) фундаментальное решение $\psi(z,\xi)$ к виду $\psi(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|\xi|^{-1} + \frac{1}{2\pi}\ln\left|1 - \frac{z}{\xi}\right|^{-1} = \psi(0,\xi) + \psi(1, \frac{z}{\xi})$, и повторяя вывод формулы (1.10) для пары функций $\psi(0,\xi)$ и $G(F_1(\xi^*),z_0)$, получим представление

$$G(z,z_0) = \psi(1, z/z_0) - \psi(1,z/F_1(z_0^*)) + G(0,z_0) +$$

$$\oint_{\Gamma_e}\left[\psi\left(1; z/\xi\right)\partial_e G\left(F_1(\xi^*),z_0\right) - \partial_e\psi\left(1; z/\xi\right)G\left(F_1(\xi^*),z_0\right)\right]ds_\xi, \qquad (1.11)$$

более удобное для дальнейшего.

Сделав в интеграле формулы (1.11) замену переменного $\xi \to F_1(\xi)$, переведем интеграл по Γ_e в интеграл по Γ_i

$$\oint_{\Gamma_i}\left[\psi\left(1; z/F_1(\xi^*)\right)\partial_i G(\xi,z_0) - \partial_i\psi\left(1; z/F_1(\xi^*)\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi. \qquad (1.12)$$

Докажем следующее утверждение

Лемма 1. Если $F_k(z)$; $k = 1,\dots, N$ - полный набор корней уравнения (1.7), имеющих точки ветвления $\{z_j\}$ порядка N, то функция $R(z) = \sum_{k=1}^{N}\Psi(F_k(z))$, где $\Psi(\xi)$ - функция, регулярная в точках $\xi_j = F_k(z_j)$; является регулярой в каждой из точек $z = z_j$.

Действительно, в окрестности любой точки $z=z_j$ $\Psi(F_k(z))$ разлагается в ряд Пюизо [2] $\Psi(F_k(z)) = \sum_{p=0}^{\infty}c_p\left(z - z_j\right)_{(k)}^{p/N}$,

где индекс (k) означает ветвь корня $\left(z - z_j\right)^{p/N}$ номера k, причем

$\left(z - z_j\right)_{(k)}^{p/N} = \left|z - z_j\right|^{p/N} e^{\frac{i\alpha p}{N}} e^{\frac{i2\pi k p}{N}}$; $\alpha = \arg\left(z - z_j\right)$.

Тогда $R(z) = \sum_{p=0}^{\infty}c_p\, e^{i\frac{\alpha}{N}p}\left|z - z_j\right|^{p/N}\sum_{k=1}^{N}e^{i\frac{2\pi k p}{N}}$.

Но $S_N = \sum_{k=1}^{N}e^{i\frac{2\pi k p}{N}} = 0$ при $p \neq mN$; $S_N = N$, при $p = mN$.

Тогда

$R(z) = N\sum_{m=0}^{\infty}c_{mN}\, e^{i\alpha m}\left|z - z_j\right|^{m} = N\sum_{m=0}^{\infty}c_{mN}\left(z - z_j\right)^{m}$, то есть R(z) - регулярная в точке $z = z_j$ функция.

Лемма2. Если $F_k(z)$; $k = 1,\ldots, N$ - полный набор корней уравнения (1.7), то функция $P(z;\xi) = \sum_{k=1}^{N} \psi\left(1;\frac{z}{F_k(\xi)}\right)$, где $\psi(1;\frac{z}{\xi})$ -фундаментальное решение $\frac{1}{2\pi}\ln\left|1-\frac{z}{\xi}\right|^{-1}$, регулярна по ξ в любой из особых точек функций $F_k(\xi)$.

Действительно, переписывая $P(z,\xi)$ в виде

$$P(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\prod_{k=1}^{N}\left|1-\frac{z}{F_k(\xi)}\right|^{-1} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\prod_{k=1}^{N}|F_k(\xi)|}{\prod_{k=1}^{N}|z-F_k(\xi)|},$$

учитывая теорему Виетта для многочлена порядка N, получим,что

$$\prod_{k=1}^{N}|F_k(\xi)| = {a_N(\xi)}\Big/{a_0(\xi)}\,;\ \prod_{k=1}^{N}|z-F_k(\xi)| = \frac{|Q(z;\xi)|}{a_0(\xi)},$$

где $a_k(\xi)$ - коэффициенты полинома (1.7):

$Q(z,\xi) = a_0(\xi)z^N + a_1(\xi)z^{N-1} + \ldots + a_N(\xi)$.

Коэффициенты $a_k(\xi)$ также являются полиномами и не имеют особых точек по переменной ξ, а полином $Q(z,\xi)$ при $z\notin S$ не обращается в ноль. Следовательно, функция $P(z;\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|a_N(\xi)|}{|Q(z;\xi)|}$ может иметь особенности лишь в точках обращения в ноль коэффициента $a_N(\xi)$, то есть, - в нулях функций $F_k(\xi)$, но не в особых точках этих функций.

Замечание. Пусть в области $D\setminus D_i$ функции $F_k(\xi)$ имеют нули порядков n_j в точках $\xi = \xi_j$; $j = 1,\ldots,M$. Тогда коэффициент $a_N(\xi)$ имеет в каждой из таких точек нули порядка Nn_j.

Рассмотрим теперь выражение

$$\sum_{k=1}^{N}\oint_{\Gamma_i}\left[\psi\left(1;{z}\Big/{F_k(\xi^*)}\right)\partial_i G(\xi,z_0) - \partial_i\psi\left(1;{z}\Big/{F_k(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi \qquad (1.13)$$

Пользуясь формулой Грина для $\sum_{k=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_k(\xi^*)}\right)$ и $G(\xi,z_0)$ в области $D\setminus D_i$,

леммой 1, а также тем, что по лемме 2 в окрестности ω_j каждого из нулей $\xi = \xi_j$ функций $F_k(\xi)$, $a_N(\xi) = (\xi - \xi_j)^{Nn_j}\alpha_N^j(\xi)$,

где $\alpha_N^j(\xi)$ - функция, регулярная и не обращающаяся в ноль в ω_j, получим, что интеграл (1.13) равен

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\oint_{\partial\omega_j}\left[\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)\partial_i G(\xi,z_0)-\partial_i\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi =$$

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\oint_{\omega_j}\left[\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)\Delta_\xi G(\xi,z_0)-\Delta_\xi\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]d\tau_\xi,$$

и, кроме того,

$$\Delta_\xi \sum_{k=1}^{N}\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right) = \Delta_\xi\ \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|a_N(\xi)|}{|Q(z;\xi)|} =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\Delta_\xi\ \ln\frac{1}{|\xi-\xi_j|^{Nn_j}} = -\frac{Nn_j}{2\pi}\Delta_\xi\ln\frac{1}{|\xi-\xi_j|} = Nn_j\,\delta(\xi;\xi_j).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N}\oint_{\Gamma_i}\left[\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)\partial_i G(\xi,z_0)-\partial_i\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi =$$

$$-N\sum_{j=1}^{M} n_j G(\xi_j;z_0), \tag{1.14}$$

поскольку $\Delta_\xi G(z;\xi) = 0$ в области $D\backslash D_i$. Тогда, интеграл (1.12) преобразуется к виду

$$\oint_{\Gamma_i}\left[\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_1(\xi^*)}\right)\partial_i G(\xi,z_0)-\partial_i\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_1(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi = -N\sum_{j=1}^{M} n_j G(\xi_j;z_0)$$

$$-\sum_{k=2}^{N}\oint_{\Gamma_i}\left[\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)\partial_i G(\xi,z_0)-\partial_i\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi \tag{1.15}$$

Переведем теперь интеграл в правой части (1.15) на границу Γ_e с помощью формулы Грина, считая, что $z \in D_i$, и учитывая, согласно формуле (1.11), наличие у $G(\xi,z_0)$ особенностей типа источника в точках $\xi = z_0$ и $\xi = F_1(z_0^*)$. Получим для правой части $\hat{G}(z,z_0)$ равенства (1.11) выражение $\hat{G}(z,z_0)=$

$$\psi(1;z/z_0)-\sum_{k=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_k(z_0^*)}\right)+\sum_{k=2}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_k(F_1(z_0))}\right)+G(0,z_0)-N\sum_{j=1}^{M} n_j G(\xi_j;z_0)$$

$$-\sum_{k=2}^{N}\oint_{\Gamma_e}\left[\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)\partial_i G(\xi,z_0)-\partial_i\psi\left(1;\, {}^{z}\!/\!_{F_k(\xi^*)}\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi\,. \tag{1.16}$$

Из сравнения формул (1.11) и (1.16) следует, что точечные особенности функции $\hat{G}(z,z_0)$ в точках $z = F_{k_1}(z_0^*)$; $z = F_{k_2}(F_1(z_0))$; для $k_1;k_2 \geq 2$ расположены вне границы Γ_e . Это же справедливо и для особенностей по z ядер ψ и $\partial_i\psi$ в интеграле по Γ_e : значения $F_k(\xi^*)$ при $\xi \in \Gamma_e$ принадлежат замкнутой кривой, расположенной в области $\mathbf{R}^2 \backslash (D \cup D_e)$ - вне границы Γ_e. Следовательно, контур интегрирования в формуле (1.16) можно сдвигать дальше, вплоть до замкнутой кривой $\Gamma_e^{(1)}$, содержащей указанные точечные особенности внутри себя. Получим

$$\hat{G}(z,z_0)=G(0,z_0)-N\sum_{j=1}^{M} n_j G\left(\xi_j;z_0\right)+\psi(1;z/z_0)-$$

$$\sum_{k_1=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_1}\left(z_0^*\right)}\right)+\sum_{k2=2}^{N}\sum_{k_1=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_2}F_{k_1}\left(z_0\right)}\right)-\sum_{k2=2}^{N}\sum_{k_1=2}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_2}F_{k_1}F_1(z_0^*)}\right)-$$

$$\sum_{k_3=2}^{N}\oint_{\Gamma_e^{(1)}}\left[\psi\left(1;\ z\Big/F_{k_3}(\xi^*)\right)\partial_i G(\xi,z_0)-\partial_i\psi\left(1;\ z\Big/F_{k_3}(\xi^*)\right)G(\xi,z_0)\right]ds_\xi. \qquad (1.17)$$

Как и на предыдущем шаге, сравнение формул (1.16) и (1.17) обнаруживает, что вне кривой $\Gamma_e^{(1)}$ у функци $\hat{G}(z,z_0)$ появляются особенности в точках $z = F_{k_2}F_{k_1}(z_0)$, и

$z = F_{k_2}F_{k_1}(F_1(z_0^*))$. Продолжая по индукции, получим формальный ряд вида

$$\hat{G}(z,z_0) = G(0,z_0) - N\sum_{j=1}^{M} n_j G\left(\xi_j;z_0\right) + \psi(1;z/z_0) - \sum_{k_1=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_1}\left(z_0^*\right)}\right)+$$

$$\sum_{k_2=2}^{N}\sum_{k_1=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_2}F_{k_1}\left(z_0\right)}\right)-\sum_{k_3=2}\sum_{k_2=2}^{N}\sum_{k_1=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_3}F_{k_2}F_{k_1}(z_0^*)}\right)+\ldots \qquad (1.18)$$

Выражение в правой части (1.18) можно переписать короче, вводя обозначение $F_{(p)}(z_0) = F_{k_p}F_{k_{p-1}}\cdots F_{k_1}(z_0)$ и мультииндекс $l(p) = \{k_p;\ k_{p-1};\cdots k_2;\ k_1\}$; $k_p;\ k_{p-1};\cdots k_2 \geq 2;\ k_1 \geq 1$.

Тогда

$$\hat{G}(z,z_0) = G(0,z_0) - N\sum_{j=1}^{M} n_j G\left(\xi_j;z_0\right) + \psi(1;z/z_0) +$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{l(2p)}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{(2p)}\left(z_0\right)}\right)-\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{l(2p-1)}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{(2p-1)}\left(z_0^*\right)}\right). \qquad (1.19)$$

Будем считать для простоты, что ни один из нулей ξ_j функции $F_k(z)$ не совпадает с началом координат: $\xi_j \neq 0$. Если это не так, то это условие обеспечивается простым сдвигом начала координат. Действительно, из уравнения (1.7) следует: $F_k^\delta(z) + \delta^* = F_k(z+\delta)$, и $F_k^\delta(0) = F_k(\delta) - \delta^* \neq 0$ для всех k , иначе δ была бы точкой границы. Откладывая пока вопрос о сходимости рядов в представлениях (1.18), (1.19), покажем, что при наличии у функций $F_k(z)$ нулей в области D, $\hat{G}(z,z_0)$ не может быть искомой функцией Грина внутренней задачи Дирихле в области D. Пусть ξ_p - один из нулей. Представив функции $F_k(z)$ в окрестности нуля ξ_p в виде $F_k(z) = \left(z-\xi_p\right)^{n_p}\Phi_k(z)$, где $\Phi_k(\xi_p)$, $\neq 0$, и вычисляя предел $\lim\limits_{z_0\to\xi_p} \hat{G}(z,z_0)$,получим

$$\hat{G}(z,\xi_p) = G(0,\xi_p) - N\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{M} n_j G\left(\xi_j;\xi_p\right) - N n_p\, g\left(\xi_p;\xi_p\right) + \psi(1; z/\xi_p) +$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k_1=1}^{N}\ln\frac{1}{\left|\Phi_{k_1}(\xi_p)\right|} - N\ln\frac{1}{|z|} + N\sum_{k_2=2}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_2}(0)}\right) -$$

$$N\sum_{k_3=2}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\psi\left(1;\frac{z}{F_{k_3}F_{k_2}(0)}\right) + \ldots, \qquad (1.20)$$

где $g(z,z_0)$ - регулярная часть функции Грина. Равенство (1.20) означает, что при $z_0 \to\xi_p$ у $\hat{G}(z,z_0)$ появляется по переменной z логарифмическая особенность - $N\ln\frac{1}{|z|}$ в точке $z = 0$ (фокальная точка), то есть, $\hat{G}(z,z_0)$ не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к классической функции Грина.

Замечание. Поскольку в силу принцыпа аргумента [1] и свойства (1.8) функции $F_1(z)$, $N - P = -1$, где N и P - число нулей и полюсов, с учетом их кратности, функций $F_k(z)$ в области D (или в соответствующей области на римановой поверхности, при наличии в D точек ветвления функций $F_k(z)$), то нули функций $F_k(z)$ существуют лишь для кривых, у которых $P \geq 2$.

Заметим также, что кроме фокальной точки $z = 0$, у функции $\hat{G}(z,z_0)$ могут появиться другие особенности. Действительно, если начало координат $z = 0$ является нулем функций $F_k(z)$, то при z_0 достаточно близких к нулю, композиция отображений $F_{k_2}F_{k_1}(z_0)$, и другие композиции более высокого порядка, ввиду их непрерывности, дадут образы также близкие к нулю, то есть принадлежащие области D. Справедливо

Утверждение 1. Метод Д.А. Граве построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа неприменим для односвязных областей с алгебраическими границами, у которых корни $F_k(z)$ алгебраического уравнения границы области D в комплексных координатах z; z^*, имеют в области D полюса порядков $P \geq 2$.

Обратимся теперь к алгебраическим кривым, у которых в области D функции $F_k(z)$ имеют в качестве особенностей лишь точки ветвления. В этом случае второе слагаемое в формулах (1.18) и (1.19) отсутствует.

Каждое из слагаемых в формулах (1.18) , (1.19) является, согласно лемме 1, функцией, регулярной по переменной z_0 (z_0^*) всюду в области D, так как в каждом из них присутствует полный набор корней $F_k(z_0)$ ($F_k(z_0^*)$); $k = 1,\ldots,N$.

Кроме того, ряды (1.18) , (1.19) удовлетворяют по переменной z_0 нулевому краевому условию, поскольку

$$F_1(z_0)|_{z_0 \in S} = z_0^* \in S^*; \; F_1(z_0^*)|_{z_0^* \in S^*} = z_0 \in S.$$

Легко убедиться, что ряды (1.18) , (1.19) удовлетворяют и по переменной z нулевому краевому условию, для чего, положив $z \in S$, убеждаемся, что $\hat{G}(z,z_0)|_{z \in S}$ удовлетворяет в области D по переменной z_0 однородному уравнению Лапласа и однородному краевому условию. Из способа построения рядов (1.18) , (1.19) ясно, что бесконечная последовательность вторичных источников, расположенных в точках $F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$, - вне области D, разбивается на конечные группы, каждая из которых принадлежит двусвязной области с границей $\Gamma_e^{(k)} \cup \Gamma_e^{(k-1)}$ ($k = 0,...,\infty$); $\Gamma_e^{(0)} = \Gamma_e$; $\Gamma_e^{(-1)} = S$. При этом $\Gamma_e^{(k)} \to \infty$ при $k \to \infty$, если последовательность $F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$ не имеет предельных точек в конечной части плоскости (в работе [4] такие группы названы регулярными). Покажем, что предельных точек в конечной части плоскости быть не может, если полином P(x;y), описывающий границу ∂D неприводим. Действительно, если это не так, то при $(p) \to \infty$ существует предельный элемент $F_\infty(z_0)$: $F_{(p)}(z_0) \to F_\infty(z_0)$ в любой подходящей топологии. Применим к $F_\infty(z_0)$ отображение $F_1(z)$. Получим $F_1(F_\infty(z_0)) = F_\infty(z_0)$, иначе $F_\infty(z_0)$ не являлась бы предельной точкой. Следовательно, существует $w = F_\infty(z_0)$, такое, что $F_1(w) = w^*$, то есть w - точка границы, и полином P(x;y), оказывается приводимым: $P(x;y) = P_1(x;y)(x - \mathrm{Re}w)(y - \mathrm{Im}w)$. Отсутствие у последовательности $F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$ предельных точек в конечной части плоскости означает, что слагаемые формулы (1.19) $\psi\left(1;\frac{z}{F_{(2p)}(z_0)}\right)$; $\psi\left(1;\frac{z}{F_{(2p-1)}(z_0^*)}\right)$ стремятся к нулю при при $(p) \to \infty$ равномерно по z_0, и поскольку ряд в (1.19) является знакопеременным по мультииндексу (p) , выполнен достаточный признак его равномерной сходимости [7]. Иначе говоря, справедливо

Утверждение 2. Если полином P(x;y) , описывающий границу односвязной области D, неприводим, и функции $F_k(z)$, - корни уравнения (1.7) имеют в D в качестве особенностей точки ветвления, и не более одного полюса первого порядка, ряд в представлении (1.18), (1.19) сходится равномерно по $z_0 \in D$.

Иными словами, для областей с такими границами метод Д. А. Граве приводит к решению исходной внутренней задачи Дирихле.

Попробуем теперь описать класс таких областей в более привычных геометрических категориях. Для этого, вводя достаточно мелкое разбиение границы S области D точками $\{z_j\}$; $j = 1,...M$, построим многоугольник $P_{z_j}^{\varepsilon}$, с вершинами $z_j + \varepsilon_j$, где ε_j - сколь угодно малые по модулю величины, такие, что точки $z_j + \varepsilon_j$ целиком принадлежат открытой области D_i. Если разбиение достаточно мелкое, и граница S - выпуклая кривая, то граница многоугольника

$P^{\varepsilon}_{z_j}$ будет целиком принадлежать открытой области D_i. Тогда замкнутая кривая $F_1 \circ \partial P^{\varepsilon}_{z_j}$, по свойству функции Шварца, полностью принадлежит области D_e, то есть, для точек границы $\partial P^{\varepsilon}_{z_j}$ многоугольника справедливо

$$|F_1(z)| > |z|. \tag{1.21}$$

Если внутри области D функция $F_1(z)$ имеет полюса, то, поместив каждый из них внутрь окружности ω_k; $k = 1, ..., P$ достаточно малого радиуса, легко добиться выполнения на этих окружностях неравенства (1.21). Будем предполагать также, что начало координат не совпадает ни с одним из возможных нулей функции $F_1(z)$. Присоединив к границам ω_k окружность ω_0 малого радиуса с центром в начале координат, на которой, выбором радиуса, также можно добиться выполнения неравенства (1.21), получим, что в многосвязной области с границей $\partial P^{\varepsilon}_{z_j} \cup \omega_k$; $k = 0, ..., P$ (расположенной, вообще говоря, на римановой поверхности функции $F_1(z)$) справедлива теорема Руше [2], из которой следует, что функции $F_1(z)$ и $F_1(z) + z$ имеют в этой области одинаковое число нулей. Но поскольку для функций $|F_1(z)|$ и $|z|$, как субгармонических в рассматриваемой области [2], справедлив принцип максимума, то функция $F_1(z) + z$ не имеет в этой области нулей. То есть $F_1(z)$, также не имеет нулей в области D.

Таким образом, выпуклость области D является достаточным условием отсутствия в ней нулей функции Шварца $F_1(z)$ (также как и остальных корней $F_k(z)$, уравнения (1.7)). Полученный результат формулируется в следующем виде.

Утверждение 3. Достаточным условием применимости метода Д.А. Граве к решению плоских внутренних задач Дирихле для уравнения Лапласа в областях с односвязными алгебраическими границами является выпуклость этих областей.

Замечание. Отметим, что работа [4] не содержит общего достаточного признака сходимости рядов Д.А. Граве для алгебраических кривых. Такая сходимость доказывается в [4] для каждого рассматриваемого частного примера.

Замечание. Сформулированные выше результаты полностью применимы и для внутренних краевых задач с условием Неймана, если осуществить вместо нечетного продолжения (1.9) функции Грина вне области D, ее четное продолжение (со знаком плюс).

2. *Примеры для внутренних задач*.

Пример построения функции Грина задачи Дирихле для внутренности параболы методом Д.А. Граве был фактически уже рассмотрен в п.1. Решение имеет вид

$$G(z,z_0) = G(0,z_0) + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z_0|}{|z-z_0|} + \frac{1}{2\pi}\ln\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\left|1-\dfrac{z}{F_2^{(2k)}(F_1(z_0^*))}\right|\left|1-\dfrac{z}{F_2^{(2k)}(F_2(z_0^*))}\right|}{\left|1-\dfrac{z}{F_2^{(2k+1)}(F_1(z_0))}\right|\left|1-\dfrac{z}{F_2^{(2k+1)}(F_2(z_0))}\right|}. \tag{2.1}$$

Если константа $G(0,z_0)$ заранее неизвестна, то она легко вычисляется из краевого условия, если для $z \in S$ положить в формуле (2.1) $z^* = F_1(z)$ и, получив уравнение $G(z|_S,z_0) = 0$ для функции одного комплексного переменного z, устремить z к точке, в которой $F_1(z) = 0$, то есть, - к $z = -2p$. При этом, третье слагаемое в (2.1) вычисляется в замкнутой форме, используя, как и в п.1, формулы разложения $\sin\pi z$ и $\cos\pi z$ в бесконечные произведения [1]. В результате получим величину

$$G(0,z_0) = \frac{1}{\pi}\ln\left|ctg\frac{\pi i\sqrt{z_0}}{2\sqrt{2p}}\right|,$$

которая полностью совпадает со вторым слагаемым формулы (1.3), полученной методом конформных отображений. Сходимость бесконечных произведений в представлении (2.1), гарантированная утверждением 2, проверяется здесь непосредственно, учитывая явный вид композиций отображений
$F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$, приведенных в п.1.

Следующий пример,- эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.

Уравнение (1.7) имеет вид

$$(z^*)^2 - 2zz^*\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^2-b^2} + z^2 = 0.$$

Его решение

$$F_{1,2}(z) = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}z \mp \frac{2ab\left[z^2-\left(a^2-b^2\right)\right]^{1/2}}{a^2-b^2}. \qquad (2.2)$$

Общее представление решения по методу Д.А. Граве имеет прежний вид (2.1). Композиции отображений $F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$, входящие в (2.1), могут быть вычислены явно по индукции (что и проделано в [4]). Они имеют вид

$$\overset{(2n)}{F}{}_2(F_{1,2}(z_0^*)) = z_0^*\frac{(a+b)^{4n+2}+(a-b)^{4n+2}}{2(a^2-b^2)^{2n+1}} \mp$$

$$\frac{[(a+b)^{4n+2}-(a-b)^{4n+2}]}{2(a^2-b^2)^{2n+1}}\times\sqrt{\left(z_0^*\right)^2-\left(a^2-b^2\right)};$$

$$\overset{(2n+1)}{F}{}_2(F_{1,2}(z_0)) = z_0\frac{(a+b)^{4n+4}-(a-b)^{4n+4}}{2(a^2-b^2)^{2n+2}} \mp$$

$$\frac{[(a+b)^{4n+4}-(a-b)^{4n+4}]}{2(a^2-b^2)^{2n+2}}\times\sqrt{z_0^2-\left(a^2-b^2\right)}.$$

В работе [4] показано, что при построении решения типа (2.1) композиции отображений $F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$, возрастающих порядков приводят к появлению вторичных источников в точках плоскости, расположенных каждый раз вне эллипса с полуосями возрастающих размеров:

$$a_k = \frac{(a+b)^k+(a-b)^k}{2c^{k-1}};\ b_k = \frac{(a+b)^k-(a-b)^k}{2c^{k-1}};\ c = \sqrt{a^2-b^2},$$

что позволяет доказать сходимость ряда в (2.1). Константа $G(0,z_0)$ вычисляется также, как и в случае параболы, однако замкнутое выражение для нее в элементарных функциях не выписывается. Это связано с тем, что конформное отображение w(z) внутренности эллипса на верхнюю полуплоскость строится при помощи эллиптической функции Якоби, и, в свою очередь,

$$G(0,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|w(0) - w^*(z_0)|}{|w(0) - w(z_0)|}.$$

Рассмотрим теперь пример неодносвязной области, граница которой определена Гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$, имеющей, как известно, две ветви $y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$, $|x| \geq a$, асимптоты которых являются биссектрисами квадрантов, т.е. составляют с осями координат углы $\pi/4$. Уравнение границы в комплексных координатах
$(z^*)^2 + z^2 = 2a^2$; его решения: $F_1(z) = \pm\sqrt{2a^2 - z^2}$.

Легко убедиться в том, что композиция отображений $F_{(2p)}(z_0)$; $F_{(2p-1)}(z_0^*)$ приводит всего к трем различным точкам:
$\sqrt{2a^2 - (z_0^*)^2}$; $-\sqrt{2a^2 - (z_0^*)^2}$; $- z_0$, расположенным на окружности радиуса $a\sqrt{2}$, которые периодически повторяются по мере возрастания порядков композиций, и что бесконечное произведение в правой части равенства (2.1) сводится к выражению

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left|1 - \frac{z}{\sqrt{2a^2 - (z_0^*)^2}}\right|\left|1 + \frac{z}{\sqrt{2a^2 - (z_0^*)^2}}\right|}{\left|1 + \frac{z}{z_0}\right|},$$

а выражение функции Грина для внутренности одной из ветвей гиперболы сведется к суперпозиции статических полей четырех источников, расположенных в точке $z = z_0$ и в трех остальных:

$$G(z,z_0) = G(0,z_0) + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\left|1 - \frac{z}{\sqrt{2a^2 - (z_0^*)^2}}\right|\left|1 + \frac{z}{\sqrt{2a^2 - (z_0^*)^2}}\right|}{\left|1 - \frac{z}{z_0}\right|\left|1 + \frac{z}{z_0}\right|}. \qquad (2.3)$$

Прежний способ вычисления константы $G(0,z_0)$ через краевое условие $G(z|_S,z_0) = 0$ приводит к выражению

$$G(0,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z_0^2 - 2a^2|}{|z_0|^2},$$

что позволяет записать функцию Грина (2.3) в более компактном виде

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^2 + (z_0^*)^2 - 2a^2|}{|z^2 - z_0^2|}.$$

В [4] показано, что в случае общего уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ конечные группы изображений, принадлежащих софокусному эллипсу, возникают лишь для тех гипербол, углы между асимптотами которых соизмеримы с π. Если же углы между асимптотами несоизмеримы с π, то изображения непрерывно заполняют весь софокусный эллипс, и метод построения функции Грина, изложенный выше, неприменим. Пример с гиперболой свидетельствует о том, что условие односвязности области D существенно.

Литература.

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965

2. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968

3. Тихонов А. Н. , Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953

4. Grave D.A. Sur le problème de Dirichlet // Assos. Francaise pour l'Avancement des Sciences. Comptes Rendus (Bordeaux). 1885, Vol. 24, pp.111-136.

5. Davis Ph. The Schwarz Functions and its Applications. M. ass. of Am.., 1979.

6. Апельцин В.Ф. // ЖВМ и МФ. - 1989, т. 29, No 4, стр. 507-520.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. 2, М.: Физматгиз, 1962.