

Н.В. Арделян, К.В. Космачевский, М.Н. Саблин

О СВОЙСТВАХ СОГЛАСОВАННЫХ СЕТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ЯЧЕЙКАХ И НА ГРЯНЯХ СЕТКИ

1. Введение.

Эта работа выполнена в связи с изучением представленных в статье [1] результатов по разработке MFD-метода (Mimetic Finite Difference method), являющегося развитием метода опорных операторов [2-5].

В работе [1] представлен, в частности, вариант MFD-метода на полиэдральной сетке, составленной из ячеек, являющихся многогранниками. Скалярные сеточные функции определены в ячейках сетки, а векторные функции представлены своими локальными нормальными координатами на гранях ячеек. Сеточный аналог дивергенции определяется на основе формулы Остроградского-Гаусса путем приближения интеграла по состоящей из граней границе ячейки. Сеточный аналог градиента определяется через конечные разности между значениями скалярной функции в соседних ячейках (имеющих общую грань) и строится как опорный оператор [2-5] исходя из необходимости выполнения сеточного аналога интегрального тождества

$$\int_{\Omega} (p \nabla \cdot \mathbf{u}) dV + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla p) dV = \int_{\partial \Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} p d\sigma \quad (1.1)$$

при нулевых граничных значениях функции p . В формуле (1.1) dV – элемент объема области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2,3$), $d\sigma$ – элемент площади поверхности $\partial \Omega$ – границы области Ω , \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали к границе $\partial \Omega$. Здесь и далее вектора (величины из \mathbb{R}^n) обозначаем жирным шрифтом.

Аппроксимация потокового уравнения $\mathbf{u} + k \nabla p = 0$ при указанном способе определения сеточных функций и операторов не является очевидной, так как вектор потока и градиент представлены различными (для нерегулярной сетки) локальными координатами на гранях сетки: сеточный поток задается нормальной к грани координатой, а сеточный градиент – координатой в направлении прямой, соединяющей центры соседних ячеек. На основе построения скалярного произведения специального вида для сеточных функций, представляющих вектора, в работе [1] (см. также ссылки в ней) для стационарной системы уравнений диффузионного типа сформулирована сеточная задача, для которой доказана сходимость при однородных краевых условиях первого рода.

Конечной целью нашего исследования является доказательство на основе классической теории операторно-разностных схем [6, 7]

сходимости на гладких решениях сеточных неоднородных краевых задач указанного варианта MFD-метода. Такое исследование предполагает последовательное рассмотрение: общих свойств сеточных операторов; анализ локальной погрешности аппроксимации сеточных операторов, уравнений и краевых условий; получение априорных оценок устойчивости; доказательство сходимости как следствия этих оценок и аппроксимационных свойств.

В данной работе мы анализируем свойства сеточных аналогов дифференциальных и граничных операторов, соответствующих интегральному тождеству (1.1), и доказываем сеточные аналоги теорем вложения. Вопросы сходимости будут рассмотрены в последующих работах. Рассматриваемые сеточные операторы [1] являются согласованными [8] в смысле выполнения для них сеточного аналога интегрального соотношения (1.1) при ненулевых граничных условиях.

В теории разностных схем [6] сеточные аналоги теорем вложения играют основную роль при получении априорных оценок для решений сеточных неоднородных краевых задач. Эти оценки используются при исследовании сходимости. Для разностных схем на прямоугольной сетке такие теоремы получены и применены в [7: главы 5, 6], где их доказательство выполняется с помощью сеточного аналога формулы Ньютона-Лейбница, применяемого покоординатно.

Здесь мы доказываем сеточные аналоги неравенства вложения $W_m^1(\Omega) \rightarrow L_m(\partial\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} |p|^m d\sigma \leq c \int_{\Omega} (|p|^m + |\nabla p|^m) dV \quad (1.2)$$

и неоднородного неравенства Фридрихса

$$\int_{\Omega} |p|^m d\sigma \leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla p|^m dV + \int_{\partial\Omega} |p|^m d\sigma \right) \quad (1.3)$$

при $m=2$ для сеточных функций и операторов указанного варианта MFD-метода. При этом мы применяем сеточный аналог метода, представленного в [11: стр. 77], используя неравенства (1.2), (1.3) при $m=1$ (см. [11, неравенство (6.23)], [12, теорема 3.5 и следствие 3.4], [13, теорема из пункта 3.6.3]) и квадратичную замену $p = g^2$. Следуя [13, § 3.6], где неравенство (1.3) фигурирует как неравенство вложения $W_{m,m}^1(\Omega, \partial\Omega) \rightarrow L_m(\Omega)$, далее оба неравенства (1.2), (1.3) и их сеточные аналоги мы будем называть неравенствами вложения.

В [9] и других работах тех же авторов при построении и анализе сеточных задач для двумерных нестационарных уравнений конвекции-диффузии использованы сеточные аппроксимации рассматриваемого здесь типа на сетке, составленной из многоугольников Вороного (ячеек

Дирихле) [10]. Доказан и применяется сеточный аналог однородного неравенства Фридрихса, дающего оценку сверху квадратичной нормы функции через квадратичную норму градиента для функции, равной нулю на границе. Доказательство проведено с использованием сеточного принципа максимума [6, 7], которому удовлетворяет четырехточечный сеточный оператор Лапласа для ячеечных функций на треугольной сетке Делоне, соответствующей разбиению Вороного. На такой сетке не возникает отмеченная выше проблема несогласованности представления сеточных векторов и сеточных градиентов, так как сторона ячейки Дирихле, на которой определена локальная нормальная координата сеточного вектора, перпендикулярна стороне треугольника Делоне, соединяющей центры ячеек Дирихле и задающей направление локальной координаты градиента.

2. Сетка и сеточные функции.

Мы используем обозначения, близкие к принятым в работе [1], с некоторыми привычными для нас отличиями.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$), в декартовой системе координат, введем сетку ω_C – совокупность ячеек C (Cells) являющихся многоугольниками в двумерном случае ($n = 2$) и многогранниками в трехмерном случае ($n = 3$). Ячейки $C \in \omega_C$ таковы, что сеточная область $\bar{\Omega}_C = \bigcup_{C \in \omega_C} \bar{C} \subset \mathbb{R}^n$

приближает исходную область Ω : ячейки могут пересекаться только по своим границам; все вершины ячеек, лежащие на границе сеточной области $\bar{\Omega}_C$, принадлежат границе $\partial\Omega$ исходной области Ω . Здесь и далее используем обозначения: $\bar{G} = G \cup \partial G$ для замыкания любой области $G \subset \mathbb{R}^k$ ($k = 1, 2, 3$), ∂G – для ее границы, $\rho(A, B)$ – для расстояния между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Введем сетки ω_F , ω_E , ω_X , $\omega_F^y \subset \omega_F$ – совокупности, соответственно, граней F (Faces), ребер E (Edges), вершин X ячеек $C \in \omega_C$ (узлов), граничных граней $F \subset \partial\Omega_C$. Введем также общую сетку $\omega = \omega_C + \omega_F + \omega_E + \omega_X$ – совокупность всех узлов, ребер, граней, ячеек. Все элементы сетки ω одного типа пронумерованы индексом $i_A = 1, \dots, N_A$, где индекс $A = C, F, E, X$ указывает тип элемента сетки. Для точек пространства \mathbb{R}^n , в отличие от обозначения X для узлов сетки, используем обозначение x .

Введем обозначение $A(B) \triangleq \{A: B \subset \partial A\}$ для набора элементов A сетки ω_A таких, что граница ∂A содержит конкретный элемент B сетки ω_B . Например: $F(X)$ – грани, содержащие узел X ; $C(X)$ – ячейки, содержащие узел X ; $C(F)$ – ячейки, содержащие грань F . Это же обозначение $A(B) \triangleq \{A: A \subset \partial B\}$ используется для набора элементов A , являющихся частью границы ∂B конкретного элемента B сетки. Например: $F(C)$ – грани ячейки C ; $X(C)$ – вершины ячейки C ; $X(F)$ – вершины грани F .

Множество $C(F)$ содержит две ячейки C_1^F, C_2^F для внутренних граней $F \in \omega_F^0 \triangleq \omega_F \setminus \omega_F^\gamma$ и одну ячейку C_1^F – для граничных граней, при этом в общей нумерации номер ячейки C_1^F меньше номера ячейки C_2^F .

Введем сеточную область граней – $(n-1)$ -мерное множество $\bar{\Omega}_F = \bigcup_{F \in \omega_F} \bar{F} \subset \bar{\Omega}_C$ и сеточную область ребер (при $n=3$) – 1-мерное множество $\bar{\Omega}_E = \bigcup_{E \in \omega_E} \bar{E} \subset \bar{\Omega}_F \subset \bar{\Omega}_C$. Считаем каждое множество $\bar{\Omega}_A (A \subset \{C, F, E\})$ связным – содержащим непрерывную линию, соединяющую любые две его точки.

Введем внешние единичные нормали $\mathbf{n}_F^C \in \mathbb{R}^n (F \in F(C))$ к граням ячейки C и не зависящие от ячеек единичные нормали $\mathbf{n}_F \in \mathbb{R}^n$ к каждой грани $F \in \omega_F$, направленные от ячейки C_1^F с меньшим общим номером. Для граничных граней $F \in \omega_F^\gamma$ формально считается, что вне сеточной области Ω_C находится фиктивная ячейка C_2^F с большим общим номером, тем самым граничная нормаль $\mathbf{n}_F (F \in \omega_F^\gamma)$ является внешней для сеточной области Ω_C .

Меру размерности $k \in \{1, 2, 3\}$ любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ той же размерности обозначаем символом $|A|$. В работе используются такие меры, как объем многогранника, площадь многоугольника, длина отрезка прямой линии.

Считаем, что мера любого элемента A сетки ω оценивается снизу и сверху через сеточный параметр $0 < h \in \mathbb{R}^1$:

$$c_m h^k \leq |A| \leq c_M h^k. \quad (2.1)$$

В (2.1) величина $k \in \{1, 2, 3\}$ обозначает размерность множества $A \subset \mathbb{R}^n$, c_m, c_M – не зависящие от параметра h постоянные. Далее малой

буквой c , возможно с индексами, будут также обозначаться константы, не зависящие от h .

Барицентр любой области $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначаем $\mathbf{x}_A \equiv \mathbf{x}(A) \triangleq |A|^{-1} \int_A \mathbf{x} dV_A$, где V_A – соответствующая мера. Во избежание противоречий, считаем, что $\mathbf{x}(A) \in A$ для любого элемента A сетки ω . Символом $L_{a,b} \triangleq \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ будем обозначать вектор, соединяющий точки $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b$.

Конечномерные линейные пространства скалярных сеточных функций, определенных на ячейках $C \in \omega_C$ и на гранях $F \in \omega_F$, обозначаем \mathcal{B}_C и \mathcal{B}_F соответственно. Введем также пространство \mathcal{B}_F^γ скалярных сеточных функций, определенных на граничных гранях $F \in \omega_F^\gamma$, и прямую сумму $\bar{\mathcal{B}}_C = \mathcal{B}_C \oplus \mathcal{B}_F^\gamma$. При обозначении сеточных функций используем верхний индекс: $g^C \in \mathcal{B}_C$, $g^F \in \mathcal{B}_F$, $g^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma$, $\bar{g}^C = [g^C \in \mathcal{B}_C, g^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma] \in \bar{\mathcal{B}}_C$. Для значений сеточных функции $g^A \in \mathcal{B}_A$ ($A \in \{F, C\}$) на конкретных элементах $a \in \omega_A$ сетки используем нижний индекс либо скобки: $g_a^A \equiv g^A(a)$. В рассматриваемом контексте элементы пространств \mathcal{B}_C , $\bar{\mathcal{B}}_C$, интерпретируются как сеточные скаляры, элементы пространства \mathcal{B}_F – как сеточные векторы, заданные на гранях своими локальными нормальными координатами по направлениям \mathbf{n}_F ($F \in \omega_F$). Мы будем использовать также пространство \mathcal{B}_C сеточных вектор-функций, определенных в ячейках $C \in \omega_C$.

3. Сеточный аналог интегрального соотношения и сеточные операторы.

Покажем, что сеточный аналог интегрального соотношения (1.1) и определения [1] сеточных аналогов дифференциальных операторов $\nabla, \nabla \cdot$ могут быть получены как следствие (1.1). Для этого построим непрерывные кусочно-гладкие функции $\tilde{p}_\varepsilon^C(\mathbf{x}) : \bar{\Omega}_C \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\tilde{u}^F(\mathbf{x}) : \bar{\Omega}_C \rightarrow \mathbb{R}^n$, приближающие сеточные функции $\bar{p}^C = \{p^C \in \mathcal{B}_C, p^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma\} \in \bar{\mathcal{B}}_C$, $u^F \in \mathcal{B}_F$, и такие, что в результате их подстановки в интегральное соотношение (1.1) и перехода к пределу при $0 < \varepsilon \rightarrow 0$ получается сумматорное тождество – аналог (1.1).

Функция \tilde{p}_ε^C используется далее также при доказательстве сеточных аналогов неравенств вложения (1.2), (1.3).

3.1. Построение функции \tilde{u}^F .

Сформулируем требования к непрерывной кусочно-гладкой вектор-функции \tilde{u}^F :

- равенство интегрального среднего по каждой грани $F \in \omega_F$ значению сеточной функции на этой грани:

$$\int_F \mathbf{n}_F \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F d\sigma = |F| u^F(F); \quad (3.1)$$

- знакоопределенность на грани:

$$\forall x \in F \in \omega_F \quad \text{sign}(\mathbf{n}_F \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F(x)) = \text{sign}(u^F(F));$$

- равенство нулю на границе грани: $\forall x \in \partial F \subset \bar{F} \in \omega_F \quad \tilde{\mathbf{u}}^F(x) = 0$

В силу непрерывности (в том числе на гранях) и равенства нулю на границах граней, такая функция будет непрерывной и кусочно-гладкой на всей сеточной области $\bar{\Omega}_C$. Существование такой функции представляется почти очевидным. Приведем один из возможных способов ее определения.

В каждой ячейке $C \in \omega_C$ на всех гранях $F \in F(C)$ как на основаниях построим непересекающиеся пирамиды $\Pi_F \subset C$, лежащие внутри ячейки C , такие, что ортогональная проекция вершины каждой пирамиды лежит внутри ее основания. Положим $\tilde{\mathbf{u}}^F(x) = 0$ на боковых гранях этих пирамид и на части ячейки C , не занятой пирамидами (при $x \in C \setminus \bigcup_{F \in F(C)} \Pi_F$).

В точках каждой пирамиды $\bar{\Pi}_F \subset \bar{C}$ ($F \in F(C)$) представим вектор $\tilde{\mathbf{u}}^F = (\tilde{\mathbf{u}}^F)_n + (\tilde{\mathbf{u}}^F)_\tau$ в виде суммы двух компонент

$$(\tilde{\mathbf{u}}^F)_n \triangleq \mathbf{n}_F \mathbf{n}_F \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F, \quad (\tilde{\mathbf{u}}^F)_\tau \triangleq -\mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_F \times \tilde{\mathbf{u}}^F, \quad (3.2)$$

одна из которых параллельна нормали \mathbf{n}_F а другая – перпендикулярна ей и параллельна основанию пирамиды. Положим равной нулю параллельную основанию $F \in F(C)$ компоненту вектора $\tilde{\mathbf{u}}^F$: $\forall x \in \bar{\Pi}_F \quad (\tilde{\mathbf{u}}^F)_n(x) = 0$. На основании пирамиды зададим нормальную координату $\mathbf{n}_F \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F$ вектора $\tilde{\mathbf{u}}^F$ гладкой функцией типа «крышки» так, чтобы было выполнено равенство (3.1) и условие равенства нулю на границе грани F – основания пирамиды. Внутри пирамиды Π_F зададим $\mathbf{n}_F \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F$ линейно вдоль параллельных нормали \mathbf{n}_F отрезков, соединяющих точки боковых граней с основанием. Как указано выше, $\mathbf{n}_F \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F = 0$ на

боковых гранях пирамиды, на основании пирамиды эта величина является гладкой и удовлетворяет равенству (3.1).

3.2. Построение функции \tilde{p}_ε^C .

Непрерывная функция $\tilde{p}_\varepsilon^C : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\Omega}_C$ задается так, чтобы она была: равной константе p_C^C на большей части каждой ячейки $C \in \omega_C$; равной константе p_F^γ на большей части каждой граничной грани $F \in \omega_F^\gamma$; линейной вдоль нормали к грани с переходом между значениями $p_{C_1^F}^C, p_{C_2^F}^C$ ($C_1^F, C_2^F \in C(F)$) в малой окрестности каждой грани $F \in \omega_F$; гладко переходящей в малой окрестности ребер к нулевому значению на ребрах. При этом строится разбиение сеточной области Ω_C , состоящее из ε -окрестностей граней, ребер и из внутренних частей ячеек. При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция \tilde{p}_ε^C переходит в кусочно-постоянное восполнение сеточной функции $p^C \in \mathcal{B}_C$, дополненное кусочно-постоянным восполнением граничной сеточной функции $p^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma$ на границе $\partial\Omega_C$. На рис. 1 в двумерном случае представлен фрагмент разбиения сеточной области Ω_C внутри отдельной ячейки $C \in \omega_C$. Более детально это разбиение и задание функции \tilde{p}_ε^C описывается ниже для трехмерного случая.

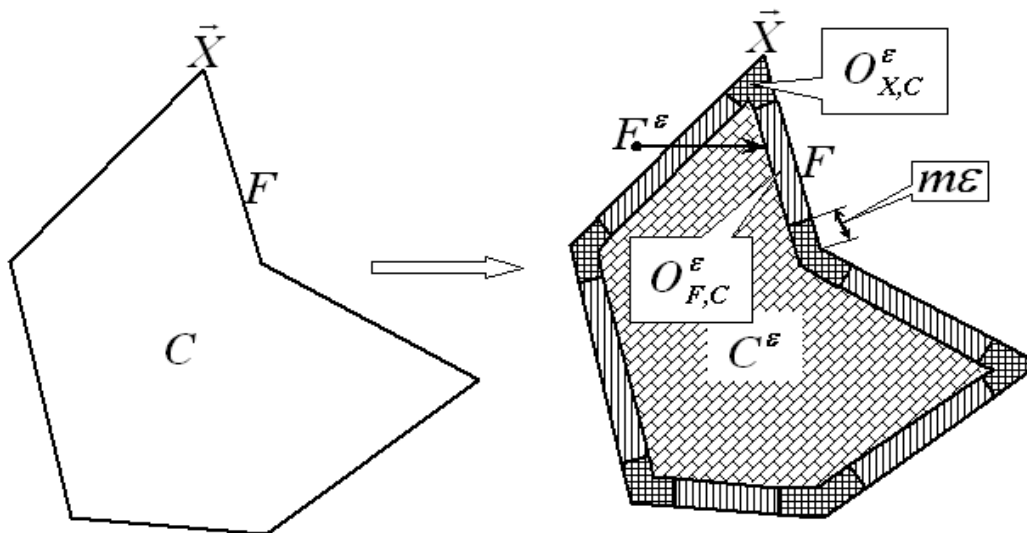


Рис.1. Разбиение ячейки в двумерном случае.

Внутри каждой ячейки $C \in \omega_C$ построим многогранник $C^\varepsilon \subset C$ (ε -ячейку), проводя внутри C плоскости, параллельные плоскостям граней $F \in F(C)$ (в двумерном случае $C^\varepsilon \subset C$ – многоугольник, см. рис. 1). Эта ε -ячейка обладает следующими определяющими свойствами:

- плоскости граней $F^\varepsilon \subset \partial C^\varepsilon$ параллельны плоскостям соответствующих граней $F \subset \partial C$, отстоят от них на расстоянии ε ;
- грани $F^\varepsilon \subset \partial C^\varepsilon$ являются многоугольниками с тем же числом вершин и сторон, что и у соответствующих граней F ;
- стороны $E^\varepsilon \in E(F^\varepsilon)$ каждой грани F^ε лежат на линии пересечения плоскостей, проведенных для грани F и соседних граней ячейки C ;
- если две соседние грани ячейки C с общим ребром $E \in E(C)$ лежат в одной плоскости, то соответствующее ребро $E^\varepsilon \in E(C^\varepsilon)$ лежит на плоскости, перпендикулярной плоскости граней и проходящей через ребро E ;
- стороны $E^\varepsilon \in E(F^\varepsilon)$ каждой грани F^ε параллельны соответствующим сторонам $E \in E(F)$ грани F .

На каждой ε -ячейке C^ε положим функцию \tilde{p}_ε^C равной значению сеточной функции p^C в ячейке C :

$$\forall x \in \bar{C}^\varepsilon \subset C \in \omega_C \quad \tilde{p}_\varepsilon^C(x) = p^C(C). \quad (3.3)$$

Содержащее область граней $\bar{\Omega}_F$ множество $\Omega_F^\varepsilon \triangleq \Omega_C \setminus \bigcup_{C \in \omega_C} \bar{C}^\varepsilon$

назовем ε -окрестностью области граней $\bar{\Omega}_F$. Оно связно и расстояние $\rho(x, \partial \Omega_F^\varepsilon)$ от любой внутренней точки $x \in \Omega_F^\varepsilon$ до границы есть величина порядка ε . Объем ε -окрестности Ω_F^ε есть величина порядка $\varepsilon |\Omega_F|$.

Внутри ε -окрестности Ω_F^ε области граней $\bar{\Omega}_F$ для каждой грани $F \in \omega_F$ построим ее ε -окрестность $O_F^\varepsilon \equiv O^\varepsilon(F) \subset \Omega_F^\varepsilon$, представляющую собой прямую призму высотой $k\varepsilon$ ($k = 2, 1$ для внутренних, граничных граней соответственно), обладающую следующими определяющими свойствами:

- основания призмы (конгруэнтные многоугольники) $\tilde{F}_1^\varepsilon \subset F_1^\varepsilon$, $\tilde{F}_2^\varepsilon \subset F_2^\varepsilon$ лежат внутри параллельных грани F граней $F_1^\varepsilon \subset \partial C_1^F$, $F_2^\varepsilon \subset \partial C_2^F$ ε -ячеек $(C_1^F)^\varepsilon \subset C_1^F \in C(F)$, $(C_2^F)^\varepsilon \subset C_2^F \in C(F)$ соответственно; $\tilde{F}_2^\varepsilon \subset F_2^\varepsilon = F^\gamma$ для граничных граней $F^\gamma \in \omega_F^\gamma$;
- стороны многоугольников $\tilde{F}_1^\varepsilon, \tilde{F}_2^\varepsilon$ лежат на линиях пересечения граней $F_1^\varepsilon, F_2^\varepsilon$ с перпендикулярными им плоскостями, параллельными ребрам $E \in E(F)$ грани F ;

- расстояние от указанных плоскостей до ребер $E \in E(F)$ равно $m\varepsilon$, где не зависящая от ε величина m такова, что эти плоскости пересекают грани $F_1^\varepsilon, F_2^\varepsilon$ ячеек $C_1^\varepsilon, C_2^\varepsilon \in C(F)$;
- стороны многоугольников $\tilde{F}_1^\varepsilon, \tilde{F}_2^\varepsilon$ параллельны соответствующим сторонам граней $F_1^\varepsilon, F_2^\varepsilon$.

На рис.1 изображено пересечение $O_{F,C}^\varepsilon \triangleq O_F^\varepsilon \cap C$ окрестности грани F (стороны многоугольника при $n=2$) с ячейкой C .

На ε -окрестности \bar{O}_F^ε каждой грани $F \in \omega_F$ положим функцию \tilde{p}_ε^C равной функции, линейной вдоль высот прямой призмы O_F^ε (вдоль нормалей \mathbf{n}_F) и принимающей значения $p^C(C_1^F), p^C(C_2^F)$ на основаниях $\tilde{F}_1^\varepsilon, \tilde{F}_2^\varepsilon$ соответственно. Очевидно, что

$$\forall \mathbf{x} \in O_F^\varepsilon \quad \left[\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C(\mathbf{x}) \right]_n = \frac{p^C(C_2^F) - p^C(C_1^F)}{k\varepsilon}, \quad \left[\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C(\mathbf{x}) \right]_\tau = 0, \quad (3.4)$$

где $k=2(1)$ для внутренних (граничных) граней соответственно. В формуле (3.4) нижними индексами \mathbf{n}, τ аналогично (3.2) обозначены нормальная, тангенциальная компонента градиента соответственно. В формуле (3.4) $p^C(C_2^F) = p_F^\gamma$ для граничных граней $F^\gamma \in \omega_F^\gamma$.

Содержащее область ребер $\bar{\Omega}_E$ множество $\Omega_E^\varepsilon \triangleq \Omega_F^\varepsilon \setminus \bigcup_{F \in \omega_F} \bar{O}_F^\varepsilon \subset \Omega_C$

назовем ε -окрестностью области ребер $\bar{\Omega}_E$. Оно связно и расстояние $\rho(\mathbf{x}, \partial\Omega_E^\varepsilon)$ от любой внутренней точки $\mathbf{x} \in \Omega_E^\varepsilon$ до границы есть величина порядка ε . Для каждого ребра $E \in \omega_E$ на расстоянии порядка ε от его концов $X \in X(E)$ площадь сечения области Ω_E^ε плоскостью, перпендикулярной ребру, есть величина порядка ε^2 . Объем $|\Omega_E^\varepsilon|$ ε -окрестности Ω_E^ε есть величина порядка $\varepsilon^2 |\Omega_E|$. В двумерном случае ε -окрестности Ω_E^ε соответствует множество непересекающихся окрестностей Ω_X^ε узлов $X \in \omega_X$, на рис.1 изображено пересечение $O_{X,C}^\varepsilon \triangleq O_X^\varepsilon \cap C$ окрестности узла с ячейкой C .

По построению, граница $\partial\Omega_E^\varepsilon$ состоит из частей границы $\partial\Omega_F^\varepsilon$ ε -окрестности Ω_F^ε области граней Ω_F и частей границ $\partial O_F^\varepsilon (F \in \omega_F)$ ε -окрестностей O_F^ε граней. Тем самым функция \tilde{p}_ε^C определена выше на границе $\partial\Omega_E^\varepsilon$ и является кусочно-гладкой на ней. Определим нулем эту функцию на ребрах: $\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_E \subset \Omega_F^\varepsilon \quad \tilde{p}_\varepsilon^C(\mathbf{x}) = 0$. Кусочно-гладкую

функцию \tilde{p}_ε^C нетрудно доопределить в остальных точках ε -окрестности Ω_E^ε области ребер $\bar{\Omega}_E$ так, чтобы ее градиент был ограничен величиной порядка ε^{-1} :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_E^\varepsilon \quad |\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C(\mathbf{x})| \leq c_\varepsilon \varepsilon^{-1}. \quad (3.5)$$

В формуле (3.5) и далее $c_\varepsilon > 0$ – величина не зависящая от ε .

Такое построение кусочно-гладкой функции $\tilde{p}_\varepsilon^C(\mathbf{x})$ с нулевыми значениями на ребрах (в узлах при $n=2$) обусловлено необходимостью определить ее в условиях, когда к каждому ребру и к каждому узлу примыкают несколько ячеек с разными значениями сеточной функции.

В итоге, в области

$$\bar{\Omega}_C = \left(\bigcup_{C \in \omega_C} \bar{C}^\varepsilon \right) \cup \bar{\Omega}_F^\varepsilon, \quad \bar{\Omega}_F^\varepsilon = \left(\bigcup_{F \in \omega_F} \bar{O}_F^\varepsilon \right) \cup \bar{\Omega}_E^\varepsilon, \quad (3.6)$$

построена кусочно-гладкая функция \tilde{p}_ε^C , приближающая кусочно-постоянное восполнение сеточной функции \bar{p}^C , обладающая свойствами (3.3)–(3.5). В разбиении (3.6) области ячеек $\bar{\Omega}_C$ подобласти $\bigcup_{C \in \omega_C} \bar{C}^\varepsilon$, $\bigcup_{F \in \omega_F} \bar{O}_F^\varepsilon$, $\bar{\Omega}_E^\varepsilon$ пересекаются только своими границами.

В одномерном и двумерном случаях функция \tilde{p}_ε^C строится аналогично. В одномерном случае разбиение (3.6) области (отрезка) принимает вид $\bar{\Omega}_C = \left(\bigcup_{C \in \omega_C} \bar{C}^\varepsilon \right) \cup \left(\bigcup_{F \in \omega_F} \bar{O}_F^\varepsilon \right)$, где F, \bar{O}_F^ε интерпретируются как узлы и их окрестности соответственно. В двумерном случае (см. рис.1) в разбиении (3.6) объекты $F, \bar{O}_F^\varepsilon, \bar{\Omega}_E^\varepsilon$ интерпретируются как стороны многоугольных ячеек, их окрестности, множество непересекающихся окрестностей узлов соответственно.

3.3. Сумматорное тождество – сеточный аналог интегрального соотношения.

Запишем интегральное соотношение (1.1) для построенных выше функций $\tilde{\mathbf{u}}^F$, \tilde{p}_ε^C в области Ω_C :

$$\int_{\Omega_C} (\tilde{p}_\varepsilon^C \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F) dV + \int_{\Omega_C} (\tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \nabla \tilde{p}_\varepsilon^C) dV = \int_{\partial \Omega_C} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F \tilde{p}_\varepsilon^C d\sigma. \quad (3.7)$$

Замечая, что $|\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F| \leq c_\varepsilon$ так как функция $\tilde{\mathbf{u}}^F$ не зависит от ε , осуществим в равенстве (3.7) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для первого интеграла в левой части (3.7) получим, используя оценку

$|\Omega_F^\varepsilon| = O(\varepsilon|\Omega_F|)$, определение функции $\tilde{\mathbf{u}}^F$ на гранях и формулу Остроградского-Гаусса:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_C} (\tilde{p}_\varepsilon^C \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F) dV &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{C \in \omega_C} p_C^C \int_{C^\varepsilon} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F dV + \int_{\Omega_F^\varepsilon} (\tilde{p}_\varepsilon^C \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F) dV \right] = \\ &= \left[\sum_{C \in \omega_C} p_C^C \int_C \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F dV + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon|\Omega_F|) \right] = \sum_{C \in \omega_C} p_C^C \sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| u_F^F. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В последней правой части (3.8) $m = 0, 1$, если $C = C_1^F, C = C_2^F$ соответственно.

Для второго интеграла в левой части (3.7) получим, учитывая оценку $|\Omega_E^\varepsilon| = O(\varepsilon^2|\Omega_E|)$, свойства (3.3)–(3.5) и разбиение (3.6):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_C} \tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \nabla \tilde{p}_\varepsilon^C dV &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{C \in \omega_C} \int_{C^\varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \nabla \tilde{p}_\varepsilon^C dV + \sum_{F \in \omega_F} \int_{O_F^\varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \nabla \tilde{p}_\varepsilon^C dV + \int_{\Omega_E^\varepsilon} \tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \nabla \tilde{p}_\varepsilon^C dV \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{F \in \omega_F} \frac{p^C(C_2^F) - p^C(C_1^F)}{k\varepsilon} \int_0^{k\varepsilon} dy \int_{\tilde{F}^\varepsilon(y)} (\tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \mathbf{n}_F) d\sigma + O\left(|\Omega_E^\varepsilon| \frac{1}{\varepsilon}\right) \right] = \\ &= \sum_{F \in \omega_F} \left[p^C(C_2^F) - p^C(C_1^F) \right] \int_F (\tilde{\mathbf{u}}^F \cdot \mathbf{n}_F) d\sigma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon|\Omega_E|) = \\ &= \sum_{F \in \omega_F} |F| \left[p^C(C_2^F) - p^C(C_1^F) \right] u_F^F. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) $p^C(C_2^F) = p_F^\gamma$ для граничных граней $F \in \omega_F^\gamma$. В этих преобразованиях использовано представление прямой призмы O_F^ε в виде $O_F^\varepsilon = \{x \in \tilde{F}^\varepsilon(y), 0 < y < k\varepsilon\}$, где y – локальная координата по направлению вектора \mathbf{n}_F , $\tilde{F}^\varepsilon(y)$ – сечение ε -окрестности O_F^ε плоскостью, параллельной грани F .

Аналогично поступим с интегралом в правой части (3.7):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_C} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F \tilde{p}_\varepsilon^C d\sigma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{F \in \omega_F^\gamma} \left[p_F^\gamma \int_{\tilde{F}_2^\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F d\sigma + \int_{F \setminus \tilde{F}_2^\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F \tilde{p}_\varepsilon^C d\sigma \right] = \\ &= \left[\sum_{F \in \omega_F^\gamma} \left[p_F^\gamma \int_F \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^F d\sigma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(|F \setminus \tilde{F}_2^\varepsilon|) \right] \right] = \sum_{F \in \omega_F^\gamma} p_F^\gamma u_F |F|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь учтена оценка $|F \setminus \tilde{F}_2^\varepsilon| = O(\varepsilon)$ для граничных граней $F \in \omega_F^\gamma$.

Следствием интегрального соотношения (3.7), с учетом выполненных преобразований (3.8)-(3.10), является искомое сумматорное тождество для сеточных функций $\bar{p}^C = \{p^C \in \mathcal{B}_C, p^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma\} \in \bar{\mathcal{B}}_C, u^F \in \mathcal{B}_F$:

$$\sum_{C \in \omega_C} p_C^C \sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| u_F^F + \sum_{F \in \omega_F} (p_{C_2^F}^C - p_{C_1^F}^C) |F| u_F^F = \sum_{F \in \omega_F^\gamma} p_F^\gamma u_F |F|. \quad (3.11)$$

Часть второй суммы в слева в (3.11) равна сумме в правой части:

$$\sum_{F \in \omega_F^\gamma} p_{C_2^F}^C |F| u_F^F = \sum_{F \in \omega_F^\gamma} p_F^\gamma u_F |F|, \quad (3.12)$$

поэтому следствием (3.11) является сумматорное тождество для сеточных функций $p^C \in \mathcal{B}_C, u^F \in \mathcal{B}_F$:

$$\sum_{C \in \omega_C} p_C^C \sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| u_F^F + \sum_{F \in \omega_F \setminus \omega_F^\gamma} (p_{C_2^F}^C - p_{C_1^F}^C) |F| u_F^F - \sum_{F \in \omega_F^\gamma} p_{C_1^F}^C |F| u_F^F = 0. \quad (3.13)$$

3.4. Сеточные аналоги дифференциальных операторов $\nabla, \nabla \cdot$.

Сравнивая интегральное тождество (3.7) с сумматорным тождеством (3.11), определим сеточные аналоги $(\nabla_{CF} \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}_C)$, $(\nabla_{FC}) \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{B}}_C \rightarrow \mathcal{B}_F)$ дифференциальных операторов ∇, ∇ соответственно:

$$\begin{aligned} \forall u^F \in \mathcal{B}_F, C \in \omega_C : (\nabla_{CF} \cdot u^F)_C &\triangleq \frac{1}{|C|} \sum_{F \in F(C)} (-1)^m u_F^F |F|, \\ \forall \bar{p}^C \in \bar{\mathcal{B}}_{C,0}, F \in \omega_F : (\nabla_{FC} \bar{p}^C)_F &\triangleq \frac{p^C(C_2^F) - p^C(C_1^F)}{|L_F|}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В (3.14) $m = 0, 1$, если $C = C_1^F, C = C_2^F$ соответственно, вектор $L_F \triangleq L_{C_2^F, C_1^F} \equiv x_{C_2^F} - x_{C_1^F}$ соединяет барицентры соседних ячеек $C_1^F, C_2^F \in C(F)$. Для граничных граней $F \in \omega_F^\gamma$ здесь и далее приняты обозначения: $p^C(C_2^F) = p_F^\gamma, x(C_2^F) = x(F)$.

Сеточный аналог $(\nabla_{FC}^0) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_C \rightarrow \mathcal{B}_F)$ градиента для функции \bar{p}^C , равной нулю на границе ($p^\gamma = 0$), определяется также второй формулой (3.14) с $p^C(C_2^F) \equiv p_F^\gamma = 0$ для граничных граней.

Определим граничный оператор $\Phi^\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_F^\gamma \rightarrow \mathcal{B}_F)$:

$$\forall p^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma, F \in \omega_F^\gamma : (\Phi^\gamma p^\gamma)_F \triangleq \frac{p_F^\gamma}{|L_F|}; \quad \forall F \in \omega_F \setminus \omega_F^\gamma : (\Phi^\gamma p^\gamma)_F \triangleq 0. \quad (3.15)$$

Из (3.14), (3.15) следует свойство согласованности сеточного градиента ∇_{CF} с граничным оператором Φ^γ :

$$\nabla \bar{p}^C = [p^C, p^\gamma] \in \bar{\mathcal{B}}_C = \mathcal{B}_C \oplus \mathcal{B}_F^\gamma: \nabla_{FC} \bar{p}^C = \nabla_{FC}^0 p^C + \Phi^\gamma p^\gamma. \quad (3.16)$$

В конечномерных линейных пространствах $\mathcal{B}_C, \mathcal{B}_F$ вводим скалярные произведения

$$\begin{aligned} \forall p^C, g^C \in \mathcal{B}_C: (p, g)_C &= \sum_{C \in \omega_C} |C| p_C^C g_C^C; \\ \forall u^F, v^F \in \mathcal{B}_F: (u^F, v^F)_F &= \sum_{C \in \omega_C} |F| |L_F| u_F^F v_F^F. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Норму в любом пространстве со скалярным произведением обозначаем стандартным образом и определяем как корень из скалярного квадрата: $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$.

С учетом определений (3.14), (3.15) и (3.17) сеточных операторов и скалярных произведений запишем сумматорное тождество (3.11) в операторной форме:

$$\begin{aligned} \forall u^F \in \mathcal{B}_F, p^C \in \mathcal{B}_C, p^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma, \bar{p}^C \triangleq [p^C, p^\gamma] \in \bar{\mathcal{B}}_C = \mathcal{B}_C \oplus \mathcal{B}_{F,0}^\gamma: \\ (p^C, \nabla_{CF} \cdot u^F)_C + (\nabla_{FC} \bar{p}^C, u^F)_F = (\Phi_\gamma p^\gamma, u^F)_F. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С учетом свойства (3.16), из сеточно-операторного тождества (3.18) следует операторная запись сумматорного тождества (3.13):

$$\begin{aligned} \forall u^F \in \mathcal{B}_F, p^C \in \mathcal{B}_C: (p^C, \nabla_{CF} \cdot u^F)_C + (\nabla_{FC}^0 p^C, u^F)_F = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla_{FC}^0 = -(\nabla_{CF} \cdot)^*. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В технике MFD-метода [1] для сеточных функций рассматриваемого типа операторно-сеточное тождество (3.19) (сумматорное тождество (3.13)) лежит в основе определения опорного оператора $-\nabla_{FC}^0$ как сопряженного к предварительно построенному основному оператору $\nabla_{CF} \cdot$ и выводится на сеточном уровне путем перегруппировки слагаемых в первой сумме в левой части (3.13).

Операторные представления (3.18), (3.16), (3.19) сеточного аналога интегрального соотношения (1.1) и свойств сеточных операторов, выражающие на операторном уровне принцип согласованности [8] сеточных операторов, являются общими для операторов как на рассматриваемой полиэдральной, так и на треугольной сетке [14–16]. В указанных работах сформулированы также общие способы постановки сеточных неоднородных краевых задач для таких операторов. Априорные оценки устойчивости и сходимости неоднородных сеточных начально-краевых задач с согласованными сеточными операторами на треугольной сетке изучались в наших ранних работах (см., например, [14]).

4. Аппроксимационные свойства

Везде в этом разделе мы используем оценки (2.1) для мер элементов сетки.

Для любой функции $f = f(\mathbf{x})$ определим сеточные функции f_Δ^A и f_x^A – ее средне-интегральную и точечную проекции на сетку ω_A ($A \in \{F, C\}$):

$$\forall A \in \omega_A : f_\Delta^A(A) \triangleq |A|^{-1} \int_A f dV_A, \quad f_x^A(A) \triangleq f(\mathbf{x}_A). \quad (4.1)$$

В силу определения барицентра \mathbf{x}_A , для достаточно гладкой функции $f(\mathbf{x})$ имеет место аппроксимационное соотношение:

$$f_\Delta^A(A) = f_x^A(A) + O(h^2). \quad (4.2)$$

Действительно, используя формулу Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} f_\Delta^A(A) &\triangleq |A|^{-1} \int_A f dV_A = |A|^{-1} \int_A \left\{ f(\mathbf{x}_A) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_A) + O(h^2) \right\} dV_A = \\ &= f_x^A(A) + |A|^{-1} \left\{ \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) dV_A \right\} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_A) + O(h^2) = f_x^A(A) + O(h^2). \end{aligned}$$

4.1. Аппроксимационные соотношения для сеточных операторов

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \bar{\Omega}_C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p = p(\mathbf{x}) : \bar{\Omega}_C \rightarrow \mathbb{R}^1$ – достаточно гладкие функции, а $u_\Delta^F, u_x^F \in \mathcal{B}^F$ – средне-интегральная и точечная проекции на сетку ω_F локальных нормальных координат вектора \mathbf{u} на гранях:

$$\forall F \in \omega_F \quad (u_\Delta^F)_F \triangleq \frac{1}{|F|} \int_F \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{u} d\sigma, \quad (u_x^F)_F \triangleq \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_F).$$

Сеточный оператор ∇_{CF} аппроксимирует дивергенцию:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_\Delta^C = \nabla_{CF} \cdot u_\Delta^F, \quad (\nabla \cdot \mathbf{u})_x^C = \nabla_{CF} \cdot u_x^F + O(h). \quad (4.3)$$

Действительно [1], используя определение (3.14) оператора ∇_{CF} , имеем:

$$\begin{aligned} \forall C \in \omega_C \quad (\nabla \cdot \mathbf{u})_\Delta^C(C) &\triangleq \frac{1}{|C|} \int_C \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \frac{1}{|C|} \int_{\partial C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\sigma = \frac{1}{|C|} \sum_{F \in \partial C} (-1)^m \int_F \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{u} d\sigma = \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{F \in \partial C} (-1)^m |F| (u_\Delta^F)_F = \nabla_{CF} \cdot u_\Delta^F. \end{aligned}$$

Второе из соотношений (4.3) следует из первого и формулы (4.2).

Оператор ∇_{FC} аппроксимирует градиент по направлениям \mathbf{L}_F :

$$\forall F \in \omega_F : \left(\nabla_{FC} \bar{p}_x^C \right)_F = \frac{\mathbf{L}_F}{|\mathbf{L}_F|} \cdot \left[(\nabla p)_x^F \right]_F + O(h), \quad \bar{p}_x^C \triangleq [p_x^C, p_x^\gamma] \in \bar{\mathcal{B}}_C. \quad (4.4)$$

Действительно, используя формулу Тейлора, имеем:

$$\begin{aligned} \forall F \in \omega_F \quad (\nabla_{FC} \bar{p}_x^C)_F &= \frac{\bar{p}_x^C(C_2^F) - \bar{p}_x^C(C_1^F)}{|\mathbf{L}_F|} = \frac{\mathbf{L}_F \cdot (\nabla p)(\mathbf{x}_{C_1^F}) + O(h^2)}{|\mathbf{L}_F|} = \\ &= \frac{\mathbf{L}_F}{|\mathbf{L}_F|} \cdot (\nabla p)_x^F(F) + O(h). \end{aligned}$$

4.2. Аппроксимационный смысл сумматорного тождества

Первый сеточный интеграл в левой части сумматорного тождества (3.18) аппроксимирует соответствующий интеграл в тождестве (1.1), записанном для сеточной области Ω_C :

$$\begin{aligned} (p_x^C, \nabla_{CF} \cdot u_x^F)_C &= \sum_{C \in \omega_C} |C| p(\mathbf{x}_C) (\nabla \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x}_C) + O(h) = \\ &= \sum_{C \in \omega_C} \int_C p(\nabla \cdot \mathbf{u}) dV + O(h) = \int_{\Omega_C} p(\nabla \cdot \mathbf{u}) dV + O(h). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В преобразованиях (4.5) использовано аппроксимационное свойство (4.3) и определение (4.1) проекций функции на сетку.

Сеточный граничный интеграл в правой части сумматорного тождества (3.18) аппроксимирует соответствующий интеграл в (1.1):

$$\begin{aligned} (\Phi_\gamma p_x^\gamma, u_x^F)_F &= \sum_{F \in \omega_F^\gamma} |F| (p_x^F)_F (u_x^F)_F = \sum_{F \in \omega_F^\gamma} |F| p(\mathbf{x}_F) \mathbf{u}(\mathbf{x}_F) \cdot \mathbf{n}_F^F = \\ &= \sum_{F \in \omega_F^\gamma} \int_F p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma + O(h^2) = \int_{\partial\Omega_C} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\sigma + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

В преобразованиях (4.6) использовано представление $\partial\Omega_C = \bigcup_{F \in \omega_F} F$ границы сеточной области, постоянство внешней нормали \mathbf{n} на каждой плоской граничной грани и определение (3.15) граничного оператора Φ_γ .

Из тождеств (1.1), (3.18) и аппроксимационных свойств (4.5), (4.6) следует аппроксимационное соотношение

$$(\nabla_{FC} \bar{p}_x^C, u_x^F)_F = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla p) dV + O(h) \quad (4.7)$$

для второго сеточного интеграла в левой части (3.18). Однако неясно, как свойство (4.7) следует непосредственно из формулы для указанного сеточного интеграла, в которой на каждой грани $F \in \omega_F$ перемножаются разные по смыслу величины – локальная нормальная координата вектора \mathbf{u} на грани и величина, аппроксимирующая локальную координату градиента в направлении \mathbf{L}_F , не совпадающем с направлением нормали к грани в общем случае нерегулярной сетки. Ниже анализируется этот вопрос.

Используя формулу Тейлора, преобразуем сеточный градиент проекции \bar{p}_x^C на сетку функции $p(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} (\nabla_{FC} \bar{p}_x^C)_F &= \frac{p(\mathbf{x}_{C_2^F}) - p(\mathbf{x}_{C_1^F})}{|\mathbf{L}_F|} = \frac{p(\mathbf{x}_{C_2^F}) - p(\mathbf{x}_F)}{|\mathbf{L}_F|} + \frac{p(\mathbf{x}_F) - p(\mathbf{x}_{C_1^F})}{|\mathbf{L}_F|} = \\ &= \frac{\mathbf{L}_{C_2^F, F} \cdot (\nabla p)(\mathbf{x}_{C_2^F}) - \mathbf{L}_{C_1^F, F} \cdot (\nabla p)(\mathbf{x}_{C_1^F})}{|\mathbf{L}_F|} + O(h). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подстановка результата преобразований (4.8) в сеточный интеграл в левой части (4.7) позволяет записать его в виде суммы по ячейкам после перегруппировки слагаемых в сумме по граням:

$$\begin{aligned} (\nabla_{FC} \bar{p}_x^C, u_x^F)_F &= \sum_{F \in \omega_F} (|F| u_x^F(F) (\nabla_{FC} \bar{p}_x^C)_F) = \\ &= \sum_{F \in \omega_F} (|F| u_x^F(F) [\mathbf{L}_{C_2^F, F} \cdot (\nabla p)(\mathbf{x}_{C_2^F}) - \mathbf{L}_{C_1^F, F} \cdot (\nabla p)(\mathbf{x}_{C_1^F})]) + O(h) = \\ &= \sum_{C \in \omega_C} [(\nabla p)(\mathbf{x}_C)] \cdot \left[\sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| \mathbf{L}_{C, F} u_x^F(F) \right] + O(h). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Напомним, что здесь, как и ранее, $m = 1, 2$ если $C = C_{1F}, C_{2F}$ соответственно.

Опираясь на результат преобразований (4.9), определим сеточный оператор $R_{CF} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}_C)$ по правилу:

$$\forall C \in \omega_C, u^F \in \mathcal{B}_F \quad (R_{CF} u^F)_C \triangleq \frac{1}{|C|} \sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| \mathbf{L}_{C, F} u_x^F. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) интерпретируется как реконструкция векторного поля $R_{CF} u^F$ в ячейках по значениям локальных нормальных координат u^F на гранях и получена в работе [17].

Обозначая $\tilde{u}_x^C \triangleq R_{CF} u_x^F$, запишем результат преобразований (4.9) в виде:

$$\begin{aligned} (\nabla_{FC} \bar{p}_x^C, u_x^F)_F &= \sum_{C \in \omega_C} |C| [(\nabla p)(\mathbf{x}_C)] \cdot \tilde{u}_x^C(C) + O(h) = \\ &= ((\nabla p)_x^C, \tilde{u}_x^C)_C + O(h). \end{aligned} \quad (4.11)$$

В работе [17] показано, что формула реконструкции (4.10) точна для постоянных векторов:

$$\forall \mathbf{x} \in \bar{C} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{const} \Rightarrow (R_{CF} u_x^F)_C = \mathbf{u}. \quad (4.12)$$

Для достаточно гладких \mathbf{u} из (4.12) и очевидной формулы

$$\forall F \in F(C) \quad \mathbf{u}_x^C(C) = \mathbf{u}_x^F(F) + O(h)$$

следует выполнение аппроксимационного свойства

$$\tilde{\mathbf{u}}_x^C \triangleq R_{CF} \mathbf{u}_x^F = \mathbf{u}_x^C + O(h). \quad (4.13)$$

Действительно, обозначая символом R_{CF}^C сужение оператора R_{CF} на ячейку C и вводя сеточную функцию $u_x^{F(C)} = \left\{ F \in F(C) : \left(u_x^{F(C)} \right)_F = \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{u}_x^C(C) \right\}$, определенную локально на границах ячейки C , получим

$$\forall C \in \omega_C \quad \tilde{\mathbf{u}}_x^C(C) = R_{CF} \mathbf{u}_x^F = R_{CF}^C \left(u_x^{F(C)} \right) + O(h) = \mathbf{u}_x^C + O(h). \quad (4.14)$$

Подчеркнем, что преобразования (4.14) выполняются локально для каждой ячейки $C \in \omega_C$.

Используя доказанное в [1, лемма 3.1] соотношение

$$\forall C \in \omega_C \quad B_C \triangleq \frac{1}{|C|} \left[\sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| \mathbf{L}_{C,F} \mathbf{n}_F \right] = I_n,$$

где I_n – единичная $n \times n$ матрица, покажем, как аппроксимационное свойство (4.13) доказывается непосредственно, без использования утверждения (4.12) [17]:

$$\begin{aligned} \forall C \in \omega_C \quad \tilde{\mathbf{u}}_x^C(C) &= R_{CF} \mathbf{u}_x^F = \frac{1}{|C|} \sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| \mathbf{L}_{C,F} \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_F) = \\ &= \frac{1}{|C|} \left[\sum_{F \in F(C)} (-1)^m |F| \mathbf{L}_{C,F} \mathbf{n}_F \right] \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_C) + O(h) = B_C \mathbf{u}(\mathbf{x}_C) + O(h) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_C) + O(h). \end{aligned}$$

Отметим, что свойства матрицы B_C в двумерном случае ($n=2$) на треугольной сетке существенно использовались при изучении аппроксимационных свойств сеточных операторов [15, 16, 18].

Из формул (4.11), (4.13) непосредственно следует аппроксимационное соотношение (4.7):

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{FC} \bar{p}_x^C, \mathbf{u}_x^F \right)_F &= \left((\nabla p)_x^C, \tilde{\mathbf{u}}_x^C \right)_C + O(h) = \left((\nabla p)_x^C, \mathbf{u}_x^C \right)_C + O(h) = \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla p) dV + O(h). \end{aligned}$$

Тем самым показано, что каждый интеграл в интегральном тождестве (4.15) аппроксимируется непосредственно соответствующим скалярным произведением в сумматорном тождестве (3.18).

Отметим, что известная [17] формула (4.10) реконструкции векторного поля получена здесь на начальном этапе в результате аппроксимационного анализа сумматорного тождества (3.18). Эта формула позволяет непосредственно аппроксимировать потоковое уравнение $\mathbf{u} + k \nabla p = 0$ в задачах диффузионного типа для рассматриваемого здесь способа задания сеточных функций [1]. В MFD-методе формула реконструкции (4.10) [17] строилась на этапе анализа

сеточной задачи диффузионного типа, с использованием условий согласованности (consistency) и устойчивости (stability) локальных (на ячейках сетки) скалярных произведений сеточных функций, определенных на гранях. Эти условия обеспечивают сходимость сеточной однородной краевой задачи первого рода [1] для стационарного диффузионного уравнения.

5. Сеточные аналоги теорем вложения.

Разностные аналоги неравенств (1.2), (1.3) в случае $m = 2$ используются при получении априорных оценок для разностных схем [7]. В этом разделе мы получим сеточные аналоги этих неравенств в рассматриваемом случае произвольных полигональных (многоугольных) сеток. В случае прямоугольной сетки в прямоугольнике в [7, глава 5] доказаны разностные аналоги при $m = 2$ неравенства (1.2) и неравенства (1.3) в более общем случае, когда граничный интеграл в правой части (1.3) берется по части границы. При этом использовался разностный аналог формулы Ньютона–Лейбница и покоординатное сеточное интегрирование. Также формула Ньютона–Лейбница и покоординатное интегрирование используется в [11] при доказательстве теорем вложения. В силу того, что сеточный оператор ∇_{FC} является конечно-разностным, в рассматриваемом случае также имеет место сеточный аналог формулы Ньютона–Лейбница, записываемый вдоль ломанной, соединяющей центры любых двух ячеек и состоящей из отрезков, соединяющих центры соседних ячеек. Однако, из-за нерегулярности сетки, нам не удалось пока обобщить на случай произвольной сетки доказательство из [7] разностных аналогов неравенств (1.2), (1.3), основанное на покоординатном интегрировании. Отметим лишь, что, как и в теории разностных схем [6,7], на основе сеточной формулы Ньютона–Лейбница легко доказывается отсутствие нулей у сеточного оператора ∇_{FC}^0 . В данной работе для вывода сеточных аналогов неравенств (1.2), (1.3) при $m = 2$ мы применяем метод, состоящий в переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенствах (1.2), (1.3) при $m = 1$ для функции \tilde{p}_ε^C с последующей квадратичной заменой, в соответствии с [11, стр. 77].

Запишем неравенство (1.2) при $m = 1$ в области Ω_C для построенной в разделе 3.2 функции \tilde{p}_ε^C :

$$\int_{\partial\Omega_C} |\tilde{p}_\varepsilon^C| d\sigma \leq c \left(\int_{\Omega_C} |\tilde{p}_\varepsilon^C| dV + \int_{\Omega_C} |\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C| dV \right). \quad (5.1)$$

Наша цель – получить сеточный аналог неравенства (1.2) при $m = 1$ путем перехода в формуле (5.1) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для интеграла в левой части (5.1) получим аналогично (3.10):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_C} |\tilde{p}_\varepsilon^C| d\sigma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{F \in \omega_F^\gamma} \int_F |\tilde{p}_\varepsilon^C| d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{F \in \omega_F^\gamma} \left[\int_{\bar{F}_2^\varepsilon} |\tilde{p}_\varepsilon^C| d\sigma + \int_{F \setminus \bar{F}_2^\varepsilon} |\tilde{p}_\varepsilon^C| d\sigma \right] = \\ &= \sum_{F \in \omega_F^\gamma} |p_F^\gamma| |F| + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon |F|) = \sum_{F \in \omega_F^\gamma} |p_F^\gamma| |F| = (1, |p_F^\gamma|)_F^\gamma. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $(\cdot)_F^\gamma$ – граничное скалярное произведение в пространстве \mathcal{B}_F^γ – сеточный аналог интеграла по границе от произведения:

$$\forall p^\gamma, g^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma : (p^\gamma, g^\gamma)_F^\gamma = \sum_{F \in \omega_F^\gamma} |F| p_F^\gamma g_F^\gamma.$$

Для первого интеграла справа в (5.1) получим аналогично (3.8):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_C} |\tilde{p}_\varepsilon^C| dV &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{C \in \omega_C} \int_{C^\varepsilon} |\tilde{p}_\varepsilon^C| dV + \int_{\Omega_F^\varepsilon} |\tilde{p}_\varepsilon^C| dV \right] = \\ &= \sum_{C \in \omega_C} |p_C^C| |C| + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon |\Omega_F|) = \sum_{C \in \omega_C} |p_C^C| |C| = (1, |p^C|)_C. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для второго интеграла в правой части (5.1) получим аналогично (3.9) с использованием разбиения (3.6):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_C} |\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C| dV &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{C \in \omega_C} \int_{C^\varepsilon} |\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C| dV + \sum_{F \in \omega_F} \int_{O_F^\varepsilon} |\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C| dV + \int_{\Omega_E^\varepsilon} |\nabla \tilde{p}_\varepsilon^C| dV \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_{F \in \omega_F} \left| \frac{p^C(C_2^F) - p^C(C_1^F)}{k\varepsilon} \right| |O_F^\varepsilon| + O\left(|\Omega_E^\varepsilon| \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] = \\ &= \sum_{F \in \omega_F} |p^C(C_2^F) - p^C(C_2^F)| |F| + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon |\Omega_E|) = (1, |\nabla_{FC} \bar{p}^C|)_F. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из соотношений (5.2)-(5.4) следует, что при переходе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве (5.1) получается следующий сеточный аналог неравенства (1.2) при $m = 1$:

$$(1, |p_F^\gamma|)_F^\gamma \leq c \left((1, |p^C|)_C + (1, |\nabla_{FC} \bar{p}^C|)_F \right). \quad (5.5)$$

Отметим, что использованный при доказательстве (5.5) метод перехода к пределу неприменим при $m = 2$ в неравенстве (1.2), поэтому мы опираемся на менее распространенный случай $m = 1$, с последующим использованием квадратичной замены.

Рассмотрим сеточную функцию $\bar{g}^C = [g^C \in \mathcal{B}_C, g^\gamma \in \mathcal{B}_F^\gamma]$ и ее квадрат $(\bar{g}^C)^2 \triangleq [(g^C)^2 \in \mathcal{B}_C, (g^\gamma)^2 \in \mathcal{B}_F^\gamma]$ и преобразуем величину

$\nabla_{FC} (\bar{g}^C)^2$, учитывая определение (3.14) сеточного оператора ∇_{FC} и формулу для квадрата разности:

$$\nabla_{FC} (\bar{g}^C)^2 = \frac{\left[g_{C_2^F}^C \right]^2 - \left[g_{C_1^F}^C \right]^2}{|\mathbf{L}_F|} = 2g_F^F \nabla_{FC} \bar{g}^C, \quad g_F^F \triangleq \frac{1}{2} \left[g_{C_1^F}^C + g_{C_2^F}^C \right]. \quad (5.6)$$

Сделаем замену $\bar{p}^C = (\bar{g}^C)^2$ в неравенстве (5.5) и оценим сверху второе слагаемое в правой части с помощью ε -неравенства, учитывая формулу (5.6) для сеточного градиента от квадрата функции \bar{g}^C :

$$\begin{aligned} \left(1, (g^\gamma)^2 \right)_F^\gamma &\leq c \left(\left(1, (g^C)^2 \right)_C + \left(1, \left| \nabla_{FC} (\bar{g}^C)^2 \right| \right)_F \right) \Leftrightarrow \\ \left(\|g^\gamma\|_F^\gamma \right)^2 &\leq c \left[\|g^C\|_C^2 + 2 \left(|g^F|, \left| \nabla_{FC} \bar{g}^C \right| \right)_F \right] \leq \\ &\leq c \left[\|g^C\|_C^2 + 2 \|g^F\|_F \left\| \nabla_{FC} \bar{g}^C \right\|_F \right] \leq c \left[\|g^C\|_C^2 + \varepsilon \|g^F\|_F^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \nabla_{FC} \bar{g}^C \right\|_F^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

С учетом легко проверяемых неравенств

$$\|g^F\|_F^2 \leq c \left(\|g^C\|_C^2 + \|g^\gamma\|_F^2 \right), \quad \|g^\gamma\|_F^2 \leq ch \left(\|g^\gamma\|_F^\gamma \right)^2 \quad (5.8)$$

при некотором ε , не зависящем от параметра h сетки ω , и при условии $\varepsilon h \leq c$ из неравенства (5.7) следует сеточный аналог неравенства (1.2) при $m = 2$:

$$\left(\|g^\gamma\|_F^\gamma \right)^2 \leq c \left[\|g^C\|_C^2 + \left\| \nabla_{FC} \bar{g}^C \right\|_F^2 \right]. \quad (5.9)$$

Сеточный аналог неравенства (1.3) при $m = 2$ получается полностью аналогично, с использованием формул (5.2)-(5.4), и имеет вид:

$$\begin{aligned} \|g^C\|_C^2 &\leq c \left[\left(\|g^\gamma\|_F^\gamma \right)^2 + \|g^\gamma\|_F^2 + \left\| \nabla_{FC} \bar{g}^C \right\|_F^2 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|g^C\|_C^2 \leq c \left[\left(\|g^\gamma\|_F^\gamma \right)^2 + \left\| \nabla_{FC} \bar{g}^C \right\|_F^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

При доказательстве (5.10) используется последнее из неравенств (5.8) и условия $h \leq c, \varepsilon \leq c$.

При исследовании сеточных задач с неоднородными краевыми условиями разных типов на разных частях границы требуется обобщение неравенства (5.10) на случай, когда граничный сеточный интеграл (первое слагаемое в правой части (5.10)) берется не по всей границе, а по ее части:

$$\begin{aligned} \|g^c\|_C^2 &\leq c \left[\left(\|g^\gamma\|_F^{\tilde{\gamma}} \right)^2 + \|g^\gamma\|_F^2 + \|\nabla_{FC} \bar{g}^c\|_F^2 \right], \\ \left(\|g^\gamma\|_F^{\tilde{\gamma}} \right)^2 &\equiv \sum_{F \in \tilde{\omega}_F^\gamma} |F| (g_F^\gamma)^2, \tilde{\omega}_F^\gamma \subset \omega_F^\gamma. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Считаем, что множество $\bigcup_{F \in \tilde{\omega}_F^\gamma} F$ может состоять из нескольких связных частей. Наличие объемной нормы $\|g^\gamma\|_F$ граничной функции g^γ в правой части (5.11) обусловлено оценкой (5.6) сеточного градиента от квадратичной функции в граничных точках. В отличие от (5.10), эта норма не оценивается в соответствии с (5.8) через граничную норму $\|g^\gamma\|_F^{\tilde{\gamma}}$, так как в неравенстве (5.11) последняя берется по части $\tilde{\omega}_F^\gamma$ граничной сетки ω_F^γ .

Аналогично доказательству соотношения (5.10), неравенство (5.11) получается как следствие следующего обобщенного неоднородного неравенства Фридрикса

$$\int_{\Omega} |p|^m d\sigma \leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla p|^m dV + \int_{\tilde{\partial\Omega}} |p|^m d\sigma \right) \quad (5.12)$$

при $m=1$, где $\tilde{\partial\Omega} \subset \partial\Omega$ – многообразие с достаточно гладкой границей.

Мы полагаем, что неравенство (5.12) при $m=1$ имеет место (с константой c , существенно зависящей от величины $|\tilde{\partial\Omega}|$), хотя мы не нашли его в монографической литературе по пространствам Соболева. Как отмечено выше во введении, неравенство (1.3) ((5.12) при $\tilde{\partial\Omega} = \partial\Omega$, $m=1$) представлено в монографии [13].

В последующих наших работах будут представлены результаты исследования сходимости на достаточно гладких решениях сеточных неоднородных краевых задач при различных граничных условиях для стационарных уравнений диффузионного типа, полученные с использованием сумматорных тождеств (3.18), (3.19), формулы (4.10) реконструкции сеточного векторного поля [17] и сеточных неравенств вложения (5.9) – (5.11).

Литература

1. Lipnikov K. N., Manzini G., Shashkov M. J. Mimetic finite difference method // J. Comput.Phys. Part B. 2014, vol. 257. P. 1163–1227.
2. Самарский А. А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М. Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. уравн. 1981, № 7. С. 1317–1327.

3. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. Математическое моделирование. М.: Наука-Физматлит, 1995.
4. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск.: ЗАО “Критерий”, 1996.
5. Shashkov M. Y. Conservative Finite Difference Methods on General Grids. BocaRaton: CRC Press, 1996.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
7. Самарский А. А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
8. Sablin M. N., Ardelyan N. V., Kosmachevskii K. V. Consistent grid analogs of invariant differential and boundary operators on an irregular triangular grid in the case of a grid nodal approximation // Moscow Univ. Comput. Math. and Cybern. 2015. 39. N 2. P.49–57.
9. Вабищевич П. Н., Самарский А. А. Разностные схемы для задач конвекции-диффузии на нерегулярных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000, № 5, С. 726–739.
10. Heinrich V. Finite difference methods on irregular networks. Berlin: Akad.-Verl., 1987.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
12. Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р. Пространства Соболева (теоремы вложения). Казань: Казанский государственный университет, 2010.
13. Мазья В.Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
14. Арделян Н.В. Сходимость разностных схем для двумерных уравнений акустики и Максвелла //ЖВМ и МФ. 1983, № 5. С. 1168–1176.
15. Арделян Н. В., Космачевский К. В., Черниговский С. В. Вопросы построения и исследования полностью консервативных разностных схем магнитной газовой динамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.
16. Ardelyan N. V., Kosmachevskij K. V. Implicit free-lagrange method for computing two-dimensional magnetogas-dynamic flows // Computational Mathematics and Modeling. 1995, vol. 6, no. 4. P. 209–224.
17. Cangiani A., Manzini G., Flux reconstruction and pressure post-processing in mimetic finite difference methods // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2008, vol. 197. P. 933–945.
18. Арделян Н. В. О сеточных аналогах основных дифференциальных операторов на нерегулярной треугольной сетке //Разностные методы математической физики. М.:Изд-во МГУ, 1981. С. 49–58.