

А.В. Баев, Н.В. Куценко

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ВЕРТИКАЛЬНОГО СЕЙСМОПРОФИЛИРОВАНИЯ

1. Введение

1.1. В статье рассматривается решение обратной динамической задачи сейсмологии в обобщенной постановке для вертикально неоднородной среды с нерегулярным изменением упруго-плотностных параметров. Такая задача типична как для наземной сейсмологии, так и для метода вертикального сейсмопрофилеирования (ВСП). В первой части работы исследована структура обобщенного решения прямой задачи распространения волн от мгновенного точечного источника в среде с интегрируемым (с квадратом) коэффициентом отражения и показано, что регулярная часть решения принадлежит пространству L_2 . Это позволяет во второй части работы сформулировать вариационную постановку обратной задачи об определении отражающих характеристик среды по полю рассеянных волн и получить оценку устойчивости решения обратной задачи в интегральных нормах. В третьей части работы рассмотрено решение задачи минимизации невязки на основе метода итеративной регуляризации. Из рассмотрения сопряженной задачи получено представление для градиента функционала невязки и явные формулы для его приближенного вычисления. В заключение приведены результаты численного моделирования, в том числе, применения рассмотренного подхода к решению простейшей задачи синтеза.

1.2. Использование фундаментальных решений при решении как прямых так и обратных задач распространения волн имеет веские основания. Введение в рассмотрение таких решений позволяет ставить задачи для широкого класса начальных и краевых условий. Кроме того, в терминах следов таких решений наиболее просто формулируются условия разрешимости соответствующих обратных задач. Как правило, фундаментальные решения принадлежат пространству обобщенных функций, а их структура требует отдельных исследований.

Рассмотрение уравнений в классе интегрируемых коэффициентов является очевидным и естественным обобщением для уравнений с непрерывными коэффициентами. Принципиальным отличием таких обобщенных уравнений является отсутствие поточечного их выполнения и замена поточечных тождеств на интегральные. При этом понимание решения прямой задачи изменяется, а его соответствие данным наблюдений имеет лишь интегральный характер, например, в смысле величины невязки.

Целью настоящей работы является решение обратной задачи рассеяния в случае, когда прямая задача является как бы дважды обобщенной, как по начально-краевым условиям, так и по классу коэффициентов. Изучение структуры обобщенного решения прямой задачи и выделение его регулярной интегрируемой составляющей дает возможность сформулировать обратную задачу в вариационной постановке для функционала невязки. Рассмотрение сопряженной задачи для функционала невязки позволяет для коэффициентов задачи из L_2 построить градиент в явном виде в том же пространстве и, тем самым, сделать процедуру минимизации внутренне замкнутой в отличие от непрерывного случая.

2. Задача распространения волн в обобщенной постановке

2.1. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для гиперболической системы уравнений относительно неизвестных функций $v(x, t)$, $u(x, t)$, описывающую распространение сейсмических волн в одномерной вертикально-неоднородной среде:

$$\begin{cases} v_t + v_x + z(x)u = 0, \\ u_t - u_x - z(x)v = 0, \end{cases} \quad 0 < x < T, \quad -T < t < T, \quad (2.1)$$

$$v(x, t) = u(x, t) = 0, \quad 0 < x < T, \quad -T < t < 0, \quad (2.2)$$

$$v(0, t) = \delta(t), \quad u(T, t) = 0, \quad -T < t < T. \quad (2.3)$$

Здесь пространственная переменная x – так называемая оптическая глубина или эйконал, связанная с физической глубиной y преобразованием $x(y) = \int_0^y a^{-1}(\xi) d\xi$, $a(y)$ – скорость распространения сейсмического сигнала в среде, t – физическое время; значение $x = 0$ соответствует дневной поверхности. Коэффициент $z(x) = -c'(x)/2c(x)$

характеризует отражающие свойства среды и определяется жесткостью среды $c(x(y)) = \rho(y)a(y)$, где $\rho(y)$ – ее плотность. Римановы инварианты системы (2.1) v , u описывают решения типа бегущих волн вниз ($x \rightarrow \infty$) и вверх, соответственно. На практике эти волны выделяются из полного поля смещений в результате селекции по скоростям исходного волнового поля. Систему (2.1) будем записывать также в виде

$$\mathcal{L}w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi \equiv (0, T) \times (-T, T), \quad \text{где}$$

$$\mathcal{L} \equiv E \frac{\partial}{\partial t} + B \frac{\partial}{\partial x} + C(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ -z & 0 \end{pmatrix}$$

– дифференциальный оператор системы, а $w = \{v(x, t), u(x, t)\}$ – вектор-функция (столбец).

Одной из основных задач как наземной сейсмологии так и ВСП является определение коэффициента $z(x)$ по полю рассеянных вверх волн, т. е. по данным

$$u(0, t) = f(t), \quad -T \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

где $f(t)$ – выделенная из полного поля смещений, зарегистрированного на дневной поверхности или на некоторой глубине (в последнем случае $x = 0$ – глубина точки наблюдения), сейсмическая трасса рассеянных вверх волн. Известно, см., например, [1], что в такой постановке непрерывный коэффициент $z(x)$ однозначно восстанавливается для $x \in [0, T/2]$. Однако не всегда рассматриваемый класс сред характеризуется непрерывным или кусочно-непрерывным коэффициентом. Если $z(x) \in L_2[0, T]$, то определение решения прямой задачи требует известного уточнения, а именно, введение понятия соответствующего обобщенного решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.3). Это обстоятельство является принципиальным, поскольку тем самым определяется класс функций $f(t)$, являющихся корректно определенными следами (в случае их существования) при $x = 0$ решения $u(x, t)$.

2.2. В п. 2.3 показано, что для соответствующим образом определенного обобщенного решения задачи (2.1)–(2.3) след решения $u^z(t) \equiv u(0, t)$, $t \in [0, T]$, принадлежит пространству $L_2[0, T]$, если $z(x) \in L_2[0, T]$. Предлагаемый подход к построению обобщенного решения отличается от использования слабых решений [2], являющихся, по сути, решением соответствующих задаче (2.1)–(2.3) эквивалентных

интегральных уравнений. Рассматриваемое в настоящей работе определение опирается на понимание обобщенного решения в смысле теории обобщенных функций [3-4].

Начнем с определения обобщенного решения системы (2.1). Введем пространство основных функций (вектор-функций) $\mathcal{D}(\Pi)$ с элементами $\omega(x, t) \in C^\infty(\Pi)$ такими, что $\omega(x, t)|_{\partial\Pi} = 0$, где $\partial\Pi$ – граница области Π и пространство $\mathcal{D}'(\Pi)$ обобщенных функций над ним. Введем также пространство основных функций $\mathcal{D}_{0,1}(\Pi) \equiv \{\omega(x, t) \mid \omega \in \dot{H}^{0,1}(\Pi)\}$ таких, что $\omega(x, t)|_{\partial\Pi} = 0$, и пространство $\mathcal{D}'_{0,1}(\Pi)$ обобщенных функций над ним. Под решением уравнения (2.1) будем понимать обобщенную функцию $\mathbf{w}(x, t) \in \mathcal{D}'_{0,1}(\Pi)$ такую, что для любой функции $\omega \in \mathcal{D}(\Pi)$ справедливо тождество $(\mathbf{w}, \mathcal{L}^*\omega) = 0$, или в развернутом виде

$$-(\mathbf{w}, \omega_t) - (\mathbf{w}, B\omega_x) - (\mathbf{w}, C(x)\omega) = 0,$$

где $\mathcal{L}^* = -\mathcal{L}$ – эрмитово сопряженный к \mathcal{L} оператор, а (\mathbf{w}, \cdot) обозначает соответствующий обобщенной функции \mathbf{w} линейный непрерывный над $\mathcal{D}_{0,1}(\Pi) \supset \mathcal{D}(\Pi)$ функционал. Так как $\mathcal{D}'_{0,1}(\Pi) \subset \mathcal{D}'(\Pi)$, то существование обобщенного решения не очевидно, если таковое существует в классе $z(x) \in C^\infty[0, T]$. Если решение существует, то, как нетрудно проверить, $\mathbf{w}(x, t) = 0$ при $t < 0$.

Определенное таким образом обобщенное решение невозможно использовать для решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.3), поскольку это решение не имеет следов на прямых $x = \text{const}$ и $t = \text{const}$. Воспользуемся тем [5], что для каждой обобщенной функции существует "порождающая" ее функция, а именно, положим $\mathbf{w}(x, t) \equiv D^{(0,1)}\mathbf{W}(x, t)$, где

$$D^{(0,1)} \equiv D_x^0 D_t^1 = D_t, \quad D_\xi^k \equiv \frac{\partial^k}{\partial \xi^k}, \quad \mathbf{W}(x, t) \in H^0(\Pi) \equiv L_2(\Pi).$$

При этом

$$(\mathbf{w}, \omega) \equiv -\langle \mathbf{W}, D_t \omega \rangle_{H^0(\Pi)} \equiv - \iint_{\Pi} \langle \mathbf{W}, D_t \omega \rangle_{\mathbb{R}^2} dx dt$$

для любой $\omega(x, t) \in \mathcal{D}_{0,1}(\Pi)$. Таким образом, построение обобщенного решения сводится к построению решения $\mathbf{W}(x, t) \in H^0(\Pi)$ соответствующей начально-краевой задачи для системы (2.1) со следами $\mathbf{W}(x, \cdot)$ и $\mathbf{W}(\cdot, t)$ из L_2 такого, что $\mathbf{W}(x, t) = 0$ при $t < 0$, после чего находится $\mathbf{w}(x, t) = D_t \mathbf{W}(x, t)$.

2.3. Рассмотрим в $\Pi_T \equiv \{(x, t) \in \Pi \mid 0 < t < T\}$ следующую "порождающую" задачу относительно $\mathbf{W}(x, t) \equiv \{V(x, t), U(x, t)\}$:

$$\begin{aligned} V_t + V_x + z(x)U &= 0, & U_t - U_x - z(x)V &= 0, \\ V(x, 0) = U(x, 0) &= 0, & V(0, t) = \theta(t), \quad U(T, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, т. е. $D_t\theta(t) = \delta(t)$. Эта задача, также как и исходная, не имеет классического решения. Однако можно определить ее обобщенное в смысле интегрального тождества решение, а именно, такую функцию $\mathbf{W}(x, t) \in H^0(\Pi_T)$ со следами $\mathbf{W}(x, \cdot)$ и $\mathbf{W}(\cdot, t)$ из $L_2[0, T]$, что для любой пробной функции $\omega(x, t) \equiv \{\varphi(x, t), \psi(x, t)\} \in C^1(\Pi_T)$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_T} [V(\varphi_t + \varphi_x) - z(x)U\varphi] dx dt + \oint_{\partial\Pi_T} V\varphi dx - V\varphi dt &= 0, \\ \iint_{\Pi_T} [U(\psi_t - \psi_x) + z(x)V\psi] dx dt + \oint_{\partial\Pi_T} U\psi dx + U\psi dt &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\partial\Pi_T$ – ориентированная в положительном направлении граница области Π_T , и $V(x, 0) = U(x, 0) = 0$, $V(0, t) = \theta(t)$, $U(T, t) = 0$, $0 < x, t < T$.

Введем вектор-функцию $\widehat{\mathbf{W}}(x, t) \equiv \{\widehat{V}(x, t), \widehat{U}(x, t)\}$ такую, что

$$V(x, t) = \theta(t - x) + \widehat{V}(x, t), \quad U(x, t) = \widehat{U}(x, t). \quad (2.7)$$

Поскольку $\widehat{V}(x, t) = \widehat{U}(x, t) = 0$ при $t < x$, то из (2.6) вытекает следующее тождество, справедливое в области $K_T \equiv \{(x, t) \in \Pi_T \mid t > x\}$ для любых $\varphi(x, t), \psi(x, t) \in C^1(\Pi_T)$:

$$\begin{aligned} \iint_{K_T} [\widehat{V}(\varphi_t + \varphi_x + z\psi) + \widehat{U}(\psi_t - \psi_x - z\varphi)] dx dt + \iint_{K_T} z\psi dx dt \\ - \int_0^T \widehat{U}(0, t)\psi(0, t) dt - \int_0^T [\widehat{V}(x, T)\varphi(x, T) + \widehat{U}(x, T)\psi(x, T)] dx = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Справедливы следующие утверждения об обобщенном решении задачи (2.5). Доказательства теорем приводятся в Приложении А.

Теорема 2.1. В $H^0(\Pi_T)$ существует единственное обобщенное решение $\mathbf{W}(x, t)$ задачи (2.5).

Теорема 2.2. *Обобщенное решение задачи (2.5) представимо в виде (2.7), где $\widehat{W}(x, t) \in H^{0,1}(\Pi_T)$ и $\widehat{W}_t(x, \cdot), \widehat{W}_t(\cdot, t) \in L_2[0, T]$.*

Из этих теорем вытекает

Следствие 2.3. *Обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3) существует, единственно и представимо в виде*

$$w(x, t) = \{\delta(t - x), 0\} + \widehat{w}(x, t),$$

где $\widehat{w}(x, t) \in H^0(\Pi)$ со следами $\widehat{w}(x, \cdot), \widehat{w}(\cdot, t)$ из $L_2[0, T]$.

Легко убедиться, что для обобщенного решения $w(x, t)$ задачи (2.1)–(2.3) справедливы тождества, аналогичные (2.6) и верные для любой пробной функции из $C^1(\Pi_T)$:

$$\iint_{\Pi_T} [\hat{v}(\varphi_t + \varphi_x) - z\hat{u}\varphi] dx dt + \oint_{\partial\Pi_T} \hat{v}\varphi dx - \hat{v}\varphi dt = 0, \quad (2.9_1)$$

$$\iint_{\Pi_T} [\hat{u}(\psi_t - \psi_x) + z\hat{v}\psi] dx dt + \oint_{\partial\Pi_T} \hat{u}\psi dx + \hat{u}\psi dt + \int_0^T z(x)\psi(x, x)dx = 0, \quad (2.9_2)$$

где $\hat{v}(x, 0) = \hat{u}(x, 0) = \hat{v}(0, t) = \hat{u}(T, t) = 0$ при $0 < x, t < T$.

Замечание 1. Как известно, см., например, [6], в случае, когда $z(x) \in C[0, T]$, для классического решения уравнения справедливо тождество, называемое интегралом энергии, которое запишем в виде

$$\oint_{\Gamma} [(|\hat{v}|^2 + |\hat{u}|^2)\dot{x}(l) - (|\hat{v}|^2 - |\hat{u}|^2)\dot{t}(l)] dl = 0, \quad (2.10)$$

где Γ – произвольный кусочно-гладкий контур из K_T с натуральной параметризацией $\{x(l), t(l)\}$. В п. А.3 установлена справедливость интеграла энергии для обобщенных в смысле тождеств (2.6) и (2.9) решений. Тождество (2.10) подразумевает также существование самого криволинейного интеграла.

Из (2.9) следует, что $2\hat{u}(x, x) = z(x)$, причем это равенство понимается как равенство элементов в $L_2[0, T]$ и подразумевает существование следа функции \hat{u} при $x = t$. Действительно, в силу (2.10) для любой области $\Omega \subseteq \Pi_T$ с кусочно-гладкой границей

$\partial\Omega \mid \dot{x} - t|\dot{v}^2, \mid \dot{x} - t|\dot{u}^2 \in L_1(\partial\Omega)$. Поэтому в (2.9) Π_T можно заменить на Ω (при этом отрезок интегрирования $[0, T]$ заменяется на множество $\{x \mid (x, x) \in \Omega \cup \partial\Omega\}$). Выбирая в (2.9₂) $\Omega = \{(x, t) \in \Pi_T \mid t < x\}$, получаем

$$\int_0^T z(x)\psi(x, x) dx = 2 \int_0^T \hat{u}(x, x)\psi(x, x) dx.$$

Отсюда в силу произвольности функции $\psi(x, x) \in C^1[0, T]$ следует искомое равенство.

Таким образом, $\widehat{w}(x, t)$ является обобщенным решением следующей смешанной задачи с условием на характеристике:

$$\begin{aligned} \hat{v}_t + \hat{v}_x + z(x)\hat{u} &= 0, & \hat{u}_t - \hat{u}_x - z(x)\hat{v} &= 0, & 0 < x < t < T, \\ \hat{v}(0, t) &= 0, & \hat{u}(t, t) &= z(t)/2, & 0 < t < T, \end{aligned}$$

что полностью соответствует случаю, когда $z(x) \in C[0, T]$

3. Обратная задача в обобщенной постановке

3.1. Из предыдущего рассмотрения следует, что в условии (2.4) корректно определенный след обобщенного решения $u^z(t)$, $t \in [0, T]$, задачи (2.1)-(2.3), соответствующий коэффициенту системы (2.1) $z(x)$ из $L_2[0, T]$, таков, что $u^z(t) \in L_2[0, T]$. Решением обратной задачи (2.1)-(2.4) назовем функцию $z(t) \in L_2[0, T]$ такую, что для следа решения соответствующей прямой задачи (2.1)-(2.3) справедливо равенство $u^z(t) = f(t)$, $t \in [0, T]$, понимаемое как равенство элементов в $L_2[0, T]$. Это определение можно переформулировать следующим образом:

$$z(x) = \arg \inf_{z \in L_2[0, T]} \int_0^T |u^z(t) - f(t)|^2 \mu(t) dt,$$

где $\mu(t) \in L_2[0, T]$ – произвольная весовая функция, удовлетворяющая аксиомам нормы. Если $f(t)$ не является корректно определенным следом решения, то это определение становится, вообще говоря, некорректным.

Как было отмечено в п. 2.1, вопрос о единственности восстановления $z(x)$ имеет смысл ставить лишь на отрезке $[0, T/2]$. Для обратных задач в классической и слабой постановках оценки условной устойчивости

получаются из соответствующих исходной прямой задаче интегральных уравнений типа Вольтерра. Покажем, что аналогичные оценки из $L_2[0, T] \ni u^z(t)$ в $L_2[0, T/2] \ni z(x)$ имеют место в обобщенной постановке.

Рассмотрим в области Π_T вспомогательную задачу, которую далее будем называть сопряженной к (2.1)-(2.3):

$$\begin{aligned} \varphi_t^n + \varphi_x^n + z_n(x)\psi^n &= 0, & \psi_t^n - \psi_x^n - z_n(x)\varphi^n &= 0, \\ \varphi^n(x, T) = \psi^n(x, T) = \varphi^n(T, t) &= 0, & \psi^n(0, t) = \theta_n(T - t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $z_n(x) \in C[0, T]$, $\theta_n(t) \in C^1[0, T]$, $\theta_n(0) = \theta_n'(0) = 0$. Для этой задачи справедлива следующая лемма, аналогичная теореме устойчивости в нормах пространств C из [7].

Лемма 3.1. *На множестве $\{z_j(x), \theta_j(t) \mid \|z_j\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_0, \|\theta_j\|_{L_2[0, T]} \leq c_1\}$ имеет место оценка*

$$\begin{aligned} & \|\varphi^m(x, t) - \varphi^n(x, t)\|_{H^{0,1}(\Delta(T))} + \|\varphi^m(0, t) - \varphi^n(0, t)\|_{H^1[0, T]} \\ & \leq c_2 \int_0^{T/2} \|z_m(x) - z_n(x)\|_{L_2[0, t]} dt + c_3 \|\theta_m(t) - \theta_n(t)\|_{H^1[0, T]}, \end{aligned}$$

где $\Delta(T) \equiv \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq T/2, x \leq t \leq T - x\}$, а c_2, c_3 зависят от c_0, c_1, T .

3.2. Получим оценку устойчивости для обратной задачи (2.1)-(2.4). По доказанному выше (см. (2.9)) для любых $\varphi(x, t), \psi(x, t) \in C^1(\Pi_T)$ справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned} & \iint_{K_T} [\hat{v}(\varphi_t + \varphi_x + z\psi) + \hat{u}(\psi_t - \psi_x - z\varphi)] dx dt + \int_0^T z(x)\psi(x, x) dx \\ & - \int_0^T \hat{u}(0, t)\psi(0, t) dt - \int_0^T [\hat{v}(x, T)\varphi(x, T) + \hat{u}(x, T)\psi(x, T)] dx = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Положим теперь в (2.1) и (3.2) $z(x) = z_m(x)$ и обозначим через $\{v^m, u^m\}$ решение прямой (2.1), а через $\{\varphi^{m,n}, \psi^{m,n}\}$ - решение сопряженной задачи (3.1). Тогда из (3.2) при $\|\theta_n - \theta\|_{L_2[0, T]} \rightarrow 0$, когда

$n \rightarrow \infty$, вытекает равенство

$$\int_0^{T/2} z_m(x) \psi^m(x, x) dx = \int_0^T \hat{u}^m(0, t) dt, \quad (3.3)$$

где $\psi^m(x, x) = \theta(T - x) + \widehat{V}^m(T - x, x)$. Дифференцируя (3.3) по T и устремляя $\|z_m - z\|_{L_2[0, T]}$ к нулю при $m \rightarrow \infty$, получаем для $z(x) \in L_2[0, T]$

$$z(T/2)/2 + \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{T/2} \widehat{V}(x, T - x) z(x) dx = \hat{u}(0, T), \quad (3.4)$$

причем $\partial \widehat{V}(x, T - x) / \partial T = \hat{v}(x, T - x)$ при $x < T$. Очевидно, что (3.4) остается верным при замене T на любое $t < T$.

Таким образом, для обобщенного решения справедливо равенство (3.4), известное для непрерывных коэффициентов, см. [7]. Заметим, что в силу Замечания 1 $\hat{v}(x, t - x) \in L_2[0, T]$ при $t = \text{const}$, и, тем самым, дифференцирование под знаком интеграла в (3.4) корректно, и справедливо равенство

$$z(T/2)/2 + \int_0^{T/2} \hat{v}(x, T - x) z(x) dx = \hat{u}(0, T), \quad (3.5)$$

Справедлива следующая теорема устойчивости обратной задачи.

Теорема 3.2. *Для задачи (2.1)-(2.3) при $\|z_j\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_0$ имеет место оценка*

$$\|z_m(x) - z_n(x)\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_1 \|u^{z_m}(t) - u^{z_n}(t)\|_{L_2[0, T]},$$

где c_1 зависит от c_0 и T .

Доказательство. Заметим, что искомую оценку достаточно доказать для функций $z_j \in C[0, T]$ при условии $\|z_j\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_0$. Действительно, если $\tilde{z}_j \in L_2[0, T]$, то из неравенства

$$\|\tilde{z}_m - \tilde{z}_n\|_{L_2[0, T/2]} \leq \|z_m - \tilde{z}_m\|_{L_2[0, T/2]} + \|z_n - \tilde{z}_n\|_{L_2[0, T/2]} + \|\tilde{z}_m - \tilde{z}_n\|_{L_2[0, T/2]}$$

и неравенства, вытекающего из оценки устойчивости прямой задачи, см. Лемму 3.1,

$$\|z_m - z_n\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_0 \|u^{z_m} - u^{z_n}\|_{L_2[0, T]} \leq c_0 \|u^{\tilde{z}_m} - u^{\tilde{z}_n}\|_{L_2[0, T]}$$

$$+ c_1 (\|z_m - \tilde{z}_m\|_{L_2[0, T/2]} + \|z_n - \tilde{z}_n\|_{L_2[0, T/2]})$$

следует, что, поскольку $C[0, T]$ всюду плотно в $L_2[0, T]$, то

$$\|\tilde{z}_m - \tilde{z}_n\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_0 \|u^{\tilde{z}_m} - u^{\tilde{z}_n}\|_{L_2[0, T]}.$$

Для разности $z_j(x)$, используя неравенства треугольника и Коши-Буняковского, с учетом ограниченности $\int_0^t |\hat{\nu}^j(x, 2t - x)|^2 dx$ в силу интегрального тождества (2.10), из (3.5) получаем

$$\begin{aligned} 1/3 \|z_m - z_n\|_{L_2[0, T/2]}^2 &\leq \int_0^{T/2} \int_0^t |z_m(x) - z_n(x)|^2 dx \int_0^{2t} |\hat{\nu}^n(x, 2t - x)|^2 dx dt \\ &+ \int_0^{T/2} \int_0^t |z_m(x)|^2 dx \int_0^{2t} |\hat{\nu}^m(x, 2t - x) - \hat{\nu}^n(x, 2t - x)|^2 dx dt \\ &+ \int_0^T |u^{z_m}(t) - u^{z_n}(t)|^2 dt \leq c_1 \int_0^{T/2} \int_0^t |z_m(x) - z_n(x)|^2 dx dt \\ &+ c_2 \iint_{\Delta(T)} |\hat{\nu}^m(x, 2t - x) - \hat{\nu}^n(x, 2t - x)|^2 dx dt + \int_0^T |u^{z_m}(t) - u^{z_n}(t)|^2 dt \\ &\leq c_3 \int_0^{T/2} \|z_m(x) - z_n(x)\|_{L_2[0, t]}^2 dt + \int_0^T |u^{z_m}(t) - u^{z_n}(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Из леммы Гронуолла об интегральном неравенстве [8] следует искомая оценка. \square

Следствие 3.3. Обратная задача (2.1)-(2.4) имеет не более одного решения $z(x) \in L_2[0, T]$ такого, что $\|z\|_{L_2[0, T]} = \min$.

3.3. Из Теоремы 3.2 вытекает важный факт о локальной разрешимости обратной задачи (2.1)-(2.4), состоящий в следующем. Пусть $f(t) \in L_2[0, T]$ - корректно определенный след прямой задачи (2.1)-(2.3), т. е. $f(t) = u^z(t)$. Рассмотрим в $L_2[0, T]$ окрестность $f(t)$ такую, что $\|f_\varepsilon - f\|_{L_2[0, T]} \leq \varepsilon$. При достаточно малом ε выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости обратной задачи в терминах

однозначной разрешимости интегрального уравнения Гельфанда-Левитана

$$\Lambda(x, t) + \int_{-x}^x \Lambda(x, \tau) f(|t - \tau|) d\tau + f(t + x) = 0, \quad |t| \leq x \leq T/2. \quad (3.6)$$

Справедлива следующая теорема, аналогичная теореме из [7]. Доказательство теорем совпадает почти дословно.

Теорема 3.4. *Для существования в $L_2[0, T/2]$ единственного решения $z(x)$ обратной задачи (2.1)-(2.4) необходимо и достаточно, чтобы $f(t) \in L_2[0, T]$, и чтобы для любого $x \in [0, T/2]$ существовало единственное решение $\Lambda(x, \cdot) \in L_2[0, T/2]$ уравнения (3.6).*

Так как согласно Теореме 3.4 обратная задача разрешима, то из Теоремы 3.2 вытекает, что $\|z_\varepsilon - z\|_{L_2[0, T/2]} \leq c_0 \varepsilon$. Разумеется, что эта оценка верна равномерно по z_ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало. Отсюда следует, что при достаточно малом ε

$$J_* = \min_{z \in L_2[0, T]} J(z) = 0, \quad \text{где } J(z) \equiv 1/2 \int_0^T |u^z(t) - f_\varepsilon(t)|^2 \mu(t) dt,$$

и минимизирующий элемент $z_\varepsilon(x)$ близок к точному решению обратной задачи $z(x)$ на отрезке $[0, T/2]$ в норме L_2 .

Следует также отметить, что в случае непрерывного коэффициента $z(x)$ имеет место формула $z(x) = -2\Lambda(x, x)$. В случае, если $z(x) \in L_2[0, T]$, эта формула также справедлива и понимается как равенство элементов в пространстве $L_2[0, T/2]$.

4. Решение обратной задачи методом регуляризации

4.1. Доказанные выше утверждения о структуре обобщенного решения позволяют построить итерационный метод спуска на основе вычисления градиента функционала $J(z)$. Найдем приращение $\Delta J(z)$, соответствующее приращению $\Delta z(x) \in L_2[0, T]$, т. е.

$$\Delta J(z) = \int_0^T (u^z(t) - f_\varepsilon(t)) \Delta u^z(t) \mu(t) dt + o(\|\Delta u^z\|_{L_2[0, T]})$$

$$= \int_0^{T/2} J'_z(x) \Delta z(x) dx + o(\|\Delta z\|_{L_2[0, T/2]}).$$

Рассмотрим сопряженную задачу (3.1), в которой изменено одно краевое условие, а именно,

$$\psi^n(0, t) = \mu(t)(u^{zn}(t) - f_n(t)), \quad \psi^n(t) \in C^1[0, T], \quad \psi^n(0, T) = 0,$$

где $\|f_n - f_\varepsilon\|_{L_2[0, T]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из тождества (3.2) следует, что

$$\iint_{\Pi_T} [\hat{v}\psi^n - \hat{u}\varphi^n] \Delta z dx dt + \int_0^{T/2} \psi^n(x, x) \Delta z(x) dx = \int_0^T \psi^n(0, t) \Delta u^z(t) dt,$$

откуда, после перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} J'_z(x) &= \psi(x, x) + \int_0^T [\hat{v}(x, t)\psi(x, t) - \hat{u}(x, t)\varphi(x, t)] dt \\ &= \int_0^T [v(x, t)\psi(x, t) - u(x, t)\varphi(x, t)] dt, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\{\varphi, \psi\}$ – обобщенное решение сопряженной задачи (3.1) с краевым условием $\psi(0, t) = g_\varepsilon(t) \equiv \mu(t)(u^z(t) - f_\varepsilon(t))$.

Преобразуем выражение (4.1) для $J'_z(x)$. В силу принципа суперпозиции

$$\psi(x, T-t) = \{v(x, \tau) * g_\varepsilon(T-\tau)\}_t, \quad \varphi(x, T-t) = \{u(x, \tau) * g_\varepsilon(T-\tau)\}_t,$$

где $a(t) = \{b(\tau) * c(\tau)\}_t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} b(t-\tau)c(\tau) d\tau$ – свертка функций $b(\tau)$ и $c(\tau)$ по аргументу τ с внешней переменной t . Отсюда в терминах преобразования Фурье (для функции $f(t)$ $F_\omega[f] = \int_0^T f(t)e^{-i\omega t} dt$) получаем

$$\begin{aligned} J'_z(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (F_\omega[v(x, \cdot)]F_\omega^*[\psi(x, \cdot)] - F_\omega[u(x, \cdot)]F_\omega^*[\varphi(x, \cdot)]) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (F_\omega^2[v(x, \cdot)] - F_\omega^2[u(x, \cdot)]) F_\omega^*[g_\varepsilon] d\omega, \end{aligned}$$

где * – знак комплексного сопряжения. Для преобразов Фурье имеем

$$J'_2(x) = g_\varepsilon(2x) + \int_{2x}^T K(x, t)g_\varepsilon(t) dt, \quad 0 < x < T/2, \quad (4.2)$$

где

$$K(x, t) = 2\hat{v}(x, t-x) + \int_x^{t-x} [\hat{v}(x, \tau)\hat{v}(x, t-\tau) - \hat{u}(x, \tau)\hat{u}(x, t-\tau)] d\tau.$$

Поскольку выражение (4.2) определяет оператор Вольтерра II рода относительно функции $g_\varepsilon(2x)$, то из этого следует важное утверждение о свойствах функционала $J(z)$.

Теорема 4.1. Пусть обратная задача (2.1)-(2.4) разрешима, т. е. $J_* = 0$. При этом $J'_2(x) = 0$ в $L_2[0, T/2]$ тогда и только тогда, когда $z(x)$ есть решение обратной задачи.

4.2. Подобное рассмотрение обратной задачи возможно и в том случае, когда источник в краевом условии (2.3) имеет вид $v(0, t) = s(t)$, $s(t) \in L_2[0, T]$. В сейсморазведке, как правило, используются импульсные источники сравнительно малой длительности, удовлетворяющие последнему условию. Задача минимизации функционала $J(z)$ в $L_2[0, T/2]$ в этом случае является некорректной, поскольку точка минимума может не существовать, а в случае существования определяться неустойчиво.

Рассмотрим вариант метода регуляризации А. Н. Тихонова [9] для решения операторных уравнений с нелинейным оператором, переводящим слабо сходящиеся последовательности в сходящиеся. Для задачи (2.1)-(2.3) при $v(0, t) = s(t)$ таким оператором является оператор $A : L_2[0, T/2] \rightarrow L_2[0, T]$, определяемый равенством

$$A[z(x)] = u^z(t).$$

При этом функционал Тихонова имеет вид

$$M^\alpha(z) = J(z) + \alpha/2 \|z\|_{L_2[0, T/2]}^2. \quad (4.3)$$

Из Теорем 2.2.3-2.2.4 [10] вытекает

Следствие 4.2. Функционал $M^\alpha(z)$ достигает в $L_2[0, T/2]$ своей точной нижней грани.

Если $\{z_*\}$ – множество точек минимума функционала M^α , то каждая из них является слабым приближенным решением обратной задачи (2.1)–(2.4) при соответствующем согласовании параметров α и ε . При этом для функции $c_*(x) = c(0) \exp\{-2 \int_0^x z_*(\xi) d\xi\}$, являющейся наиболее важной при интерпретации исходных данных, уже имеет место сходимость к точному решению в норме $L_2[0, T/2]$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для решения обратной задачи может быть использована априорная информация об искомом решении вида $\|z\|_{L_2[0, T/2]} \leq R$ или $\|z\|_{C[0, T/2]} \leq R$. Соответствующие множества являются слабыми компактами в пространстве $L_2[0, T/2]$, что позволяет построить слабые квазирешения z_* как решения вариационной задачи

$$z_* = \arg \min_{\|z\| \leq R} J(z),$$

при этом существование точки минимума следует из приведенных при обосновании Следствия 4.1 рассуждений. Заметим, что в силу природы рассматриваемой задачи (2.1)–(2.3) не представляется возможным делать более сильные предположения о функции $z(x)$ такие как монотонность, выпуклость, дифференцируемость или ограниченность в соответствующих множествах.

4.3. Для практического решения обратной задачи (2.1)–(2.4) был выбран способ итеративной регуляризации метода проекции градиента [11] для вариационной задачи

$$z_* = \arg \min_{Z_R} J(z), \quad Z_R \equiv \{z \in L_2[0, T/2] \mid |z| \leq R\}.$$

Решение этой задачи строится итерационно по следующему правилу:

$$z_{k+1} = P_{Z_R}(z_k - \rho_k(J'_{z_k} + \alpha_k z_k)),$$

где P_{Z_R} – проектор на множество Z_R , а последовательности α_k, ρ_k таковы, что $\alpha_k, \rho_k, \rho_k/\alpha_k \rightarrow 0$ и $|\alpha_{k+1} - \alpha_k| \alpha_k^{-2} \rho_k^{-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Например, $\alpha_k = k^{-1/3}, \rho_k = k^{-1/2}$, см. [11]. Проектор P_{Z_R} реализуется в виде срезки, т. е. $P_{Z_R} z(x) = \operatorname{sgn} z(x) \min\{|z(x)|, R\}$.

Для вычисления $J'_z(x)$ используется приближенная формула, следующая из (4.2):

$$J'_z(x) \approx g_\varepsilon(2x) + \int_{2x}^T [2\hat{v}(x, t-x) - \{\hat{u}(x, \tau) * \hat{u}(x, \tau)\}_t] g_\varepsilon(t) dt, \quad 0 < 2x < T,$$

учитывающая члены до второго порядка по степеням z . Кроме того, в $L_2(K_T)$ имеют место следующие приближенные равенства с точностью до членов первого и второго порядка по степеням z , соответственно,

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, t) &\approx \bar{u}(x, t) \equiv z((t+x)/2)/2, \\ \hat{v}(x, t) &\approx \bar{v}(x, t) \equiv - \int_0^x z(\xi) z(\xi + (t-x)/2)/2 d\xi,\end{aligned}$$

или, в терминах преобразования Фурье,

$$\begin{aligned}F_\omega[\bar{u}(x, \cdot)] &= e^{i\omega x} \int_x^{T/2} z(\xi) e^{-2i\omega\xi} d\xi, \\ F_\omega[\bar{v}(x, \cdot)] &= -e^{-i\omega x} \int_0^x z(\xi) e^{2i\omega\xi} \int_\xi^{T/2} z(\zeta) e^{-2i\omega\zeta} d\zeta d\xi.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Таким образом, для мгновенного источника $v(0, t) = \delta(t)$ в терминах преобразования Фурье получаем следующую формулу для вычисления приближенного значения $\tilde{J}'_z(x)$ градиента функционала $J(x)$:

$$\tilde{J}'_z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2i\omega x} + 2e^{-i\omega x} F_\omega[\bar{v}(x, \cdot)] - F_\omega^2[\bar{u}(x, \cdot)]) F_\omega^*[g_\varepsilon] d\omega.$$

Для распределенного граничного источника $v(0, t) = s(t)$ при вычислении $\tilde{J}'_z(x)$ используется следующая формула ($\mu = 1$):

$$\begin{aligned}\tilde{J}'_z(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2i\omega x} + 2e^{-i\omega x} F_\omega[\bar{v}(x, \cdot)] - F_\omega^2[\bar{u}(x, \cdot)]) \\ &\quad \times (F_\omega^*[s] F_{2\omega}^*[z] - F_\omega^*[f_\varepsilon]) F_\omega[s] d\omega,\end{aligned}$$

где $F_\omega[\bar{u}(x, \cdot)]$ и $F_\omega[\bar{v}(x, \cdot)]$ определяются с помощью одномерного и двумерного преобразования Фурье по формулам (4.4). На практике все фурье-образы вычисляются с помощью алгоритма БПФ (быстрого преобразования Фурье), см. п. А.4.

5. Результаты численного моделирования

5.1. Целью проведенного моделирования является исследование возможностей построенного алгоритма решения обратной задачи ВСП.

При этом рассматриваются как типичные для геофизических моделей классы искомым коэффициентов отражения, так и типы источников. К их числу относятся коэффициенты отражения, соответствующие слоисто-однородным (или близким к ним), либо градиентным средам. В качестве источников взяты мгновенный импульс, т. е. дельта-функция, либо финитный импульс сравнительно малой длительности.

Расчеты проводились на отрезке $[0, T]$ при $T = 1$. Количество интервалов разбиения постоянной длины равнялось 500. Во всех расчетах начальное приближение $z_0(x) = 0$, $x \in [0, T/2]$. Исходные значения коэффициента $z(x)$ и соответствующего ему следа решения $u^z(t) = f(t)$ изображены на графиках серым цветом, восстановленные – черным. Графики смещены по вертикали для удобства их сопоставления (реально базовые линии совпадают).

На Рис. 1. а представлен модельный коэффициент

$$z(x) = 10x(1 - x^2) \sin(100x) \cos(50x) \sin(20x)(1 - \cos(100x)),$$

источник $s(t) = \delta(t)$. Исходное значение невязки $J(z_0) = 0.0626$. Представленный результат получен за 15 итераций, $J(z_{15}) = 2.036 \cdot 10^{-7}$.

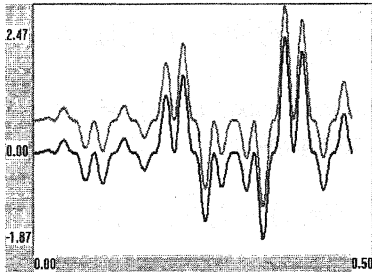


Рис. 1. а

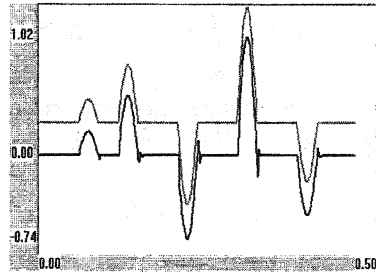


Рис. 1. б

На Рис. 1. б представлена модель и результат ее восстановления наиболее типичные для слоистой структуры геологического разреза, $J(z_0) = 7.9 \cdot 10^{-3}$, число итераций равно 4, достигнутое значение невязки при этом $J(z_4) = 6.2 \cdot 10^{-5}$.

При моделировании реальных сейсмических источников в разведочной геофизике часто используется импульс Берлаге

$$s(t) = A_0 t^\alpha \exp\{-\beta t\} \sin \omega_0 t,$$

изображенный на Рис. 2.а. при $A_0 = 10$, $\alpha = 1$, $\beta = 50$, $\omega_0 = 100$.

В качестве коэффициента отражения взята функция $z(x) \in L_2[0, 1/2]$, представленная на Рис. 2.б. Исходное значение невязки $J(z_0) = 1.04 \cdot 10^{-7}$, число итераций равно 50, $J(z_{50}) = 2.32 \cdot 10^{-12}$.

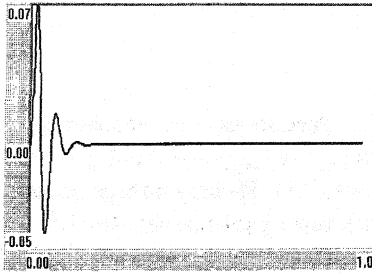


Рис. 2. а

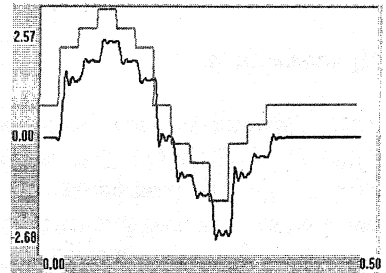


Рис. 2. б

В ряде вычислительных экспериментов модельный коэффициент $z(x)$ не задавался, а расчеты производились в рамках решения задачи синтеза, т. е. определялись параметры среды, соответствующей заданному рассеянному полю в условиях выполнения закона сохранения энергии. Как известно, необходимое и достаточное условие разрешимости обратной задачи рассеяния является выражением закона сохранения энергии, поэтому поставленная задача синтеза разрешима. При этом ставилась цель получить рассеянный сигнал амплитуды большей, чем у источника, в качестве которого задана функция $\theta(t)$.

На Рис. 3.а показано заданное поле рассеянных волн (серым цветом) с амплитудами 2 и 3, и поле (черным цветом), соответствующее синтезированному коэффициенту отражения, изображенному на Рис. 3.б.

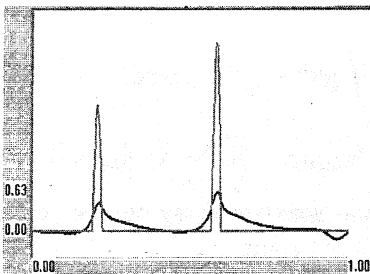


Рис. 3. а

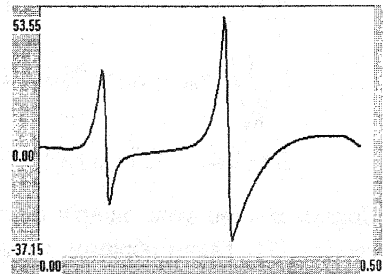


Рис. 3. б

Надо отметить, что попытка осуществить описанный процесс нелинейной перегруппировки энергии оказалась неудачной. Амплитуда поля, рассеянного синтезированной средой всегда оказывалась меньше амплитуды источника, которая в данном случае равна 1.

Приложение А

А.1. Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим последовательность $z_j(x) \in C[0, T]$, $|z_j(x)| \leq c_0$, такую, что $\|z_j - z\|_{L_2[0, T]} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, где $z(x) \in L_2[0, T]$ – коэффициент уравнения (2.1). Из результатов работы [7] следует, что для коэффициентов z_j существует решение задачи (2.5) такое, что в представлении (2.7) $\widehat{V}^j(x, t), \widehat{U}^j(x, t) \in C^1(\Pi_T \setminus \{x \neq t\}) \cap C(\Pi_T)$, причем $\widehat{V}^j(x, t) = \widehat{U}^j(x, t) = 0$ при $t < x$.

Для номеров $j = m, n$ рассмотрим в Π^T две сопряженные задачи

$$\begin{aligned} \varphi_t^j + \varphi_x^j + z_j(x)\psi^j &= \widehat{V}^m - \widehat{V}^n, & \psi_t^j - \psi_x^j - z_j(x)\varphi^j &= \widehat{U}^m - \widehat{U}^n, \\ \varphi^j(x, T) = \psi^j(x, T) &= 0, & \psi^j(0, t) = \varphi^n(T, t) &= 0, & 0 < x, t < T. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi^j(x, t), \psi^j(x, t) \in C^1(\Pi_T)$. При этом из тождества (2.8) имеем

$$\iint_{K_T} (|\widehat{V}^m - \widehat{V}^n|^2 + |\widehat{U}^m - \widehat{U}^n|^2) dx dt + \iint_{K_T} (z_m \psi^m - z_n \psi^n) dx dt = 0. \quad (\text{A.1})$$

Для последнего интеграла справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{K_T} (z_m \psi^m - z_n \psi^n) dx dt \right| \\ & \leq \iint_{K_T} |z_m - z_n| |\psi^m| dx dt + \iint_{K_T} |\psi^m - \psi^n| |z_n| dx dt \\ & \leq c_1 \|z_m - z_n\|_{L_2[0, T]} (\|\widehat{V}^m - \widehat{V}^n\|_{L_2(\Pi_T)} + \|\widehat{U}^m - \widehat{U}^n\|_{L_2(\Pi_T)}). \end{aligned}$$

Доказательство этой оценки аналогично доказательству оценок устойчивости в [7]. Таким образом, из (A.1) следует, что

$$\|\widehat{V}^m - \widehat{V}^n\|_{L_2(\Pi_T)} + \|\widehat{U}^m - \widehat{U}^n\|_{L_2(\Pi_T)} \leq c_2 \|z_m - z_n\|_{L_2[0, T]},$$

и, тем самым, последовательность $\{\widehat{V}^n, \widehat{U}^n\}$ является фундаментальной в $L_2(\Pi_T)$, т. е. при $n \rightarrow \infty$ существует ее предел $\{\widehat{V}, \widehat{U}\} \in L_2(\Pi_T)$.

Существование следов, так же как и единственность решения, непосредственно вытекает из интеграла энергии, доказательство которого приведено в п. А.3.

Докажем единственность обобщенного решения. Рассмотрим обобщенное решение задачи (2.5) при $V(0, t) = 0$. Выбирая в качестве Γ контур $\partial\Omega$, где $\Omega = (0, T) \times (0, t)$, $t < T$, получаем

$$\begin{aligned} & - \oint_{\partial\Omega} (|V|^2 + |U|^2) dx + (|V|^2 - |U|^2) dt \\ & = \int_0^T (|V(x, t)|^2 + |U(x, t)|^2) dx + \int_0^T (|V(T, t)|^2 + |U(0, t)|^2) dt = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\widehat{W}(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \Pi_T$. \square

А.2. Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим для последовательностей $\widehat{V}^j, \widehat{U}^j$, введенных в п. А.1, функции $\hat{v}^j(x, t) = D_t \widehat{V}^j$, $\hat{u}^j(x, t) = D_t \widehat{U}^j$. При этом $\{\hat{v}^j, \hat{u}^j\} \in C(\Pi_T \setminus \{t = x\})$, и при любом j для любых функций $\varphi(x, t), \psi(x, t) \in C^1(\Pi_T)$ справедливо тождество (3.2).

Для номеров $j = m, n$ рассмотрим в Π_T две сопряженные задачи

$$\begin{aligned} \varphi_t^j + \varphi_x^j + z_j(x)\psi^j &= \hat{v}^m - \hat{v}^n, & \psi_t^j - \psi_x^j - z_j(x)\varphi^j &= \hat{u}^m - \hat{u}^n, \\ \varphi^j(x, T) = \psi^j(x, T) &= 0, & \psi^j(0, t) = \varphi^j(T, t) &= 0, & 0 \leq x, t \leq T. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi^j(x, t), \psi^j(x, t) \in C^1(\Pi_T)$, и $\hat{v}(x, t) = \hat{u}(x, t) = 0$ при $t < x$, то из тождества (3.2) имеем

$$\iint_{K_T} (|\hat{v}^m - \hat{v}^n|^2 + |\hat{u}^m - \hat{u}^n|^2) dx dt + \int_0^T (z_m \psi^m(x, x) - z_n \psi^n(x, x)) dx = 0. \quad (\text{A.2})$$

Для последнего интеграла справедлива (см. п. А.1) оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (z_m(x)\psi^m(x, x) - z_n(x)\psi^n(x, x)) dx \right| \\ & \leq \int_0^T |z_m - z_n| |\psi^m(x, x)| dx + \int_0^T |\psi^m(x, x) - \psi^n(x, x)| |z_n| dx \end{aligned}$$

$$\leq c_1 \|z_m - z_n\|_{L_2[0,T]} (\|\hat{v}^m - \hat{v}^n\|_{L_2(\Pi_T)} + \|\hat{u}^m - \hat{u}^n\|_{L_2(\Pi_T)}).$$

Таким образом, из (A.2) следует, что

$$\|\hat{v}^m - \hat{v}^n\|_{L_2(\Pi_T)} + \|\hat{u}^m - \hat{u}^n\|_{L_2(\Pi_T)} \leq c_2 \|z_m - z_n\|_{L_2[0,T]},$$

откуда вытекает, что $\{\hat{v}(x, t), \hat{u}(x, t)\} \in L_2(\Pi_T)$.

Единственность решения и существование соответствующих следов устанавливается аналогично п. A.1. \square

A.3. Интеграл энергии. Для классического решения $\mathbf{W}(x, t) = \{V, U\}$ системы $\mathcal{L}\mathbf{W} = \mathbf{F}(x, t)$ при $z(x) \in C[0, T]$ справедливо следующее интегральное тождество, называемое интегралом энергии [8]:

$$\oint_{\Gamma} (|V|^2 + |U|^2) dx - (|V|^2 - |U|^2) dt = -2 \iint_{\Omega} (\mathbf{W}, \mathbf{F}) dx dt. \quad (\text{A.3})$$

Оно выполняется для любой области $\Omega \subseteq \Pi_T$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ , причем интегралы понимаются в смысле Римана.

Докажем, что интеграл энергии справедлив также для любого обобщенного в смысле интегральных тождеств (2.6) решения. Поскольку при этом следы решения понимаются как элементы пространства функций, интегрируемых по Лебегу, то следует определить, в каком смысле понимается тождество (A.3).

Пусть Γ – кусочно-гладкий положительно ориентированный контур с натуральной параметризацией $\{x(l), t(l)\}$, $l \in [0, P]$. Потребуем, чтобы функция $\dot{x}^2(l) - \dot{t}^2(l)$ имела конечное число интервалов знакоопределенности (P_k, P_{k+1}) , вне которых $\dot{x}^2(l) - \dot{t}^2(l) = 0$. Тогда справедливо тождество, которое назовем интегралом энергии для обобщенных решений

$$\oint_{\Gamma} ((\dot{x} - \dot{t})|V|^2 + (\dot{x} + \dot{t})|U|^2) dl = -2 \iint_{\Omega} (\mathbf{W}, \mathbf{F}) dx dt, \quad (\text{A.4})$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{V^j, U^j\}$ классических решений задачи (2.5) с коэффициентом $z_j(x) \in C[0, T]$ и краевым условием $V^j(0, t) = \theta_j(t)$, $\theta_j(t) \in C^1[0, T]$, $\theta_j(0) = \theta_j'(0) = 0$. Тогда для разности решений при $j = m, n$ имеем

$$\partial_t(\Delta V)^2 + \partial_x(\Delta V)^2 = -2(U^n \Delta z + z_m \Delta U) \Delta V,$$

где через Δf для краткости записи далее обозначаем разность функций f_m и f_n .

Из формулы Грина получаем

$$\oint_{\Gamma} |\Delta V|^2 dx - |\Delta V|^2 dt = 2 \iint_{\Omega} (U^n \Delta z + z_m \Delta U) \Delta V dx dt = 2I.$$

Для последнего интеграла справедлива оценка

$$|I| \leq \int_0^T |\Delta z(x)| \left\{ \int_x^T |\Delta V(x, t)|^2 dt \int_x^T |U^n(x, t)|^2 dt \right\}^{1/2} dx \\ + \int_0^T |z_m(x)| \left\{ \int_x^T |\Delta V(x, t)|^2 dt \int_x^T |\Delta U(x, t)|^2 dt \right\}^{1/2} dx.$$

Из (2.5) после интегрирования вдоль соответствующих характеристик вытекают следующие неравенства:

$$\int_x^T |\Delta V(x, t)|^2 dt \leq \int_x^T \left\{ \Delta \theta(t - x) \right. \\ \left. + \int_0^x (U^n(\xi, t - x + \xi) \Delta z(\xi) + z_m(\xi) \Delta U(\xi, t - x + \xi)) d\xi \right\}^2 dt \\ \leq 3 \int_x^T \left\{ |\Delta \theta(t - x)|^2 + \int_0^x |U^n(\xi, t - x + \xi)|^2 d\xi \int_0^T |\Delta z(\xi)|^2 d\xi \right. \\ \left. + \int_0^x |z_m(\xi)|^2 d\xi \int_0^T |\Delta U(\xi, t - x + \xi)|^2 d\xi \right\} dt \\ \leq 3 (\|\Delta \theta\|_{L_2[0, T]}^2 + \|U^n\|_{L_2(\Pi_T)}^2 \|\Delta z\|_{L_2[0, T]}^2 + \|z_m\|_{L_2[0, T]}^2 \|\Delta U\|_{L_2(\Pi_T)}^2)$$

и, аналогично,

$$\int_x^T |\Delta U(x, t)|^2 dt \leq \int_x^T \left\{ \int_x^{(x+t)/2} (V^n(\xi, t + x - \xi) \Delta z(\xi) \right. \\ \left. + \Delta V(\xi, t + x - \xi) z_m(\xi)) d\xi \right\}^2 dt$$

$$\leq 2(\|V^n\|_{L_2(\Pi_T)}^2 \|\Delta z\|_{L_2[0,T]}^2 + \|z_m\|_{L_2[0,T]}^2 \|\Delta V\|_{L_2(\Pi_T)}^2).$$

Окончательно, с учетом оценки устойчивости из Леммы 3.1, получаем

$$|I| \leq c_0 \|\Delta \theta\|_{L_2[0,T]}^2 + c_1 \|\Delta z\|_{L_2[0,T]}^2,$$

причем оценка равномерна на множестве $\theta_j \in C[0, T]$, $z_j \in C[0, T]$, таких, что $\|\theta_j\|_{L_2[0,T]} \leq c_2$ и $\|z_j\|_{L_2[0,T]} \leq c_3$.

Пусть теперь $\theta_j \xrightarrow{L_2} \theta \in L_2[0, T]$ и $z_j \xrightarrow{L_2} z \in L_2[0, T]$. Тогда

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} |V^m - V^n|^2 dx - |V^m - V^n|^2 dt = 0. \quad (\text{A.5})$$

Возьмем теперь в качестве Γ треугольный контур со сторонами, лежащими на прямых $t = x + \eta$, $t = \tau$ и $x = 0$. Тогда получаем, что $\|V_m(\cdot, \tau) - V_n(\cdot, \tau)\|_{L_2[0,T]} \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$, и, в силу полноты пространства $L_2[0, T]$, для любого фиксированного $\tau \in [0, T]$ существует след $V(\cdot, \tau) \in L_2[0, T]$.

Далее, выберем в качестве Γ треугольный контур со сторонами, лежащими на прямых $t = x + \eta$, $t = \tau$ и $x = \xi$. Аналогично доказывается, что для любого фиксированного $\xi \in [0, T]$ определен след $V(\xi, \cdot) \in L_2[0, T]$. Таким же образом доказывается существование следа $V(x, t - x) \in L_2[0, t]$ при любом фиксированном $t \in [0, T]$.

Пусть теперь γ_k — гладкий кусок исходного контура Γ , такой, что $\dot{x}(l) - \dot{t}(l) > 0$, $l \in (P_k, P_{k+1})$. Нетрудно убедиться, что γ_k дополняется до замкнутого контура Γ_k двумя прямыми с уравнением $dt = dx$ и прямой $dt = -dx$. При этом из (A.5) имеем

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_k} |V^m - V^n|^2 dx - |V^m - V^n|^2 dt = 0.$$

Следовательно, по доказанному выше,

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_k} |V^m - V^n|^2 dx - |V^m - V^n|^2 dt = 0.$$

В силу полноты пространства L_1 существует след $|\dot{x}(l) - \dot{t}(l)| |V(l)|^2 \in L_1[P_k, P_{k+1}]$.

Аналогично рассматривается случай $\dot{x}(l) - \dot{t}(l) < 0$. В силу конечного числа кусков γ_k контура Γ таких, что $|\dot{x}(l) - \dot{t}(l)| > 0$, заключаем, что $|\dot{x}(l) - \dot{t}(l)| |V(l)|^2 \in L_1[0, P]$. В результате получаем, что

$|\dot{x}(l) - \dot{t}(l)| |V^j(l)|^2 \rightarrow |\dot{x}(l) - \dot{t}(l)| |V(l)|^2$ в пространстве $L_1[0, P]$ при $j \rightarrow \infty$.

Повторяя проведенное рассмотрение, докажем, что определен след $|\dot{x}(l) + \dot{t}(l)| |U(l)|^2 \in L_1[0, P]$, и $|\dot{x}(l) + \dot{t}(l)| |U^j(l)|^2 \rightarrow |\dot{x}(l) + \dot{t}(l)| |U(l)|^2$ в $L_1[0, P]$ при $j \rightarrow \infty$, что и доказывает тождество (А.4).

Аналогично доказывается интегральное тождество (2.10). \square

А.4. Приближение Борна. Нередко требуется решить обратную задачу в борновском, т. е. линейном, приближении, что соответствует интерпретации сейсмической трассы $f(t)$ как однократно рассеянного поля. В этом случае выражение для градиента $J'(z)$ существенно упрощается. Так, для мгновенного источника $v(0, t) = \delta(t)$ в терминах преобразования Фурье получаем следующую формулу для вычисления приближенного значения $\tilde{J}'_z(x)$ градиента функционала $J(x)$:

$$\tilde{J}'_z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega x} F_{\omega}^* [\mu(t)(z(t/2) - f_{\varepsilon}(t))] d\omega.$$

Для распределенного граничного источника $v(0, t) = s(t)$ при вычислении $\tilde{J}'_z(x)$ используется следующая формула ($\mu = 1$):

$$\tilde{J}'_z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega x} (F_{\omega}^* [s] F_{2\omega}^* [z] - F_{\omega}^* [f_{\varepsilon}]) F_{\omega} [s] d\omega.$$

На практике все фурье-образы вычисляются с помощью алгоритма БПФ $\Phi_{x \rightarrow y}^N [f(x)] : f(x) \rightarrow F_y [f(x)]$ для функций, заданных в N точках. При этом последняя формула приобретает вид

$$\tilde{J}'_z(x) = \Phi_{\omega \rightarrow 2x}^N ig(\Phi_{t \rightarrow -\omega}^N [s] \Phi_{t \rightarrow -2\omega}^N [z [\Phi_{t \rightarrow \omega}^N [s]] - \Phi_{t \rightarrow -\omega}^N [f_{\varepsilon}]]).$$

Литература

1. Благовещенский А. С. Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн. *Проблемы матем. физики*. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1966. С. 68-81.
2. Iskakov K. T., Kabanikhin S. I. The solution of one dimensional inverse problem of geoelectrics by the method of conjugate gradients. *Russian Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 1991. 3. P. 78-88.

3. Соболев С. Л. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966.
4. Schwartz L. *Theorie des Distributions, I-II*. Paris: Hermann Cie, 1950-1951.
5. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964.
6. Годунов С. К. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1971.
7. Баев А. В. Об одном методе решения обратной задачи рассеяния для волнового уравнения. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1988. **28**, 1. С. 25-33.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 1978.
9. Тихонов А. Н. О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода. *Докл. АН СССР*. 1964. **156**, 6. С. 1296-1299.
10. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
11. Васильев Ф. П. *Методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1981.