

П.С. Белкин, В.И. Дмитриев

О КВАЗИОДНОМЕРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ  
ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ\*

Обратная двумерная задача магнитотеллурического зондирования состоит в определении распределения электропроводности  $\sigma(y, z)$  в Земле ( $z > 0$ ) по известному на земной поверхности ( $z = 0$ ) импедансу  $Z(y, \omega) = E_x / H_y$ , в зависимости от частоты  $\omega$  электромагнитного поля и от координаты точки измерения  $y$ . Прямая задача состоит в определении электрического поля  $E_x(y, z)$  и магнитного поля  $H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}$ , а, следовательно, импеданса  $Z(y, \omega)$  при известном распределении электропроводности  $\sigma(y, z)$  и падающей на Землю плоской волны

$$E_x^0(z) = E_0 e^{ik_0 z} \quad \text{при } z < 0. \quad (1)$$

Математически прямая задача формулируется следующим образом. Найти дважды непрерывно дифференцируемую в области непрерывности электропроводности функцию  $E_x(y, z)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta E_x + k^2(y, z) E_x = 0, \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma(y, z)}{2}}, \quad (2)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость. На границах разрыва функции  $\sigma(y, z)$  выполняются условия непрерывности  $E_x(y, z)$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial n}$ , где  $n$  – нормаль к границе разрыва. На бесконечности выполняются условия убывания:

$$\begin{aligned} |E_x(y, z) - E_x^0(z)| &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty \\ E_x(y, z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$

Квазиодномерный метод [1-2] применяется при решении многомерных обратных задач магнитотеллурического зондирования, если априори из-

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00244 и проект 03-05-64167) и Научной программы “Университеты России” (проект УР.03.02.516)

вестно, что электропроводность медленно изменяется вдоль земной поверхности. Суть метода заключается в следующем. Пусть нам известен устойчивый алгоритм решения одномерной обратной задачи, который по известному импедансу  $Z(\omega)$  и априори известному гипотетическому распределению электропроводности  $\sigma_g(z)$  определяет распределение электропроводности:

$$\sigma(z) = I[Z(\omega), \sigma_g(z)]. \quad (4)$$

Тогда по известному импедансу  $Z(y_m, \omega)$  в точках измерения  $y_m$ ,  $m \in [1, M]$  можно последовательно решить одномерные обратные задачи

$$\sigma(y_m, z) = I[Z(y_m, \omega), \sigma_{m-1}(z)], \quad m \in [1, M], \quad (5)$$

где  $\sigma_0(z) = \sigma_g(z)$  – известное распределение электропроводности вдали от неоднородности. Так как алгоритм решения одномерной обратной задачи находит из всех возможных  $\sigma(y_m, z)$  ближайшее к  $\sigma_{m-1}(z)$ , то в результате мы находим  $\sigma(y_m, z)$ ,  $m \in [1, M]$  медленно изменяющееся вдоль земной поверхности. Отметим, что сглаживание решения  $\sigma(y, z)$  происходит не только за счет особенности квазиодномерного метода, но также за счет того, что магнитотеллурическое поле на земной поверхности существенно более плавно изменяется по сравнению с изменениями  $\sigma(y, z)$  на глубине.

Полученное распределение  $\tilde{\sigma}(y, z)$  можно рассматривать как сглаженное изображение истинного распределения  $\sigma(y, z)$ . Для лучшего приближения к истинному решению к сглаженному приближению  $\tilde{\sigma}(y, z)$  применяется метод максимального контрастирования, при котором получается более контрастное  $\tilde{\sigma}^{(k)}(y, z)$ , удовлетворяющее условию

$$\|Z(y, \omega) - D_2[y, \omega, \tilde{\sigma}^{(k)}(y, z)]\| \leq \delta$$

где  $D_2$  – оператор двумерной прямой задачи, определяющей импеданс по известному  $\tilde{\sigma}^{(k)}(y, z)$ , а  $\delta$  – погрешность измерения импеданса. Применение метода максимального контрастирования позволяет получить решение, хорошо приближающее истинное распределение электропроводности.

Таким образом, квазиодномерный метод состоит из последовательного решения одномерной обратной задачи с последующим повышением

контрастности  $\sigma(y, z)$ . Рассмотрим решение одномерной обратной задачи с помощью метода линеаризации. Из (1-3) получаем одномерную прямую задачу при условии  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ . Тогда для  $E_x(z)$  имеем задачу:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2(z)E_x = 0, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma(z). \quad (7)$$

В точках  $z_n, n \in [1, N]$  разрыва  $\sigma(z)$  непрерывны  $E_x$  и  $\frac{dE_x}{dz}$ . Из уравнения (7) легко получить уравнение для импеданса

$$Z(z) = \frac{E_x}{H_y} = i\omega\mu E_x(z) \Big/ \frac{dE_x(z)}{dz},$$

откуда имеем

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{i\omega\mu E_x(z)}{Z(z)}. \quad (8)$$

Продифференцировав (8) по  $z$  и подставив в уравнение (7), получим

$$\frac{-i\omega\mu E_x}{Z^2(z)} \cdot \frac{dZ}{dz} + \frac{i\omega\mu}{Z(z)} \frac{dE_x}{dz} + i\omega\mu\sigma(z)E_x = 0$$

или

$$\frac{dZ}{dz} - \sigma(z)Z^2 = i\omega\mu, \quad z \in [z_0, \infty). \quad (9)$$

Заметим, что при  $z > z_N$  имеем  $\sigma(z) = \sigma_{N+1} = const$  и  $Z(z) = const$ , что дает

$$Z(z_N) = (1-i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_{N+1}}}. \quad (10)$$

В результате для импеданса мы имеем задачу Коши для уравнения Риккати (9-10). Решив задачу (9-10), найдем импеданс на земной поверхности

$$Z(z=0) = Z_0(\omega), \quad (11)$$

который будем использовать при решении обратной задачи. Однако задачу можно существенно упростить, помня, что в квазиодномерном методе мы последовательно находим  $\sigma_m(z)$ , мало отличающееся от  $\sigma_{m-1}(z)$ . Это

означает, что мы можем линеаризовать прямую задачу, считая

$$\sigma_m(z) = \sigma_{m-1}(z) + u_m(z), \quad \|u_m\| \ll 1 \quad (12)$$

$$Z^{(m)}(z) = Z^{(m-1)}(z) + \zeta^{(m)}(z), \quad \|\zeta^{(m)}(z)\| \ll 1 \quad (13)$$

где  $Z^{(m)}(z)$  – импеданс, рассчитанный для  $\sigma_m(z)$ . Тогда уравнение (9) для  $Z^{(m)}(z)$  будет иметь вид:

$$\frac{d(Z^{(m-1)}(z) + \zeta^{(m)}(z))}{dz} - (\sigma_{m-1} + u_m)(Z^{(m-1)}(z) + \zeta^{(m)}(z))^2 = i\omega\mu$$

или, пренебрегая членами  $(\zeta^{(m)}(z))^2$  и  $u_m(z)\zeta^{(m)}(z)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{dZ^{(m-1)}}{dz} + \frac{d\zeta^{(m)}}{dz} - \sigma_{m-1}(z)(Z^{(m-1)}(z))^2 - (Z^{(m-1)}(z))^2 u_m(z) - \\ - 2\sigma_{m-1}(z)Z^{(m-1)}(z)\zeta^{(m)}(z) = i\omega\mu. \end{aligned}$$

Учитывая, что импеданс  $Z^{(m-1)}(z)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{dZ^{(m-1)}}{dz} - \sigma_{m-1}(z)(Z^{(m-1)})^2 = i\omega\mu,$$

получим, окончательно, уравнение для  $\zeta^{(m)}(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta^{(m)}(z)}{dz} - 2\sigma_{m-1}(z)Z^{(m-1)}(z)\zeta^{(m)}(z) = \\ = (\sigma_m(z) - \sigma_{m-1}(z))(Z^{(m-1)}(z))^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как величина  $k_{N+1}$  фиксирована, то для  $\zeta^{(m)}(z)$  имеется начальное условие

$$\zeta^{(m)}(z = z_N) = 0. \quad (15)$$

Получили линейную задачу Коши для уравнения первого порядка, решение которой находится аналитически:

$$\zeta^{(m)}(z) = \int_{z_N}^z \varphi_m(t) e^{-\int_t^z \beta(\xi) d\xi} dt, \quad (16)$$

где

$$\beta(\xi) = 2\sigma_{m-1}(\xi)Z^{(m-1)}(\xi), \quad \varphi_m(t) = (\sigma_m(t) - \sigma_{m-1}(t))(Z^{(m-1)}(t)). \quad (17)$$

Если в (16) положить  $z = 0$ , то получим для  $\varphi_m(t)$  интегральное уравнение

$$\int_{z_N}^0 K(t, \omega) \varphi_m(t) dt = f_m(\omega), \quad (18)$$

в котором ядро имеет вид

$$K(t, \omega) = \exp \int_t^0 \beta(\xi) d\xi, \quad (19)$$

А правая часть определяется через разность импедансов в соседних точках

$$f_m(\omega) = \zeta^m(z=0) = Z_0^{(m)}(\omega) - Z_0^{(m-1)}(\omega), \quad (20)$$

где  $Z_0^{(m)}(\omega) = Z(z=0, y=y_m)$ ,  $m \in [1, M]$ .

Если решено интегральное уравнение (18), то согласно (17), определяем по известному распределению  $\sigma(y_{m-1}, z) = \sigma_{m-1}(z)$  электропроводность в соседней точке

$$\sigma(y_m, z) = \sigma_m(z) = \sigma_{m-1}(z) + \frac{\varphi_m(z)}{Z^{(m-1)}(z)}, \quad (21)$$

Интегральное уравнение (18) является уравнением Фредгольма первого рода, решение которого неустойчиво. Для его решения необходимо применять методы регуляризации [3].

Согласно представленному алгоритму была разработана программа решения двумерной обратной задачи с помощью квазиодномерного метода. Данная программа была опробована на ряде моделей при использовании данных, полученных с помощью квазиэксперимента. На Рис. 1 представлены результаты решения обратной двумерной задачи для случая прямоугольной неоднородности, расположенной во втором слое двухслойной слоистой среды с подстилающим основанием бесконечной проводимости. Одномерные задачи решались слева на право.

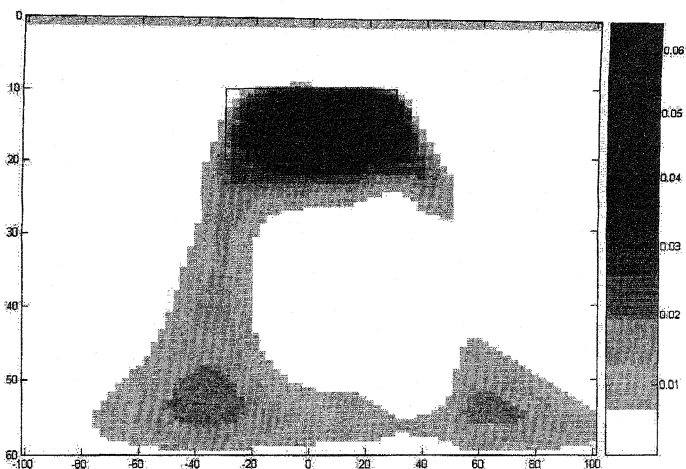


Рис. 1. Распределение электропроводности в земле, полученное в результате решения двумерной обратной задачи МТЗ квазиодномерным методом

Из рисунка (см. Рис. 1.) видно, что на глубине 50-60 км. возникают ложные проводящие структуры. Данный эффект обусловлен наличием на фиксированной глубине подстилающего основания бесконечной проводимости. Если в алгоритм решения задачи заложить возможность изменения границ идеального проводника, то границы бы изменились, а ложные структуры не возникли. Также от данных структур можно избавиться одним из следующих способов:

1. Решать обратную задачу в отсутствии подстилающего основания или при условии, что оно находится на значительной глубине
2. Решать одномерные обратные при незначительном удалении от центра неоднородности. Использование данного способа в реальных условиях предпочтительней, т.к. всегда измерения начинаются вблизи неоднородностей. Решение при данном условии представлено на Рис. 2. Легко видеть, что ложные проводящие структуры исчезли.

В результате мы получили сглаженную область повышенной электропроводности, достаточно хорошо приближающую реальную неоднородность.

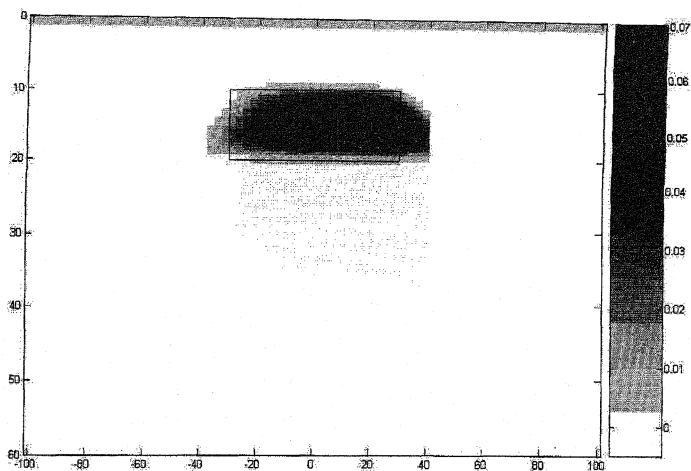


Рис. 2. Решение при незначительном удалении от центра неоднородности

При этом мы знаем, что полученное нами сглаженное решение связано с особенностью примененного метода, а не с реальной структурой неоднородности. Для улучшения полученного результата мы можем применить метод максимального контрастирования. При этом мы получим более контрастное решение, которое лучше приближает границы реальной неоднородности.

### Литература

1. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. и др. Анализ и интерпретация магнитотеллурических данных М.: Диалог-МГУ, 1997. – 161 с.
2. Дмитриев В.И. Многомерные обратные задачи магнитотеллурического зондирования // М. Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. 2003 №3, с.7-22.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 288с.