Раздел I. Математическое моделирование

А.А. Белолипецкий, Е.А. Малинина, К.О. Семёнов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕГРАДАЦИИ ТОПЛИВНОГО СЛОЯ ПРИ НАГРЕВАНИИ ЛАЗЕРНОЙ МИШЕНИ ТЕПЛОВЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В РАБОЧЕЙ КАМЕРЕ РЕАКТОРА

Введение

В этой статье авторы продолжают исследование вопросов, связанных с разрушением топливного слоя в лазерных мишенях при доставке их в зону горения термоядерного реактора. Впервые этот вопрос был поставлен в работах [1-3]. В статье [1] была изучена модель разрушения слоя вследствие того, что мишень в рабочей камере реактора при ее доставке в зону горения некоторое время находится в разреженном «горячем» остаточном газе. В работах [2,3] было дано краткое описание модели деградации мишени из-за воздействия на нее теплового электромагнитного излучения (ЭМИ), испускаемого горячими стенками рабочей камеры реактора. В данной статье приводится подробное изложение этой модели и полученных на ее основе решений.

Лазерная мишень (ЛМ) – это многослойная полистироловая сферическая оболочка, на внутренней стенке которой выморожены твердые изотопы водорода (дейтерий, тритий или их смеси). В идеале (рис.1) эта начинка из ядерного топлива должна представлять собой шаровой слой. На практике, конечно, этого добиться не возможно, но и геометрически идеальная ЛМ при доставке ее в зону горения реактора подвергается, например, тепловому воздействию, которое частично разрушает топливный слой.

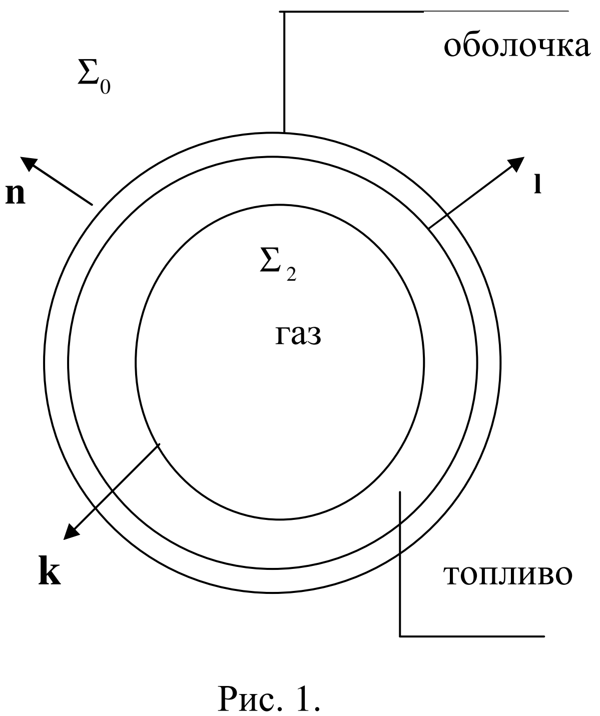


Рис. 1.

Во время инжекции в фокус лазерного пучка ЛМ некоторое время находится в рабочей камере реактора, горячие стенки которого излучают электромагнитные волны, нагревающие мишень и частично испаряющие топливный слой, в силу чего его геометрические свойства изменяются. Задача состоит в том, чтобы оценить критическое время нарастания предельного значения разнотолщинности этого слоя. Сложность состоит в том, что в твердом топливе присутствуют кристаллические зоны, коэффициент теплопроводности которых является векторной величиной. Кроме того, само ЭМИ не является сферически симметричным. Из-за этого задача нагрева и сублимации слоя так же становится сферически несимметричной. Как и в работе [1], математическая модель представляет собой задачу Стефана для сингулярно возмущенного уравнения теплопроводности с нелинейными краевыми и начальными условиями. Решение задачи ищется в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра. Таким параметром является отношение толщины слоя к радиусу ЛМ.

Предполагается, что дейтерий-тритиевый топливный слой находится в кристаллическом состоянии, причем главные оси кристалла в разных точках ориентированы по разному, в силу чего скорость распространения звука, а с нею и коэффициент теплопроводности является векторной величиной.

1. Математическая модель деградации

Пусть T_{sh}, T_s, T_g функции времени t и сферических координат r, θ, φ, которые описывают температуру точек оболочки, топливного слоя (или криослоя) и газа соответственно. Очевидны начальные и граничные условия

$$T_{sh} = T_s = T_g = T_i \text{ при } t = 0. \tag{1}$$

Здесь T_i – начальная температура мишени.

На внешней границе Σ_0

$$\frac{\partial T_{sh}}{\partial r} = 0 \ . \tag{2}$$

Границу, разделяющую топливный слой и оболочку, обозначим Σ_1. На сфере Σ_1

$$T_{sh} = T_s , \tag{3}$$

$$\langle k_{sh} \ grad \ T_{sh}, \mathbf{l} \rangle = \langle k_s \ grad \ T_s, \mathbf{l} \rangle . \tag{4}$$

Условие (2) означает отсутствие потока тепла через поверхность Σ_0, а (3), (4) выражают равенство температур и тепловых потоков в точках поверхности Σ_1. Здесь k_{sh}, k_s – коэффициенты теплопроводности материала оболочки и топливного слоя, $\mathbf{n}, \mathbf{l}$ – единичные векторы внешней нормали в точках поверхностей Σ_0 и Σ_1.

Процесс теплопереноса в оболочке описывается уравнением теплопроводности

$$\rho_{sh} c_{sh} \frac{\partial T_{sh}}{\partial t} = div(k_{sh} grad\, T_{sh}) + \alpha_{sh} J_0 \cdot (1 + \zeta(\varphi, \theta)), \qquad (5)$$

где ρ_{sh}, c_{sh} – плотность и теплоемкость материала оболочки. Величина J определяет поток электромагнитного излучения (ЭМИ), испускаемый горячей стенкой рабочей камеры, представляющей собой сферу. Задача облучения в общем случае сферически несимметрична, что и учитывается поправочным коэффициентом $\zeta(\theta, \varphi)$. Для величины потока можно, например, использовать закон Стефана-Больцмана

$$J_0 = \sigma T_0^4, \qquad (6)$$

где $\sigma = 5{,}729 \cdot 10^{-12} \frac{вт}{см^2 K^4}$ – постоянная Стефана-Больцмана, а T_0 – температура внутренней стенки рабочей камеры. Множитель α_{sh} – это коэффициент поглощения ЭМИ на единице длины проникновения излучения в среду. Определить его можно следующим образом (см.[4]). Предположим, что спектр ЭМИ лежит в пределах длин волн (λ_1, λ_2). Примем поток энергии этого излучения за 1. Пусть доля потока энергии, заключённая в спектре $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, равна $f(\lambda)d\lambda$. Если $\alpha(\lambda)$ доля потока энергии $f(\lambda)d\lambda$, поглощаемая средой на глубине проникновения в 1 см, то вся поглощаемая энергия при прохождении 1 см среды равна $\alpha = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \alpha(\lambda) f(\lambda) d\lambda$.

Здесь и далее r_0, r_1 – внешний и внутренний радиусы оболочки соответственно, $w_{sh} = r_0 - r_1$ – толщина оболочки.

В топливном слое тепловой поток в сферических координатах r, θ, φ задается вектором $\mathbf{j}_s = -\left(k_1 \frac{\partial T_s}{\partial r}, k_2 \frac{\partial T_s}{r \partial \theta}, k_3 \frac{\partial T_s}{r \sin\theta \partial \varphi} \right)$, где $T_s(r, \theta, \varphi, t)$ – температура в криогенном слое в момент времени t. Коэффициенты теплопроводности $k_i(r, \theta, \varphi), i = 1,2,3$, вообще говоря, зависят от координат. Далее зависимость этих коэффициентов от r будем считать несущественной, поэтому

$$k_i(\theta, \varphi) = k_s \cdot (1 + \xi_i(\theta, \varphi)), i = 1,2,3. \qquad (7)$$

Динамика температуры внутри топливного слоя в силу отсутствия сферической симметрии имеет вид

$$\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s J_0 \cdot (1+\zeta(\theta,\varphi)) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1(\theta,\varphi) r^2 \frac{\partial T_s}{\partial r}\right) +$$
$$+\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k_2(\theta,\varphi)\sin\theta\frac{\partial T_s}{\partial\theta}\right)+ \qquad (8)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(k_3(\theta,\varphi)\frac{\partial T_s}{\partial\varphi}\right)$$

Вообще говоря, с учетом поглощения излучения оболочкой и топливным слоем величина потока, проникающего на глубину $w_{sh} + r_1 - r$ от внешней границы оболочки равна

$$J_s = J_0 e^{-\alpha_{sh} w_{sh} - \alpha_s (r_1 - r)}, \qquad (9)$$

но в силу малости показателя экспоненты в (9) можно считать, что $J_s \approx J_0$, что и использовано в уравнениях (5) и (8).

Пусть $w(\theta,\varphi,t)$ – толщина криогенного слоя в момент времени t. Граница Σ_2 криослой – газ задается уравнением

$$r + w - r_1 = 0.$$

Тогда баланс тепловых потоков на границе Σ_2 с учетом тепла, необходимого для сублимации, запишется как

$$\left(k_1\frac{\partial T_s}{\partial r} + k_2\frac{\partial T_s}{r^2\partial\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta} + k_3\frac{\partial T_s}{r^2\sin^2\theta\partial\varphi}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\Big|_{r=r_1-w(t)} =$$
$$= k_g\frac{\partial T_g}{\partial r}\Big|_{r=r_1-w(t)} - \lambda_s\rho_s\frac{dw}{dt}. \qquad (10)$$

Здесь λ_s – удельная теплота сублимации. Кроме того, на границе Σ_2 температуры газа и топливного слоя равны

$$T_s\big|_{r=r_1-w} = T_g\big|_{r=r_1-w}. \qquad (11)$$

Уравнение (10) определяет скорость изменения толщины w криослоя в разных его точках и, в конечном счете, нарастание разнотолщинности.

Процессы переноса массы, энергии и импульса в газе описываются значительно сложнее. Обозначим

$$\mathbf{V}(t,x,y,z) = (u(t,x,y,z), v(t,x,y,z), w(t,x,y,z))$$

вектор скорости газа в точке (x,y,z) в момент времени t. Ниже для скалярной функции $\varphi(t,x,y,z)$ под полной производной этой функции по времени понимается выражение

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left\langle \mathbf{V},\nabla\right\rangle\varphi .$$

Уравнение Навье-Стокса для переноса импульса в вязком газе имеет вид (см. [5])

$$\rho_g\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\rho_g\mathbf{F}-grad(p+\frac{2}{3}\mu\, div\mathbf{V})+2Div(\mu\dot{S}) . \qquad (12)$$

Здесь ρ_g, p, μ–плотность, давление и коэффициент динамической вязкости газа, $\dot{S}$ – тензор скоростей деформаций, $\mathbf{F}$ – плотность распределения объемных сил.

Перенос массы в газе описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+div(\rho_g\mathbf{V})=0$$

Перенос энергии в газе (см. [5]) опишем уравнением

$$\rho_g\frac{d}{dt}\left(c_vT_g+\frac{V^2}{2}\right)=\rho_g\left\langle\mathbf{F},\mathbf{V}\right\rangle+2div(\mu\mathbf{V}\dot{S})-div\left[(p+\frac{2}{3}\mu\, div\mathbf{V})\mathbf{V}\right]+$$

$$+div(\frac{k_g}{c_p}grad(c_pT_g)) . \qquad (13)$$

Здесь c_p, c_v – удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме соответственно, λ_l – удельная теплота фазового перехода из газообразного состояния в жидкое.

В начальный момент t=0 скорости газа во всех точках нулевые, а плотность газа константа

$$\mathbf{V}(0,x,y,z)=0,$$

$$\rho_g(0,x,y,z)=\rho_0 .$$

На границе Σ_2 положим скорость газа равной нулю ($\mathbf{V}=0$ на Σ_2).

Перенос испаряющегося газа будет осуществляться за счет диффузии, с коэффициентом диффузии D, т.е.

$$D\, grad\rho_g=\rho_s\frac{dw}{dt} \quad \text{на } \Sigma_2 . \qquad (14)$$

К перечисленным соотношениям следует добавить уравнение состояния для газа $\Psi(p,T,\rho)=0$, например, уравнение Ван-дер-Ваальса для 1 моля неидеального газа

$$(p+\frac{a}{V_0^2})(V_0-b)=RT , \qquad (15)$$

где R=8.31дж/(моль К) – универсальная газовая постоянная. Если μ_g – масса 1 моля газа, выраженная в граммах, то из равенства $\rho = \dfrac{\mu_g}{V_0}$, и (15) следует соотношение

$$p = \frac{RT}{\dfrac{\mu_g}{\rho_g} - b} - \frac{a\rho_g^2}{\mu_g^2} \ . \tag{16}$$

2. Упрощающие предположения

При низких температурах коэффициент динамической вязкости $\mu = 0$. Везде ниже пренебрежем объемными силами $\mathbf{F}$. Тогда уравнение (12) примет вид

$$\rho_g \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -grad\ p . \tag{17}$$

Оценим правую часть (17). Для этого ограничимся оценкой лишь радиальной составляющей градиента. Используя (16), получим

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{R\rho_g}{\mu_g - b\rho_g}\frac{\partial T}{\partial r} + \left[\frac{\mu_g RT}{(\mu_g - b\rho_g)^2} - \frac{2a\rho_g}{\mu_g^2}\right]\frac{\partial \rho_g}{\partial r} . \tag{18}$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках положительно. Для этого используем известные соотношения

$$b = \frac{1}{3}V_{0c} = \frac{\mu_g}{3\rho_c},\ a = \frac{27}{8}RT_c b .$$

Здесь T_c, V_{0c}, ρ_c значения температуры, удельного объема и плотности газа в критической точке. Используя выражения для коэффициентов a, b, получим, что выражение в квадратных скобках положительно, если

$$T > \frac{9T_c}{4}\frac{\rho_g}{\rho_c}\left(1 - \frac{\rho_g}{3\rho_c}\right)^2 . \tag{19}$$

Поскольку $T > 4{,}5K$, а для дейтерия $T_c \approx 33K$, и отношение плотности насыщенных паров газа при температуре ниже тройной точки к критической плотности $\dfrac{\rho_g}{\rho_c} < 0{,}05$, то неравенство (19) справедливо. Из вышесказанного и положительности производных $\dfrac{\partial T}{\partial r}, \dfrac{\partial \rho_g}{\partial r}$ получим с помощью (18) оценку снизу для радиальной составляющей градиента давления $\frac{\partial p}{\partial r} > \frac{R\rho_g}{\mu_g - b\rho_g}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{R\rho_g}{\mu_g\left(1-\frac{\rho_g}{3\rho_c}\right)}\frac{\partial T}{\partial r} > \frac{R\rho_g}{\mu_g}\frac{\partial T}{\partial r}$. Тогда согласно (17) для радиальной составляющей скорости V_r имеем $\left|\frac{dV_r}{dt}\right| > \frac{R}{\mu_g}\frac{\partial T}{\partial r}$. При радиусе мишени 3 мм и перепаде температур в 1 К получим оценку для ускорения $\left|\frac{dV_r}{dt}\right| > 500\frac{м}{c^2}$. Это означает, что характерное время перемешивания газа составляет 1 мс, т.е. газ перемешивается мгновенно. Вследствие такого интенсивного перемешивания значения температуры, давления и плотности газа устанавливаются практически мгновенно постоянными по всему внутреннему объему мишени, а $\mathbf{V} \approx 0$. Из уравнений непрерывности и (13) следует независимость от времени плотности и температуры. Формально этот факт противоречит условию (14), но здесь можно заметить, что правая часть равенства (14) мала, т.е. изменение массы газа в процессе сублимации ничтожно из-за краткости протекания самого процесса. Все сказанное позволяет считать, что температура газа в полости мишени в течение процесса доставки мишени в зону горения есть величина постоянная и равна начальной температуре

$$T_g \equiv T_i\,. \tag{20}$$

Из-за малости коэффициента теплопроводности оболочки k_{sh} разогрев оболочки происходит в основном вследствие поглощения ЭМИ. Поэтому уравнение (5) примет вид

$$\rho_{sh}c_{sh}\frac{dT_{sh}}{dt} = \alpha_{sh}J_{sh}\cdot(1+\zeta(\varphi,\theta))\,. \tag{21}$$

Начальное условие (1) и граничное условие (3) оставляем без изменения.

Так как T_{sh} не зависит от r, то условия (2), (4) теряют смысл.

Уравнение (8) не меняется. Граничные условия (10)-(11) в силу (20) примут вид

$$T_s\big|_{r=r_1-w} = T_i\,, \tag{22}$$

$$\left(k_1\frac{\partial T_s}{\partial r} + k_2\frac{\partial T_s}{r^2\partial\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta} + k_3\frac{\partial T_s}{r^2\sin^2\theta\partial\varphi}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\Big|_{r=r_1-w(t)} = -\lambda_s\rho_s\frac{dw}{dt}\,. \tag{23}$$

Последнее соотношение определяет изменение во времени толщины криослоя $w(\theta,\varphi,t)$ с начальным условием

$$w(\theta,\varphi,0) = w_0\,. \tag{24}$$

Решение начально-краевой задачи (1), (3), (8), (21)-(24) позволяет аналитически выписать задачу Коши для функции $w(\theta,\varphi,t)$ (см. (55)).

3. Асимптотический анализ задачи

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{r_1 - r}{\delta r_1} = \frac{r_1 - r}{w_0}, \text{ где } \delta = \frac{w_0}{r_1}, \ \tau = t / t^*, \text{ где } t^* = \frac{r_1^2 c_s \rho_s}{k_s \cdot (1+\xi_1)}.$$

Значениям $r_1, r_2 = r_1 - w_0$ будут соответствовать значения безразмерной переменной $x = 0,\ x = 1$.

В новых переменных наша задача запишется как

$$\rho_{sh} c_{sh}(T) \frac{dT_{sh}}{d\tau} = \alpha_{sh} J_0 \cdot (1+\zeta) t^*, \tag{25}$$

$$T_{sh}(0) = T_i, \tag{26}$$

$$T_{sh}(t) = T_s(0,\theta,\varphi,t) \ , \tag{27}$$

$$\delta^2 \frac{\partial T_s}{\partial \tau} = \frac{1}{(1-\delta x)^2} \frac{\partial}{\partial x} (1-\delta x)^2 \frac{\partial T_s}{\partial x}) +$$

$$+ \frac{\delta^2}{(1+\xi_1)(1-\delta x)^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1+\xi_2(\theta,\varphi)) \sin\theta \frac{\partial T_s}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{\delta^2}{(1+\xi_1)(1-\delta x)^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left((1+\xi_3(\theta,\varphi)) \frac{\partial T_s}{\partial \varphi} \right) + \frac{\delta^2 r_1^2 \alpha_s}{k_s \cdot (1+\xi_1)} J_0 (1+\zeta). \tag{28}$$

Пусть $\overline{w} = \dfrac{w(\theta,\varphi,t)}{w_0}$. Дифференциальное уравнение (23) для изменения толщины криослоя примет вид

$$-((1+\xi_1)\frac{\partial T_s}{\partial x} + \delta^2 \frac{1+\xi_2}{(1-\delta x)^2} \frac{\partial T_s}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial \theta} + \delta^2 \frac{1+\xi_3}{(1-\delta x)^2 \sin^2\theta} \frac{\partial T_s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial \varphi}) \Big|_{x=\overline{w}} =$$

$$= -\delta^2 \lambda \frac{d\overline{w}}{d\tau}, \tag{29}$$

где параметр $\lambda = \dfrac{\lambda_s \rho_s r_1^2}{k_s \cdot (1+\xi_1) t^*}$, с начальным условием согласно (24)

$$\overline{w} = 1. \tag{30}$$

Равенство температур на границе газ – криослой запишется

$$T_s \big|_{x=\overline{w}} = T_i. \tag{31}$$

Система уравнений (25)-(31) определяет сингулярно возмущенную задачу Стефана для параболического уравнения (28). Известно, что решение такой задачи можно искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $\delta^2 \approx 2.5 \cdot 10^{-3}$. Этот асимптотический ряд содержит регулярные и сингулярные слагаемые. Первые члены этих рядов, стоящие при нулевых степенях параметра δ, обозначим соответственно $T^{(r)}, T^{(s)}$. В первом приближении

$$T_s = T_s^{(r)} + T_s^{(s)}. \tag{32}$$

Функция $T^{(r)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1+\xi_1}{(1-\delta x)^2}\frac{\partial}{\partial x}(1-\delta x)^2\frac{\partial T_s^{(r)}}{\partial x}) \quad +\frac{\delta^2 r_1^2 \alpha_s}{k_s}J_0(1+\zeta)=0. \tag{33}$$

Сингулярные члены ищем в виде

$$T_s^{(s)} = e^{-\frac{\vartheta^2}{\delta^2}\tau} f(x,\theta,\varphi). \tag{34}$$

После подстановки в (28) и приравнивания оставшихся свободных членов получим уравнение для f

$$-\vartheta^2 f(x) = -\frac{2\delta}{(1-\delta x)}\frac{df}{dx} + \frac{d^2 f}{dx^2}. \tag{35}$$

В уравнении (29), описывающем динамику толщины криослоя, в левой части в первом приближении отбросим слагаемые порядка δ^2. Уравнение примет вид

$$(1+\xi_1)\frac{\partial T_s}{\partial x} = \delta^2 \lambda \frac{d\overline{w}}{d\tau}. \tag{36}$$

Из уравнений (28), (29) следует, что для построения главных членов асимптотических рядов можно пренебречь слагаемыми, отвечающими за поперечную теплопроводность. Для анализа уравнений (25), (33), (35), (36) с соответствующими граничными и начальными условиями нам удобно вернуться к переменным r, t. Проинтегрируем уравнение (25) с начальным условием (26). Поскольку коэффициент теплоемкости $c_{sh}(T)$ почти линейно зависит от температуры, то положим

$c_{sh}(T) = \eta_0 + \eta_1 \cdot (T - T_i)$. Здесь $\eta_0 = c_{sh}(T_i), \eta_1 = \dfrac{c_{sh}(T_f) - c_{sh}(T_i)}{T_f - T_i}$. Величины

T_f, T_i-конечная и начальная температура процесса нагревания мишени, например, 18 К и 4,5 К соответственно. После интегрирования получим

$$t = \frac{2\eta_1}{\beta_{sh}\eta_0}\Delta T_{sh}(1+\frac{\eta_1}{2\eta_0}\Delta T_{sh}),$$

$$\Delta T_{sh} \equiv h(t) = \frac{\eta_0}{\eta_1}(\sqrt{1+\beta_{sh} t} - 1). \tag{37}$$

Здесь $\Delta T_{sh} = T - T_i,\ \beta_{sh} = \dfrac{2\eta_1 \alpha_{sh} J_0}{\eta_0^2 \rho_{sh}}(1+\zeta)$.

В нулевом приближении уравнение (33) для регулярной составляющей запишется в виде

$$\alpha_s J_0 \cdot (1+\zeta) + \frac{k_s(1+\xi_1(\theta,\varphi))}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T_s^{(r)}}{\partial r}) = 0. \tag{38}$$

Из (37) следует, что температура оболочки зависит от времени по закону

$$T_{sh} = h(t) + T_i. \tag{39}$$

Из (38) получаем

$$\frac{\partial T_s^{(r)}}{\partial r} = -\beta_s r + c_0 / r^2 \ ,$$

$$T_s^{(r)} = -\beta_s r^2 / 2 - c_0 / r + c_1 \ , \tag{40}$$

где $\beta_s = \dfrac{\alpha_s J_0 (1+\zeta)}{3k_s(1+\xi_1)}$.

Из (3), (39)-(40) следует, что

$$c_1 = h(t) + T_i + \beta_s r_1^2 / 2 + c_0 / r_1.$$

Используем теперь условие (22) и выражение (40). Имеем

$$c_0 = \beta_s r_1^3 (1 - w / r_1)(1 - w / 2r_1) + r_1(r_1 / w - 1) h(t). \tag{41}$$

Таким образом,

$$T_s^{(r)} = \beta_s (r_1^2 - r^2) + h(t) + T_i + c_0 (r_1^{-1} - r^{-1}). \tag{42}$$

Сингулярную составляющую ищем в виде

$$T_s^{(s)} = e^{-\gamma^2 t} f\ (r,\theta,\varphi) \ . \tag{43}$$

Она удовлетворяет уравнению (35), которое в размерных переменных имеет вид

$$-\vartheta^2 f\ (r) = \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}. \tag{44}$$

Параметр $\vartheta^2 = \gamma^2 \dfrac{c_s \rho_s}{k_s(1+\xi_1(\theta,\varphi))}$.

Уравнение (44) является уравнением Эмдена-Фаулера. Его общее решение имеет вид

$$f\ (r) = D_0 \frac{\sin(\vartheta\, r + D_1)}{r}, \tag{45}$$

Здесь D_0, D_1, ϑ неизвестные функции переменных θ,φ.

Так как в первом приближении температура в криослое представляет собой сумму регулярных и сингулярных частей решения, т.е.

$$T_s = T_s^{(r)} + T_s^{(s)}, \tag{46}$$

то начальные и граничные условия для сингулярной составляющих запишем отдельно так, чтобы они были согласованы с ранее приведенными условиями для T_{sh}, T_s.

На границе $r = r_1$

$$T_s^{(s)}(r_1,\theta,\varphi,t) = 0 \text{, или}$$

$$f\Big|_{r=r_1} = 0. \tag{47}$$

На внутренней границе $r = r_1 - w_0$ в начальный момент

$$T_s^{(s)}(r_0 - w_0,\theta,\varphi,0) = 0 \text{, или}$$

$$f\Big|_{r=r_1-w_0} = 0. \tag{48}$$

Будем рассматривать задачу (44), (47), (48) как задачу на собственные значения дифференциального оператора $\frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2}$. Из (45) и условий (47), (48) для нетривиальных решений получаем набор собственных значений и ортогональных собственных функций

$$\vartheta_n = \pi n / w_0 \, , \; n = 1,2,...,$$

$$f_n(r) = \frac{\sin\left[\pi n \dfrac{r_1 - r}{w_0}\right]}{r}.$$

Общее решение уравнения (44) имеет вид ряда

$$f(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\gamma_n^2} f_n \, ,$$

в котором мы ограничимся лишь первым слагаемым

$$f = D_0 \frac{\sin\left[\pi \dfrac{r_1 - r}{w_0}\right]}{r}. \tag{49}$$

Причем

$$\gamma^2 = \frac{\pi^2 k_s (1 + \xi_1(\theta,\varphi))}{w_0^2 c_s \rho_s}. \tag{50}$$

Поскольку согласно (46) в начальный момент $T_s = T_i = (T_s^{(r)} + T_s^{(s)})\Big|_{t=0}$, то коэффициент D_0 в (49) ищем стандартным способом, как коэффициент Фурье-разложения функции невязки начального распределения температур $T_i - T_s^{(r)}(r,\theta,\varphi,0)$ по собственным функциям дифференциального оператора (44). Именно

$$D_0=\int\limits_{r_1-w_0}^{r_1}(T_i-T_s^{(r)}(r,\theta,\varphi,0))\frac{\sin\left[\pi\dfrac{r_1-r}{w_0}\right]}{r}dr\Big/\int\limits_{r_1-w_0}^{r_1}\frac{\sin^2\left[\pi\dfrac{r_1-r}{w_0}\right]}{r^2}dr\,. \quad (51)$$

Значение

$$D_0\approx-12\beta_s w_0^2 r_1/\pi^3\,. \quad (52)$$

Действительно,

$$\int\limits_{r_1-w_0}^{r_1}\frac{\sin^2\left[\pi\dfrac{r_1-r}{w_0}\right]}{r^2}dr=\int\limits_0^1\frac{\sin^2(\pi s)w_0 ds}{r_1^2(1-(1-s)w_0/r_1)}\approx$$

$$\approx\int\limits_0^1\frac{(1-\cos(2\pi s))w_0 ds}{2r_1^2}\approx\frac{w_0}{2r_1^2}\,, \quad (53)$$

здесь $s=1+(r-r_1)/w_0$. Далее, при t=0, в формулах (41),(42) нужно положить $h=0, w=w_0$. Из них следует, что

$$T_s^{(r)}\Big|_{t=0}-T_i=\beta_s(r_1^2-r^2)+c_0(r_1^{-1}-r^{-1})=\beta_s\frac{r_1-r}{2}\left[r_1+r-(2r_1-w_0)(r_1-w_0)/r\right]=$$

$$=\frac{zr_1^2\beta_s}{2(1-z)}(\delta-z)(3-z-\delta)\,.$$

Здесь, как и ранее, $\delta=\dfrac{w_0}{r_1}$, $z=\dfrac{r_1-r}{r_1}$, $z\in[0,\delta]$. Считая величину δ малой, получим $T_s^{(r)}\Big|_{t=0}-T_i\approx\dfrac{3zr_1^2\beta_s}{2}(\delta-z)$. Учитывая соотношение $z=(1-s)\delta$, интеграл, стоящий в числителе формулы (51), можно представить в виде

$$I=\int\limits_{r_1-w_0}^{r_1}(T_i-T_s^{(r)}(r,\theta,\varphi,0))\frac{\sin\left[\pi\dfrac{r_1-r}{w_0}\right]}{r}dr=-\frac{3\beta_s w_0^3}{2r_1}\int\limits_0^1\frac{s(1-s)\sin(\pi s)ds}{1-(1-s)\delta}\,.$$

Чтобы оценить последний интеграл, заменим знаменатель подинтегрального выражения единицей и перейдем к переменной $u=1/2-s$. Тогда

$$\int\limits_0^1\frac{s(1-s)\sin(\pi s)ds}{1-(1-s)\delta}\approx I_0=\int\limits_0^1 s(1-s)\sin(\pi s)ds=\int\limits_{-1/2}^{1/2}(1/4-u^2)\cos(\pi u)du=$$

$$=2\int\limits_0^{1/2}(1/4-u^2)\cos(\pi u)du=1/(2\pi)-2I_1,\quad \text{где}\quad I_1=1/(4\pi)-2/\pi^3\,.$$

Следовательно, $I_0 = 4/\pi^3$, а $I = -\dfrac{6\beta_s w_0^3}{\pi^3 r_1}$. Отсюда и из (53) получаем (52).

Из сказанного следует, что

$$T_s^{(s)} = -12\beta_s w_0^2 r_1/\pi^3 \, \frac{\sin\left[\pi \dfrac{r_1 - r}{w_0}\right]}{r} e^{-\gamma^2 t}. \tag{54}$$

Граничное условие (36) в переменных r, t запишется в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1+\xi_1)k_1 \frac{\partial T_s}{\partial r}\Big|_{r=r_1 - w(t)} = -\lambda_s \rho_s \frac{dw}{dt}.$$

Отсюда, используя (46) и выражения (42), (54), получим

$$\frac{dw}{dt} = -\gamma_0(\theta,\varphi)\frac{r_1(\sqrt{1+\beta_{sh}t}-1)}{w(r_1 - w)} - \gamma_1 w \frac{r_1}{r_1 - w} +$$

$$+\gamma_2 \frac{w^2}{r_1^2(r_1 - w)} + \frac{\gamma_3 e^{-\gamma^2 t}}{r_1 - w}\left\{\cos(\pi w/w_0) + \frac{w_0 \sin(\pi w/w_0)}{\pi(r_1 - w)}\right\} \tag{55}$$

с начальным условием $w\big|_{t=0} = w_0$.

Здесь $\gamma_0 = \dfrac{k_s(1+\xi_1(\theta,\varphi))}{\lambda_s \rho_s}\dfrac{\eta_0}{\eta_1}$, $\gamma_1 = \dfrac{\alpha_s J_0}{2\lambda_s \rho_s}(1+\zeta(\theta,\varphi))$, $\gamma_2 = \dfrac{2}{3} r_1^2 \gamma_1$,

$\gamma_3 = \dfrac{\pi}{\lambda_s \rho_s w_0} D_0 k_s \cdot (1+\xi_1) = -\dfrac{4\alpha_s w_0 r_1 J_0}{\pi^2 \lambda_s \rho_s}(1+\zeta(\theta,\varphi))$, $\gamma^2 = \dfrac{k_s \cdot (1+\xi_1(\theta,\varphi))\pi^2}{c_s \rho_s w_0^2}$,

$J_0 = \sigma T_0^4 = 56.6 \, вт/см^2$ при $T_0 = 1773K$.

Зададим для двух различных пар угловых координат $(\theta_1,\varphi_1),(\theta_2,\varphi_2)$ значения ξ_1 и ζ. Интегрируя два раза уравнение с различными значениями ξ_1 и ζ, можно получить функцию нарастания разнотолщинности

$$\Delta w(t) = \left| w(t,\theta_1,\varphi_1) - w(t,\theta_2,\varphi_2)\right|.$$

Момент, когда разнотолщинность превысит допустимое значение $\Delta w(t) \ge \varepsilon$, можно считать временем деградации $t_d(j_{sh}, j_s, \Delta\xi_1, \Delta\zeta)$ геометрических свойств топливного слоя мишени. Здесь параметры $\Delta\xi_1 = \xi_1(\theta_1,\varphi_1) - \xi_1(\theta_2,\varphi_2)$, $\Delta\zeta = \zeta(\theta_1,\varphi_1) - \zeta(\theta_2,\varphi_2)$, а j_{sh}, j_s – поглощенные потоки ЭМИ в оболочке и криослое соответственно. Последние равны $j_{sh} = \alpha_{sh} w_{sh} J_{sh}$, $j_s \approx \alpha_s w_0 J_s$.

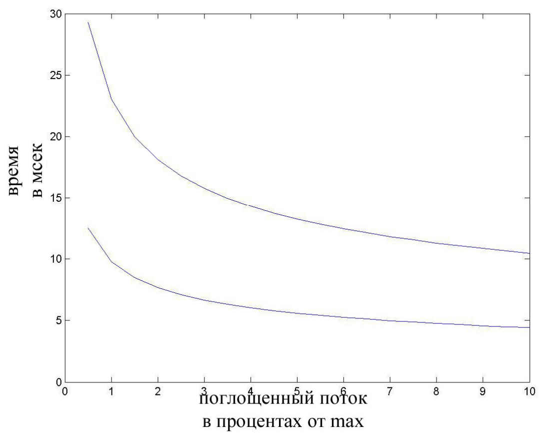
Следует отметить, что для дейтерия коэффициент поглощения α_s очень мал. Положив его равным нулю, мы предельно упростим уравнение (55), т.к. коэффициенты $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Тогда для безразмерной толщины слоя $\overline{w} = w / w_0$ с учетом оценки $1 - \delta \overline{w} \approx 1$ решение уравнения (55), которое теперь примет вид

$$\frac{d\overline{w}(t,\theta,\varphi)}{dt} = -\gamma_0(\theta,\varphi)\frac{(\sqrt{1+\beta_{sh}(\theta,\varphi)t}-1)}{w_0^2\overline{w}}, \tag{56}$$

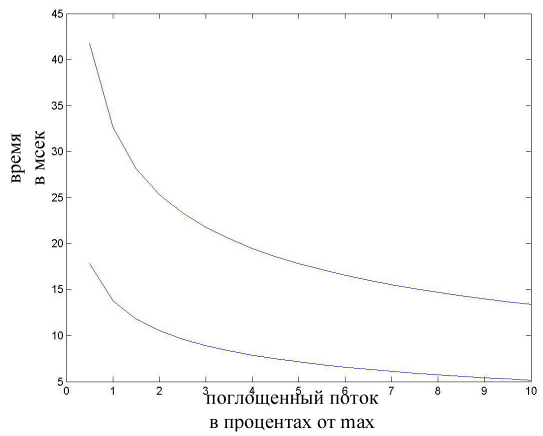
можно записать в квадратурах

$$\overline{w}(t,\theta,\varphi) = \sqrt{1 - a_0(\theta,\varphi)\left\{\frac{2}{3\beta_{sh}(\theta,\varphi)}\left[\left(1+\beta_{sh}(\theta,\varphi)\cdot t\right)^{1,5}-1\right]-t\right\}}, \tag{57}$$

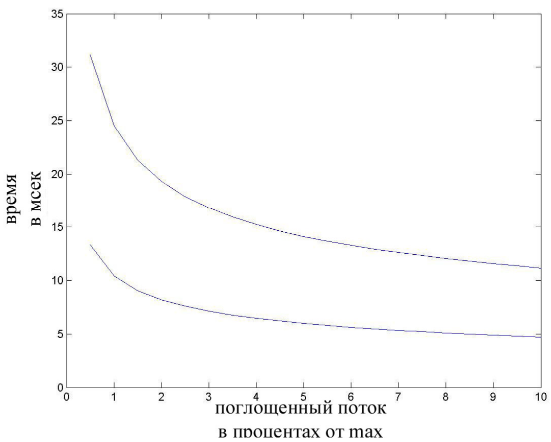
где $a_0 = \dfrac{2\gamma_0}{w_0^2}$. Из (56) непосредственно следует, что $\overline{w}(t,\theta,\varphi)$ монотонно убывающая функция времени. При этом коэффициент $\beta_{sh}(\theta,\varphi)$ ответственен за сферическую асимметрию ЭМИ, а $a_0(\theta,\varphi)$ – за асимметрию коэффициента теплопроводности топливного слоя.



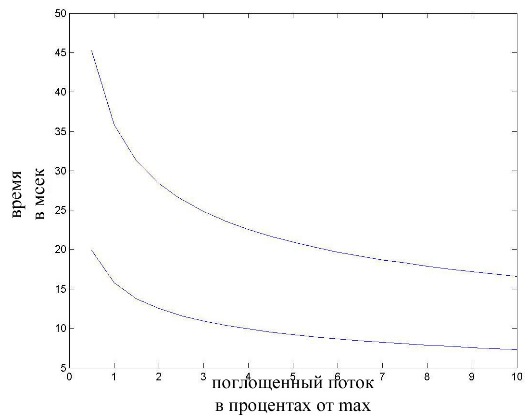
а)



б)



в)



г)

Рис.2. Зависимость времени деградации от поглощенного потока

На рис. 2а приведены графики зависимости $t_d(j_{sh}, j_s, 0.1, 0)$. Верхняя кривая соответствует разнотолщинности ε=2 мкм, а нижняя – ε= 0,5 мкм. На рис. 2б приведены зависимости $t_d(j_{sh}, j_s, 0, 0.1)$. При этом в обоих случаях вычисления велись по формуле (55). На рис. 2в-2г приведены аналогичные кривые, но уже вычисления были проведены по формуле (57), когда поглощение в топливном слое отсутствует.

В проведённых расчётах величина j_{sh} менялась от 0,5% до 10% от падающего потока в 56.6 вт/кв.см, а j_s=0,1 j_{sh}, начальная T= 4.2 K, толщина оболочки 45 мкм, радиус мишени 2 мм, толщина криослоя 200 мкм. Можно заметить, что коэффициент поглощения в криослое почти не сказывается на времени деградации в случае асимметричного коэффициента теплопроводности (рис.2а,в), но оказывает некоторое влияние на результат в случае асимметричного потока (рис.2б,г).

Литература

1. Белолипецкий А.А. Об одной сингулярно возмущенной задаче Стефана, описывающей разрушение топливного слоя в лазерной мишени. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. вычисл. матем. и киберн. 2008. №1. с.10-18.

2. Белолипецкий А.А. О математическом моделировании сложных физических систем. // Сб. трудов 2-й Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование развивающейся экономики», ЭКОМОД-2007, г. Киров, 9-15 июля 2007 г. с. 37-48.

3. Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Корешева Е.Р. и др. К решению проблемы сохранения параметров криогенной мишени в процессе ее доставки в зону термоядерного горения. // Вопросы атомной науки и техники, вып. 3, 2007, с. 27 – 47.

4. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. // М., Мир. 1975, 934 с.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. // М., «Наука», Главная редакция физ.-мат. литературы, 1970, 904 с.