

Белолипецкий А.А., Малинина Е.А.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ КАНАЛА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО НЕМУ ШАРА.

Рассматриваемая задача появилась в ходе изучения и моделирования процесса производства лазерных мишеней, используемых для инерциального термоядерного синтеза. Технология FST (Free standing target) формирования криогенного слоя сферической лазерной мишени (ЛМ) была разработана в Физическом Институте им. П.Н. Лебедева [1],[2]. В ее рамках используется лазерная мишень типа HiPER (Baseline Target-2), представляющая собой сферическую многослойную оболочку, состоящую из внешнего защитного слоя, внутреннего пористого слоя и внутренней полости. Полость мишень заполняется газовой дейтерий-третиевой смесью [3], [4], [5], которую необходимо охладить до вымораживания газа и получения внутри мишени топливного слоя [6], [7].

Для охлаждения мишень при подобранных низких температурах помещают в специальную криогенную установку, которая состоит из спиралевидных трубок с разными углами захода. Задача состоит в том, чтобы подобрать оптимальную конструкцию криостата с учетом всех необходимых параметров мишени и условий ее производства. А именно, при замораживании мишени важным является равномерная заморозка слоя во избежание образования кристаллических участков, а также уменьшение изнашивания мишени из-за трения скольжения.

Чтобы решить задачу подбора наилучшей конструкции криогенного канала нужно описать математически движение мишени в каждом из элементов установки, сформулировать оптимизационную задачу и решить её.

I. Математическая модель движения ЛМ в канале.

В зависимости от выбранных параметров криостата сферическая мишень будет катиться или двигаться с проскальзыванием. Рассмотрим и проанализируем характер этого движения и параметры, которые обеспечивают каждый из режимов - качения или скольжения.

Для математического описания движения ЛМ введем ряд обозначений и опишем более подробно конструкцию криостата. Он представляет собой “хвостовик” - прямолинейную трубку, по которой мишень попадает в

спиралевидный канал, состоящий, в свою очередь, из двух спиралевидных трубок. На рис.1 показан спиралевидный канал с указанием его параметров. Одна из спиралей (спираль 1) позволяет разогнать мишень для её быстрого охлаждения, вторая спираль (спираль 2) тормозит мишень с целью её дальнейшего использования в технологическом цикле.

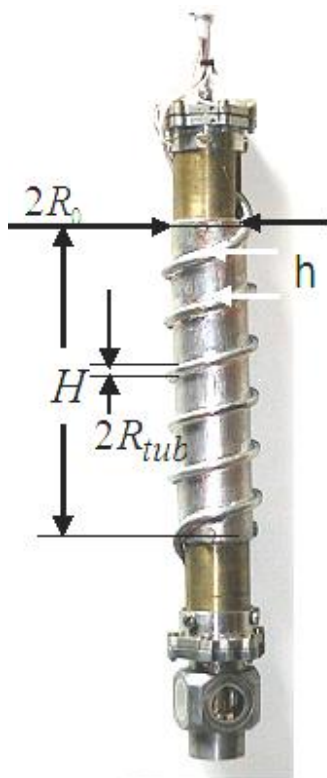


Рис.1. Спиральный трубчатый канал (общий вид).

Будем считать, что “хвостовик” имеет угол наклона к горизонту α_0 , спираль разгона имеет радиус колец R_0 и угол захода - угол между касательной к спирали и горизонтом α_1 , спираль торможения обладает тем же радиусом колец и углом захода α_2 . Коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны k_s и k_r , $k_s \geq k_r$. Высота каждого из элементов криоканала - H_0, H_1, H_2 .

Обозначим $V_m(t)$ - скорость движения центра сферы, а $V_R(t)$ -линейную скорость вращения вокруг центра точек сферы. Мишень будет двигаться по установке до тех пор, пока скорость её центра не станет равной нулю, то есть $V_m = 0$.

Предполагаем, что момент инерции сферической мишени, движущейся в канале, относительно ее центра равен J , радиус равен r_0 , а масса ее равна m .

Считаем, что движение сферы есть качение в момент времени t , если точка касания сферы с поверхностью находится в состоянии покоя, а именно выполнено векторное равенство: $\mathbf{V}_r + \mathbf{V}_m = 0$. То есть $V_r(t) = V_m(t)$, Иначе движение сферы считаем скольжением.

1.1. Движение в “хвостовике”.

Сформулируем условия движения ЛМ в “хвостовике”, для этого запишем законы изменения импульса и момента импульса сферы относительно её центра. Описываемое движение схоже с качением по наклонной плоскости.

Запишем уравнение в проекции на касательную к поверхности трубки в точке касания мишени:

$$m\dot{V}_m = mg \sin\alpha_0 - F_f, \quad (1)$$

где F_f - сила трения.

Пусть мишень катится, тогда

$$\frac{J}{r_0} \dot{V}_m = r_0(F_f - k_r N), \quad (2)$$

где N - сила реакции опоры, а r_0 -радиус сферы.

Так как сила реакции опоры поверхности N всегда направлена по нормали к поверхности в точке касания, а сила тяжести вертикально вниз, то для проекций этих сил имеем следующее выражение:

$$N = mg \cos\alpha_0 \quad (3)$$

Выразив из (1) и (2) \dot{V}_m , приравняв полученные выражения с учетом (3), получим:

$$\dot{V}_m = g \sin\alpha_0 - F_f = F_f \frac{r_0^2}{J} - k_r g \cos\alpha_0 \quad (4)$$

Введем безразмерный момент инерции $\zeta = \frac{J}{mr_0^2}$ и преобразуем полученное равенство (4), выразив силу трения: $F_f = \frac{\zeta mg \cos\alpha_0}{1+\zeta} (tg \alpha_0 + \frac{k_r}{\zeta})$.

Тогда:

$$\dot{V}_m = g \sin\alpha_0 - \frac{\zeta}{1+\zeta} g \sin\alpha_0 - \frac{k_r}{1+\zeta} g \cos\alpha_0 = \frac{g \cos\alpha_0}{1+\zeta} (1 - k_r) \quad (5)$$

Если сфера катится с проскальзыванием, то имеется две альтернативы: либо качение сонаправлено скольжению, либо направлено противоположно. Поскольку при скольжении сила трения определяется как $F_f = k_s N$, то уравнения движения будут выглядеть следующим образом для каждого случая:

а) вектор скорости скольжения и вектор силы трения разнонаправлены:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= g \sin \alpha_0 - k_s g \cos \alpha_0 \\ \dot{V}_R &= \frac{1}{\zeta} (k_s - k_r) g \cos \alpha_0 \end{aligned} \quad (6)$$

б) вектор скорости скольжения и вектор силы трения сонаправлены:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= g \sin \alpha_0 + k_s g \cos \alpha_0 \\ \dot{V}_R &= -\frac{1}{\zeta} (k_s + k_r) g \cos \alpha_0 \end{aligned} \quad (7)$$

1.2. Движение по спиралевидному каналу.

Аналогично записанным уравнениям движения для “хвостовика”, запишем законы движения для ЛМ в спиралевидных каналах. Под α подразумеваем углы α_1, α_2 , в зависимости от того, по какой части спиралевидного канала происходит движение. Отличие от предыдущего случая в том, что сила реакции опоры выражается следующим образом: $N = \Phi(V_m) m g \cos \alpha$, где

$$\Phi(V) = \sqrt{\frac{V^4 \cos^2 \alpha}{g^2 R_0^2}} + 1.$$

а) Для случая качения мишени [8]:

$$\dot{V}_m = \frac{g \cos \alpha}{1 + \zeta} (t g \alpha - k_r \Phi(V_m)) \quad (8)$$

б) Для случая качения с проскальзыванием при сонаправленном качении и скольжении:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= g \sin \alpha + k_s g \cos \alpha \Phi(V_m) \\ \dot{V}_R &= -\frac{1}{\zeta} (k_s + k_r) g \cos \alpha \Phi(V_m) \end{aligned} \quad (9)$$

в) Для случая разнонаправленного качения и скольжения:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= g \sin \alpha - k_s g \cos \alpha \Phi(V_m) \\ \dot{V}_R &= \frac{1}{\zeta} (k_s - k_r) g \cos \alpha \Phi(V_m) \end{aligned} \quad (10)$$

Так как уравнения движения в “хвостовике” есть частный случай уравнений по спирали при $R_0 \rightarrow \infty$ или $\Phi(V) \equiv 1$, то, не ограничивая общности, будем говорить об уравнениях движения, подразумевая как движение по спирали так и движение в “хвостовике”.

1.3. Характер движения сферической ЛМ: режимы качения и качения с проскальзыванием.

В зависимости от скорости движения и угла захода лазерная мишень будет либо катиться, либо скользить, а после выполнения определенных условий - катиться. Сформулируем эти условия и рассмотрим момент перехода из скольжения в качение, то есть момент, когда сила трения качения $F_{f\ roll}$ равна силе трения скольжения $F_{f\ slide}$.

$$F_{f\ roll} = \frac{\zeta mg \cos\alpha}{1+\zeta} (tg\ \alpha + \frac{k_r}{\zeta} \Phi(V_m)) = F_{f\ slide} = k_s mg \cos\alpha \Phi(V_m).$$

$$\text{То есть } tg\ \alpha = (\frac{k_r}{\zeta} - \frac{\zeta+1}{\zeta} k_s) \Phi(V_m) = \frac{1}{\eta} \Phi(V_m), \eta = (\frac{k_r}{\zeta} - \frac{\zeta+1}{\zeta} k_s)^{-1}.$$

Условия на режимы качения и скольжения в зависимости от скорости и угла захода спирали можно сформулировать следующим образом:

а) если в момент времени t

$$tg\ \alpha \leq \frac{1}{\eta} \Phi(V_m(t)) \text{ и } V_r(t) = V_m(t) \quad (11),$$

то движение сферы будет качением. В зависимости от участка установки, по которой она движется, математически движение будет описываться формулами (5) или (8).

б) если в момент времени t не выполнено хотя бы одно из условий (11), то движение мишени будет скольжением. В зависимости от того, в какой спирали (увеличивающей или уменьшающей скорость) или “хвостовике” движется мишень, её движение будет подчиняться формулам (6) и (8), в случае сонаправленности векторов скорости качения и скольжения, или (9) и (10), в случае разнонаправленности. Как только в момент времени t^* будет выполнено условие (11), движение мишени станет качением.

По условию нашей задачи спираль 1 и “хвостовик” должны разгонять лазерную мишень, а значит скорость $\dot{V}_m \geq 0$, то есть правая часть уравнений (5) и (6) должна быть больше нуля, что приведет к следующим условиям (под α подразумеваем α_0, α_1):

$$\text{а) } tg\ \alpha \geq k_s \Phi(V_m(t)) \text{ для скольжения и} \quad (12)$$

$$\text{б) } tg\ \alpha \geq k_r \Phi(V_m(t)) \text{ для качения.}$$

Функция $\Phi(V_m(t))$ не убывает на отрезке $[V_m(0); V_m(t_0)] \cup [V_m(t_0); V_m(t_1)]$, где t_0 - время движения в “хвостовике”,

t_1 - время движения в спирали 1, $V_m(t_0)$ -скорость на выходе из “хвостовика” и на входе в разгоняющую спираль, $V_m(t_1)$ - скорость на выходе из разгоняющей спирали.

Для спирали 2 тем же рассуждением приходим к следующим ограничениям:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha_2 \leq k_s \Phi(V_m(t)) \text{ для скольжения и} \quad (13)$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} \alpha_2 \leq k_r \Phi(V_m(t)) \text{ для качения}$$

$\Phi(V_m(t))$ - функция невозрастающая на отрезке $[V_m(t_1); 0]$, $V_m(t_1)$ - скорость на входе в тормозящую спираль, а скорость на выходе из спирали равно нулю.

Если рассмотреть совместно условия (11) и (12), (13), то получим следующую схему для значений тангенса угла наклона:

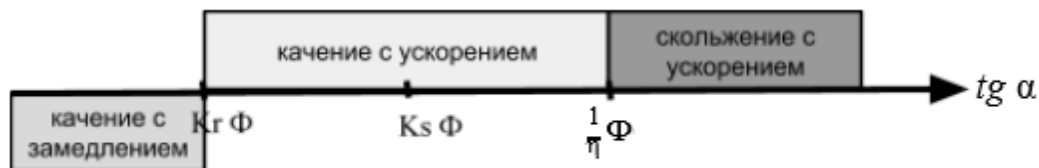


Рис.2. Режимы движения в зависимости от значения $\operatorname{tg} \alpha$ угла наклона для “хвостовика”, разгоняющей и тормозящей спиралей.

На рис.2 показана взаимосвязь тангенса угла наклона с режимом движения. В зависимости от того, какому интервалу принадлежит $\operatorname{tg} \alpha$ мишень будет либо катиться с замедлением, либо ускоряться, катясь со скольжением или без скольжения. Эти интервалы нам нужны для задания параметров для численного моделирования задачи.

II. Постановка оптимизационной задачи и полученные численные результаты.

II.1. Постановка задачи.

Для того, чтобы уменьшить повреждение мишени, требуется минимизировать скольжение мишени в криостате. То есть из всех вариантов форм криостата выбрать ту, которая минимизирует общее время скольжения t_s в криогенном канале при прочих ограничениях. А для того, чтобы мишень равномерно охлаждалась, нужно, чтобы её общее время движения в канале t_{com} было максимальным. Таким образом, получена двухкритериальная задача с критериями $t_s \rightarrow \min$ и $t_{com} \rightarrow \max$.

Внешние параметры, которые не могут изменяться при решении задачи и задаются из практических исследований: R_0, m, r_0, J . Далее полагаем, что начальная скорость мишени при входе в “хвостовик” равна нулю.

Опишем сетку параметров - набор значений, которыми следует варьировать для достижения оптимального результата: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k_s, k_r, H_0, H_1$. Высота «хвостовика» и спиралей измеряется в метрах, углы захода – в радианах. Эта сетка должна учесть технологические ограничения на характеристики элементов криогенной установки, а именно:

$$\begin{aligned} 0.06 &\leq H_0 \leq 0.1 \\ 0 &\leq H_1 \leq 0.3 \\ k_s &\geq k_r \end{aligned}$$

Кроме этого, следует смоделировать все режимы, в которых может находиться мишень, двигаясь по криостату. А именно, мишень может двигаться либо в режиме качения, если выполнено условие (11), либо в режиме скольжения, если условие (11) не выполнено. То есть, характер движения ЛМ зависит от взаимосвязи угла захода, коэффициентов трения качения и скольжения, скорости мишени (условия (12)-(13) и рис.2). Для нашего исследования нужно рассмотреть все допустимые комбинация параметров, которые задают эти режимы движения.

Для решения задачи была рассмотрена сетка внутренних параметров: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k_s, k_r, H_0, H_1$:

$$\begin{aligned} k_s &= [0.15; 0.175] \text{ с шагом } 0.005 \\ k_r &= [0.125; 0.145] \text{ с шагом } 0.005 \\ H_0 &= 0.06; 0.07; 0.08 \\ H_1 &= 0.1; 0.2; 0.3 \end{aligned}$$

С учетом ограничения, показанные на рис.2, для углов захода задаются следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= [1.1k_r; 1.2 \frac{1}{\eta}] \text{ с шагом } \frac{1}{5} (\frac{1.2}{\eta} - 1.1k_r) \\ \alpha_1 &= 1.1k_r; 1.1k_s; \frac{1.1}{\eta} \\ \alpha_2 &= [0.7k_r; 0.9k_r] \text{ с шагом } 0.2k_r \end{aligned}$$

Алгоритм движения следующий: мишень попадает в “хвостовик”, скользит или катится в нем пока не пройдет путь длины $\frac{H_0}{\sin \alpha_0}$. Далее мишень

попадает в разгоняющую спираль и движется аналогично, скользя или катясь, пока не пройдет всю спираль. Наконец, мишень попадает в тормозящую спираль и движется до тех пор, пока ее скорость не станет равной нулю. По полученному пути, который ЛМ пройдет во второй спирали, можно вычислить высоту этой спирали: $H_2 = s_2 \sin \alpha_2$, где s_2 -путь, пройденный мишенью до остановки. Для каждой из спиралей можно получить время качения и время скольжения в ней. Схематически этот алгоритм показан на блок-схеме, представленной ниже.

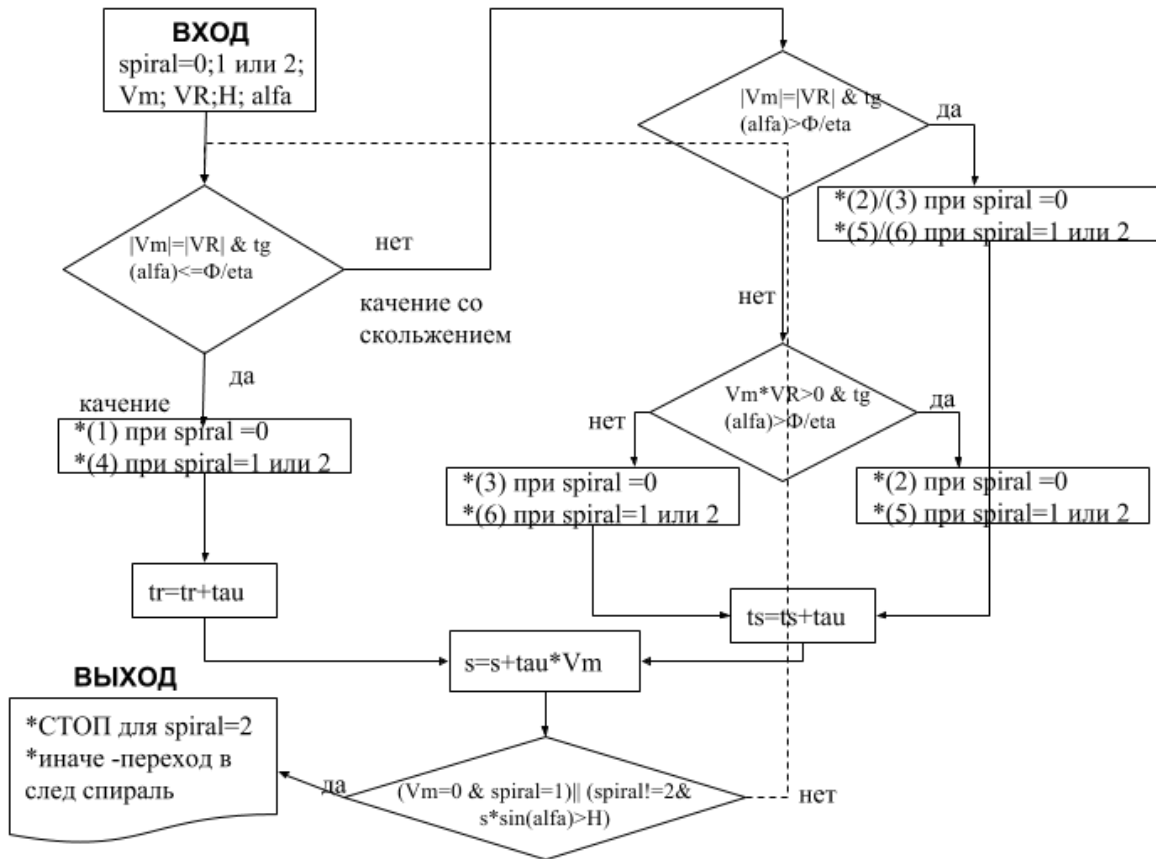


Рис.3. Блок-схема движения ЛМ в зависимости от параметров криостата.

В ней описан модуль, реализующий расчет движения мишени в “хвостовике” (если параметр $spiral=0$), либо в разгоняющей или тормозящей спирали (если параметр $spiral=1$ и 2 соответственно). Математически движение описывается формулами (5)-(10), а в схеме указаны ссылки на уравнения для соответствующего режима качения или скольжения. Для расчета общего времени движения этот модуль запускается на расчет три раза по числу элементов криогенной установки. Заметим, что для блок-схемы под параметром “eta” подразумеваем η , под “alfa” угол наклона

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ в соответствие с тем, о какой части установки говорим (то есть соответственно параметру “spiral”).

Согласно описанному алгоритму, было проведено компьютерное моделирование, при этом на выходе получено: время движения мишени в канале t_{com} и суммарное время скольжения t_s в каждом из элементов криогенной установки. То есть для каждого набора параметров была вычислена пара $(t_s; t_{com})$ - значения критериев задачи. Каждая пара критериев задает область T допустимых критериев, для которых строится граница Парето [9], [10]:

$$P(T) = \{(t_s; t_{com}) \in T: \{\forall (t_1; t_2) \in T: t_1 \leq t_s; t_2 \geq t_{com}; (t_1; t_2) \neq (t_s; t_{com})\} = \emptyset\} \quad (14)$$

II.2. Результаты численного решения задачи.

Результаты полученного моделирования показаны в таблицах и на рисунках ниже.

- 1) На рисунках по вертикальной оси отложено общее время движение мишени в “хвостовике” и всех спиралях t_{com} , по горизонтальной - общее время скольжения мишени t_s . Серым цветом показан набор критериев $(t_s$ и $t_{com})$, полученный для каждого из значений сетки, а граница Парето указана черным.

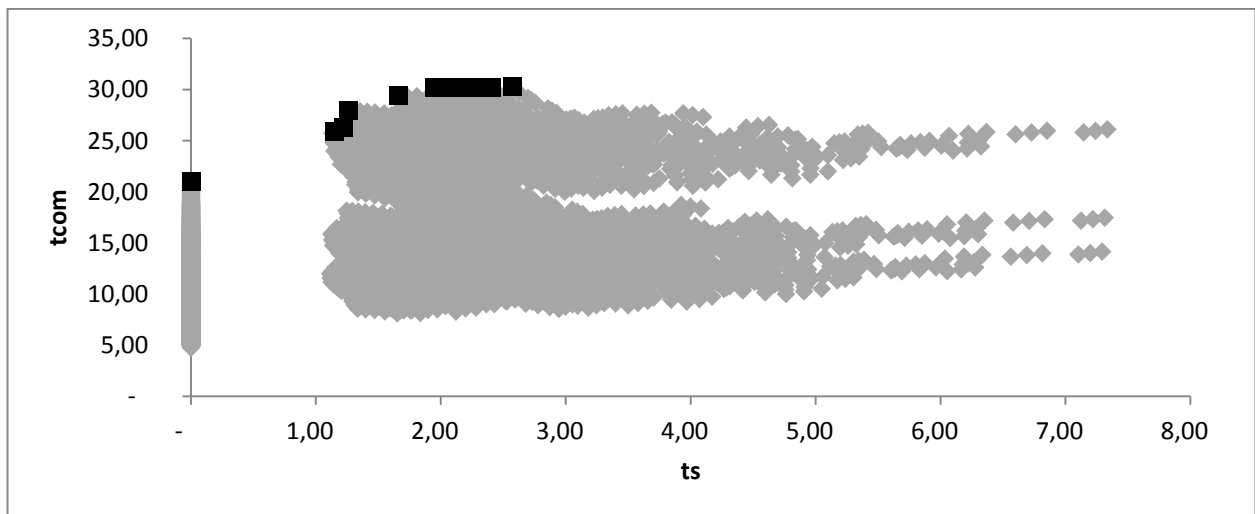


Рис.4. Область критериев, полученная при моделировании сетки параметров, с указанием Парето границы.

В таблице приведены критерии, попавшие в границу Парето, и значения исследуемых параметров для них. Для каждой спирали указано время скольжения в ней $t_{s_0}, t_{s_1}, t_{s_2}$, причем $t_s = t_{s_0} + t_{s_1} + t_{s_2}$

t_{com}	t_s	t_{s0}	t_{s1}	t_{s2}	ks	kr	α_0	α_1	α_2	H_0	H_1	H_2
30,264	2,572	0	1,796	0,776	0,15	0,125	0,138	0,207	0,112	0,08	0,3	3,113
30,242	2,405	0	1,632	0,773	0,155	0,125	0,138	0,221	0,112	0,08	0,3	3,183
30,227	2,266	0	1,497	0,769	0,16	0,125	0,138	0,235	0,112	0,08	0,3	3,246
30,213	2,147	0	1,384	0,763	0,165	0,125	0,138	0,249	0,112	0,08	0,3	3,299
30,2	2,043	0	1,287	0,756	0,17	0,125	0,138	0,263	0,112	0,08	0,3	3,346
26,32	1,219	0	0,52	0,699	0,17	0,125	0,167	0,263	0,112	0,08	0,1	2,79
21,06	0	0	0	0	0,175	0,125	0,138	0,193	0,112	0,08	0,3	0,928
27,99	1,259	0	0,599	0,66	0,175	0,125	0,138	0,277	0,112	0,08	0,1	2,667
29,374	1,657	0	0,936	0,721	0,175	0,125	0,138	0,277	0,112	0,08	0,2	3,106
30,188	1,952	0	1,204	0,748	0,175	0,125	0,138	0,277	0,112	0,08	0,3	3,387
25,9	1,148	0	0,438	0,71	0,175	0,125	0,203	0,277	0,112	0,08	0,1	2,913

Получен обширный набор параметров криостата, который дает оптимальные времена скольжения и качения, однако для большей части из них получается высота тормозящей спирали более двух метров, то есть при движении в спирали 1 ЛМ успевает слишком сильно разогнаться. Поэтому нужно ограничить область критериев и исследовать эту новую область.

2) Если учитывать ограничение конструктивного характера, что общая высота криогенного канала не должна превышать 1.5 м, то есть $H_0 + H_1 + H_2 \leq 1.5$ м., то, исключив из сетки параметров неподходящие значения H_2 , получим область, показанную на рисунке серым.

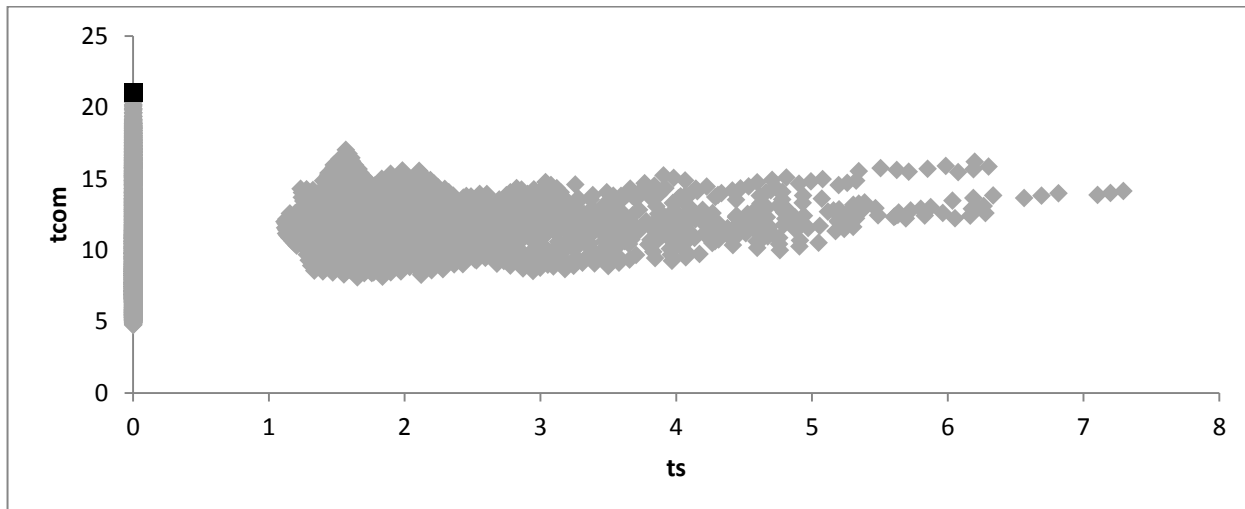


Рис.5. Область критериев, полученная при моделировании сетки параметров с условием ограниченности высоты H_2 , с указанием Парето границы.

Для нее точкой, которая является границей Парето будет $t_s = 0$ с;
 $t_{com} = 21,06$ с.

t_{com}	t_s	t_{s0}	t_{s1}	t_{s2}	k_s	k_r	α_0	α_1	α_2	H_0	H_1	H_2
21,06	0	0	0	0	0,175	0,125	0,138	0,193	0,112	0,08	0,3	0,928

Оптимальным является движение, при котором мишень только катится без проскальзывания. Однако, мы можем в рамках нашего исследования исключить этот вариант, чтобы принять во внимание и варианты решения со скольжением.

3) Если в рамках нашей задачи рассматривать только те значения критериев, для которых общее время скольжения $t_s \neq 0$, то есть только те параметры, которые обеспечивают движение мишени с проскальзыванием, то граница Парето будет представлять собой ряд точек, которые указаны на рисунке черным и занесены в таблицу ниже.

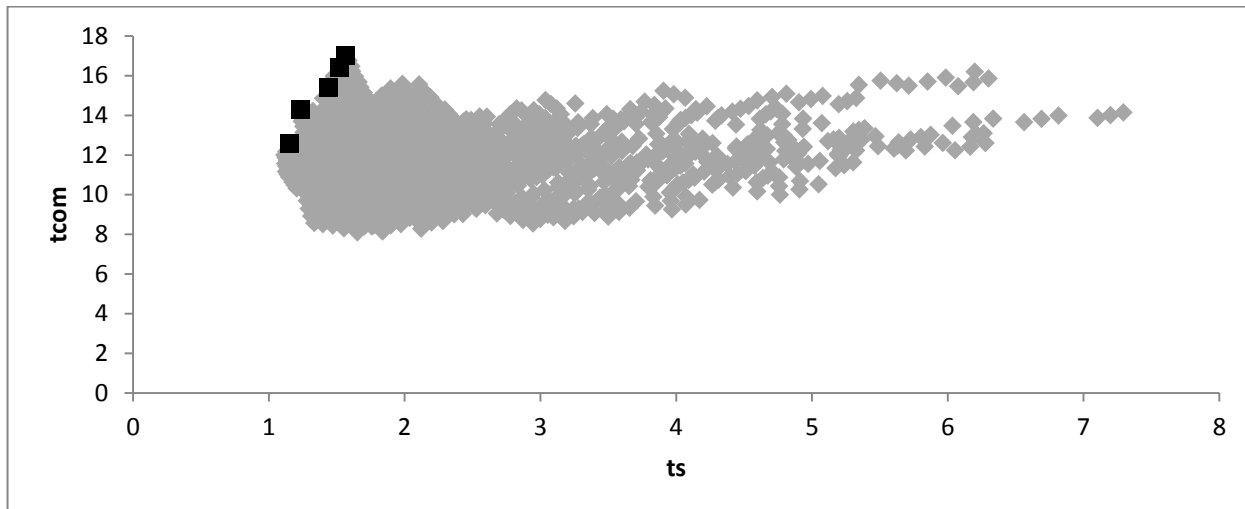


Рис.6. Область критериев, полученная при моделировании сетки параметров с условием ограниченности высоты H_2 , с указанием Парето границы за исключением точек только режима качения без скольжения.

t_{com}	t_s	t_{s0}	t_{s1}	t_{s2}	k_s	k_r	α_0	α_1	α_2	H_0	H_1	H_2
17,04	1,57	0	0,94	0,62	0,15	0,13	0,14	0,20	0,10	0,08	0,10	1,31
16,40	1,52	0	0,92	0,60	0,16	0,14	0,15	0,20	0,11	0,08	0,10	1,31
15,41	1,44	0	0,86	0,57	0,17	0,14	0,15	0,22	0,11	0,06	0,10	1,33
14,31	1,23	0	0,60	0,63	0,18	0,13	0,14	0,28	0,09	0,08	0,10	1,02
12,58	1,15	0	0,48	0,67	0,18	0,13	0,17	0,28	0,09	0,08	0,10	1,12

Указанные параметры приводят к времени движения по криостату меньшие, чем для предыдущего случая (21.06 секунды), а общее время скольжения находится в границах от 1.15 секунды до 1.57 секунды. Полученные соотношения требуют дальнейшего учета износа мишени, однако они могут быть проверены практическим построением криогенной установки и проведением испытаний.

Таким образом, в работе получены расчетные оптимальные значения времени движения мишени в криогенном канале, а также набор параметров самой установки, при которых это оптимальное движение реализуется. Эти варианты, как с “чистым” качением, так и с качением со скольжением, дают шесть вариантов конструкции криостата. По ним было проведено

практическое исследование качественных свойств движения лазерной мишени: было построено несколько криогенных установок с различной конфигураций, отвечающих оптимальным параметрам, установленным при численном моделировании, и проведены замеры времени движения мишени. Полученные в ходе эксперимента время качения и время скольжения оказались близки к расчетным. Об исследовании было рассказано в ходе конференций [2], [11], а результаты использованы для изучения других этапов жизненного цикла лазерной мишени [12].

Литература.

1. Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Корешева Е.Р. Состояние проблемы криогенных топливных мишеней в современной программе инерциального термоядерного синтеза // Вестник РАЕН. 2007. №2. С.15–20.
2. Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Малинина Е.А. и др. FST-технологии для производства криогенных мишеней класса HIPER // Тезисы докладов 38-й международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. 2011. С.131-131.
3. Белолипецкий А.А., Малинина Е.А., Семенов К.О. Оптимизация процесса заполнения лазерных мишеней радиоактивными изотопами водорода //Труды VI Московской международной конференции По Исследованию Операций (ORM2010), М.:МАКС Пресс, 2010. С.133-135.
4. Белолипецкий А.А., Малинина Е.А., Семенов К.О. Анализ математической модели заполнения оболочек лазерных мишеней радиоактивным газом //Сборник научных трудов «Математические модели и задачи управления». М.: МФТИ, 2011. С.4-13.
5. A.A. Belolipetskii, E.A. Malinina Asymptotic Solution of a Nonlinear Initial–Boundary Value Problem for the Diffusion Equation with a Small Parameter Multiplying the Time Derivative // Computational Mathematics and Modeling. 2014. 25. N 1. P.9-26.
6. A.A. Belolipetskii, E.A. Malinina and K. O. Semenov Mathematical model of fuel layer degradation when the laser target is heated by thermal radiation in the reactor working chamber // Computational Mathematics and Modeling. 2010. 21. N 1. P.1-17.

7. Белолипецкий А.А. Математическое моделирование процесса десублимации изотопов водорода в лазерной мишени // Труды МФТИ. 2009. 1. №4. С.7 -22.
8. Белолипецкий А.А., Малинина Е.А., Семёнов К.О. Математическая модель качения массивной сферы по спиралевидной трубке // Сборник научных трудов «Математическое моделирование информационных систем». М.: МФТИ, 2012. С.18-26
9. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений // М.: МАКС Пресс, 2008.
10. Белолипецкий А.А., Горелик В.А. Экономико-математические методы // М.: Академия, 2010.
11. Александрова И.В., Корешева Е.Р., Малинина Е.А. и др. Оптимизация процесса FST- формирования при движении массива криогенных мишеней в спиральном вакуумном канале: математическое моделирование и эксперимент // Тезисы докладов 38-й международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. 2011. С.132-133.
12. Александрова И.В., Белолипецкий А.А., Корешева Е.Р., и др. Монография. Криогенные мишени для реактора. Ч.1 // Препринт. М.: ФИАН им. П.Н.Лебедева, 2012.