

А.А. Белолипецкий, Е.А. Малинина, К.О. Семенов

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ КАЧЕНИЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО СПИРАЛЕВИДНОМУ КАНАЛУ.

Более полувека назад мировое физическое сообщество сформулировало проблему использования термоядерной энергии в мирных целях. Исследование технологических возможностей решения этой проблемы происходит в настоящее время в двух направлениях. Это магнитный термоядерный синтез (МТС) и инерциальный термоядерный синтез (ИТС). Впервые основные идеи ИТС были опубликованы в работе [1]. ИТС предполагает наличие контейнера, или лазерной мишени (ЛМ), содержащего твердое термоядерное топливо (например, дейтерий и тритий), который облучается мощным лазерным пучком с целью получения необходимых условий зажигания термоядерной реакции. Этапы технологии производства ЛМ описаны в [2-4]. Один из этапов этой технологии состоит в том, что сферическая ЛМ, заполненная газообразным топливом, движется в канале криостата, охлажденного до сверхнизких температур, в результате чего газообразное топливо оседает на внутренней стенке оболочки в виде твердой фазы [5]. При этом важным условием движения ЛМ в канале является минимизация пути скольжения, когда внешняя оболочка ее подвергается механическим повреждениям. Эта тема частично изложена в статьях [3], [6-8]. В данной работе дано полное исследование режимов движения ЛМ в зависимости от формы канала и начальных условий движения.

I. Качение.

Ниже будут определены необходимые и достаточные условия, при которых сферическая оболочка радиуса r_0 , массы m , с моментом инерции J относительно центра будет катиться по спиралевидному каналу радиуса R_0 с углом наклона спирали к горизонту α .

Обозначим $V_m(t)$ скорость движения центра сферы, а $V_R(t)$ линейную скорость вращения вокруг центра точек сферы, лежащих в плоскости векторов \mathbf{V}_m и нормали \mathbf{n} к поверхности спирали, проведенной в точке касания (Рис. 1). Если $\omega(t)$ угловая скорость вращения сферы вокруг оси, проходящей через её центр перпендикулярно векторам \mathbf{V}_m и \mathbf{n} , то

$$V_R(t) \equiv r_0 \omega(t). \quad (1)$$

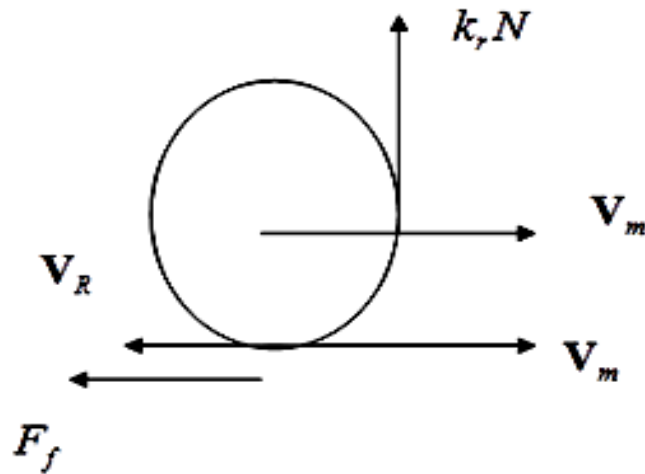


Рис. 1

Условимся, что угловая скорость положительна, если вращение происходит по часовой стрелке, и соответственно $V_m(t)$ положительна, если движение происходит слева направо, (Рис. 1).

Обозначим k_s, k_r коэффициенты трения скольжения и качения. Всегда $k_s > k_r$. Введем безразмерную функцию

$$\Phi(V) = \sqrt{1 + \frac{V^4 \cos^2 \alpha}{g^2 R_0^2}} \quad (2)$$

и безразмерный момент инерции $\zeta = \frac{J}{mr_0^2}$. Обозначим через N силу реакции опоры на оболочку. Модуль её значение равен $N = mg \cos \alpha \Phi(V_m)$.

Определение. Будем говорить, что в момент времени t оболочка катится, если точка касания сферы находится в состоянии покоя, т.е. $\mathbf{V}_m + \mathbf{V}_R = 0$, (Рис. 1). Отсюда следует равенство модулей скоростей

$$V_m(t) = V_R(t). \quad (3)$$

В противном случае движение оболочки назовём скольжением.

Очевидно, что функции $V_m(t)$ и $V_R(t)$ являются непрерывными. Кроме того, справедливы два простых утверждения.

Лемма 1. Если непрерывная функция $f(t)$ отлична от нуля в точке a , то существует окрестность точки a , в которой знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$.

Лемма 2. Если непрерывная функция $f(t)$ равна нулю в точке t_0 и $\dot{f}(t_0) > 0$ то существует число $\tau > 0$ такое, что $f(t) > 0 \forall t \in (t_0, t_0 + \tau)$.

Теорема 1. Если на некотором отрезке $[t_0, t_1]$, ($t_1 > t_0$), движение оболочки является качением, то с необходимостью выполняется условие

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \Phi(V_m(t)) \text{ при } t \in [t_0, t_1]. \quad (4)$$

Доказательство. По определению для всех моментов времени $t \in [t_0, t_1]$ справедливо равенство (3). Запишем законы изменения импульса и момента импульса оболочки относительно её центра (см. Рис. 1).

$$m \dot{V}_m = mg \cdot \sin \alpha - F_f, \quad (5)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} \equiv \frac{J}{r_0} \dot{V}_R = r_0 (F_f - k_r N). \quad (6)$$

Здесь F_f сила трения, $k_r N$ - сила трения качения. Очевидно, что

$$F_f \leq F_{\max} = k_s N = k_s mg \cos \alpha \cdot \Phi(V_m). \quad (7)$$

В этом случае будем говорить, что сила трения удовлетворяет естественным законам динамики. Теперь уравнения (5)-(6) запишутся как

$$\dot{V}_m = g \cdot \sin \alpha - F_f / m, \quad (8)$$

$$\dot{V}_R = \frac{1}{\zeta} \left(F_f / m - k_r g \cdot \cos \alpha \cdot \Phi(V_m) \right). \quad (9)$$

По определению для всех моментов времени $t \in [t_0, t_1]$ справедливо равенство скоростей (3), а значит и равенство ускорений $\dot{V}_R = \dot{V}_m$. Приравняв теперь правые части (8)-(9), получим выражение для силы трения

$$F_f = \frac{mg\zeta \cos \alpha}{1 + \zeta} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\zeta} k_r \Phi(V_m) \right). \quad (10)$$

Подставив его в (8) или (9) получим окончательно, что

$$\dot{V}_m = \frac{g \cos \alpha}{1 + \zeta} (\operatorname{tg} \alpha - k_r \Phi(V_m)). \quad (11)$$

Теперь утверждение теоремы следует из (10) и (7).

Замечание. Из способа доказательства теоремы 1 следует, что неравенства (4) и (7) равносильны.

Лемма 3. Если в некоторый момент времени t_0 справедливо равенство (3) и условие (4) выполняется для всех $t \in [t_0, t_1]$, ($t_1 > t_0$), где $V_m(t)$ есть решение дифференциального уравнения (8), то движение на отрезке $[t_0, t_1]$ является качением.

Доказательство. Из условия (4) следует, что сила трения (10) удовлетворяет условию (7), т.е. удовлетворяет естественным законам динамики. Подставим выражение (10) в систему уравнений (8)-(9) и получим тождество $\dot{V}_R \equiv \dot{V}_m$. Поскольку начальные значения и дифференциальные уравнения (8)-(9) для $V_m(t)$ и $V_R(t)$ совпадают, то в силу единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $V_m(t) = V_R(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Отсюда и из определения качения следует утверждение леммы.

Лемма 4. Если в некоторый момент времени t_1 справедливо равенство (3) и условие (4) в этот момент выполняется как строгое неравенство, то существует $\tau > 0$, что для всех $t \in [t_1, t_1 + \tau]$, движение мишени будет качением.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t) \equiv \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \Phi(V_m(t)) - tg\alpha. \quad (12)$$

Поскольку $\Phi(V)$ и $V_m(t)$ непрерывные функции своих аргументов, то и их суперпозиция $f(t)$ непрерывна. Т.к. $f(t_1) > 0$, то по лемме 1 существует число $\tau > 0$ такое, что $f(t) > 0 \forall t \in [t_1, t_1 + \tau]$. Т.е. условие (4) будет выполняться для всех $t \in [t_1, t_1 + \tau]$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость леммы 4.

Лемма 5. Если в некоторый момент времени t_0 справедливо равенство (3) и условие (4) в этот момент выполняется как равенство, то существует $\tau > 0$, что для всех $t \in [t_1, t_1 + \tau]$, движение мишени будет качением.

Доказательство. Вновь рассмотрим функцию (12). По условию леммы $f(t_1) = 0$. Найдём

$$\dot{f}(t_1) \equiv \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \dot{\Phi}(V_m(t_1)) = \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \frac{2V_m^3(t_1) \cos^2 \alpha}{g^2 R_0^2 \Phi(V_m(t_1))} \dot{V}_m(t_1). \quad (13)$$

Покажем, что $\dot{f}(t_1) > 0$. Предположим обратное, т.е. пусть $\dot{f}(t_1) \leq 0$. Тогда из (13) вытекает, что $\dot{V}_m(t_1) \leq 0$. Т.к. по условию леммы условие (4) выполняется как равенство, то в силу замечания к теореме 1 в момент t_1 : $F_f = F_{\max} = k_s N = k_s mg \cos \alpha \cdot \Phi(V_m)$. Теперь из (8) получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_m(t_1) &= g \cdot \sin \alpha - F_f(t_1) / m = g \cdot \sin \alpha - F_{\max}(t_1) / m = \\ &= g \sin \alpha - k_s g \cos \alpha \cdot \Phi(V_m(t_1)) \leq 0, \text{ или} \\ &tg\alpha \leq k_s \cdot \Phi(V_m(t_1)).\end{aligned}$$

Но по условию леммы неравенство (4) в момент времени t_1 выполняется как равенство, т.е.

$$tg\alpha = \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \Phi(V_m(t_1)) > k_s \Phi(V_m(t_1)).$$

Полученное противоречие говорит о том, что $\dot{f}(t_1) > 0$. Но тогда по лемме 2 существует число $\tau > 0$ такое, что $f(t) > 0 \forall t \in (t_1, t_1 + \tau)$ и в силу непрерывности $f(t) \geq 0 \forall t \in [t_1, t_1 + \tau]$. Отсюда и из определения функции (12) следует, что условие (4) выполняется на отрезке $t \in [t_1, t_1 + \tau]$. Таким образом, выполнены все условия леммы 3. Т.е. движение на отрезке $t \in [t_1, t_1 + \tau]$ является качением. Лемма доказана.

Теорема 2. Для того чтобы для всех $t \geq t_0$ движение сферы было качением необходимо и достаточно, чтобы в момент времени t_0 выполнялись условия (3), (4), т.е.

$$1. V_m(t_0) = V_R(t_0); \quad (14)$$

$$2. tg\alpha \leq \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \Phi(V_m(t_0)). \quad (15)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оболочка катится при $t \geq t_0$. Тогда по теореме 1 выполняются условия (14)-(15).

Достаточность. Пусть выполнены условия (14)-(15). Далее доказательство проведём методом от противного. Предположим, что теорема неверна. Это означает, что на отрезке времени $[t_0, t_1]$, ($t_1 \geq t_0$), оболочка катится, а на некотором интервале (t_1, t_2) , ($t_2 > t_1$), скользит. Поскольку на отрезке времени $[t_0, t_1]$ оболочка катилась, то по теореме 1 на правом конце отрезка в точке t_1 выполняются условия (14)-(15).

Предположим, что условие (4) выполнено как строгое неравенство. Тогда по лемме 4 существует число $\tau > 0$ такое, что для всех $t \in [t_1, t_1 + \tau]$ движение мишени будет качением. Это противоречит нашему предположению.

Пусть теперь условие (4) выполняется в виде равенства. Вновь по лемме 5 существует число $\tau > 0$ такое, что для всех $t \in [t_1, t_1 + \tau]$ движение мишени будет качением. И мы снова входим в противоречие с предположением о существовании интервала скольжения. Следовательно, при всех значениях $t \geq t_0$ движение сферы будет качением. ч.т.д.

Теорема 2 является основным результатом этого раздела.

Следствие 1. Пусть в момент t_0 : $V_m(t_0) = V_R(t_0) = 0$. Тогда необходимым и достаточными условиями того, что движение оболочки при $t \geq t_0$ будет качением, является неравенство

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right). \quad (16)$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2, в которой $V_m(t_0) = 0$.

Следствие 2. Пусть в момент t_0 : $V_m(t_0) = V_R(t_0)$ и выполнено условие (16). Тогда движение оболочки при $t \geq t_0$ будет качением.

Доказательство следует из теоремы 2, т.к. из неравенства (16) вытекает справедливость неравенства (15).

Итак, если справедливо условие (16), то движение оболочки таково:

а) Если в начальный момент $V_m(0) = V_R(0)$, то дальнейшее движение есть качение.

б) Если в начальный момент $V_m(0) \neq V_R(0)$, то оболочка некоторое время скользит, а затем, при достижении условия (14), скольжение переходит в качение.

Рассмотрим, случаи, когда условие (16) нарушено. Итак, пусть

$$\operatorname{tg} \alpha > \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right). \quad (17)$$

Запишем условие (15) в равносильной форме, выразив скорость через иные параметры:

$$V_m(t_0) \geq V_{roll} = \frac{\sqrt[4]{(\eta^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) R_0^2 g^2 \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad (18)$$

где $\eta = \frac{\zeta}{(1 + \zeta)k_s - k_r}$. Неравенство (17) гарантирует положительность выражение под корнем в формуле (18).

Если справедливо условие (17), то структура траектории оболочки будет следующей:

а) Если в начальный момент $V_m(0) = V_R(0)$, и выполнено неравенство

$$V_m(0) \geq V_{roll} = \frac{\sqrt[4]{(\eta^2 tg^2 \alpha - 1) R_0^2 g^2 \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad (19)$$

то оболочка будет двигаться без скольжения, т.е. катиться. Это следует из теоремы 2 и равносильности неравенств (15) и (18);

б) Если в начальный момент $V_m(0) \neq V_R(0)$, то оболочка некоторое время скользит, а затем, при достижении условий (14), (15) (или, что одно и то же (14),(18)), скольжение переходит в качение;

в) Если в начальный момент $V_m(0) = V_R(0)$, но условие (19) нарушено, оболочка будет сначала скользить, а затем, при достижении условий (14), (15), начнет катиться.

II. Скольжение.

До сих пор мы использовали лишь уравнения качения. Перейдем к изучению процесса скольжения.

А) Если $V_m > V_R$, то оболочка катится с проскальзыванием, причем сила трения скольжения равна $F_{max} = k_s N$, где $N = mg \cos \alpha \cdot \Phi(V_m)$, и направлена противоположно вектору скорости поступательного движения (Рис. 2). Уравнения

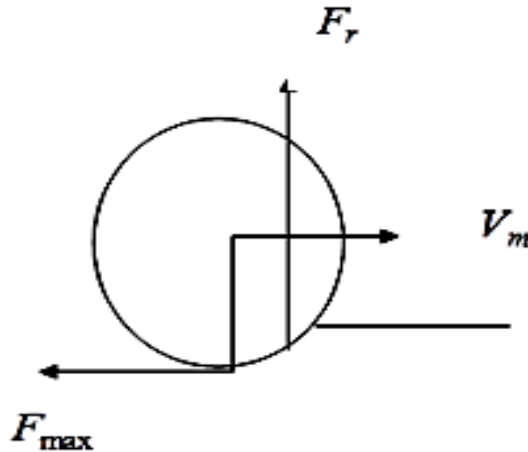


Рис. 2

$$\dot{V}_m = G_{m1}(V_m, \alpha) \equiv g \sin \alpha - k_s g \cos \alpha \cdot \Phi(V_m), \quad (20)$$

$$\dot{V}_R = G_{R1}(V_m, \alpha) \equiv \frac{1}{\zeta} (k_s - k_r) g \cos \alpha \cdot \Phi(V_m) \quad (21)$$

Б) Если $V_m < V_R$, то оболочка катится с проскальзыванием, причем сила трения скольжения так же равна $F_{\max} = k_s N$, где $N = mg \cos \alpha \cdot \Phi(V_m)$, и сонаправлена вектору скорости поступательного движения (Рис. 3).

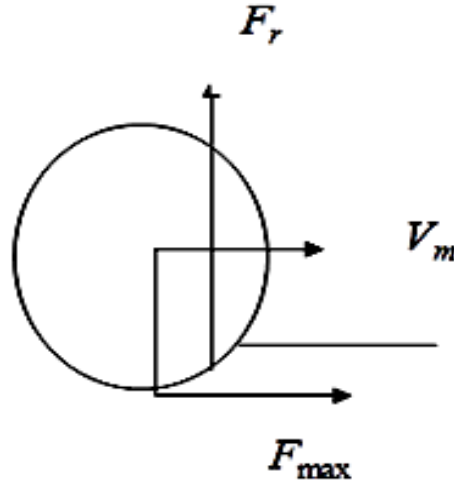


Рис. 3

Уравнения динамики в этом случае

$$\dot{V}_m = G_{m2}(V_m, \alpha) \equiv g \sin \alpha + k_s g \cos \alpha \cdot \Phi(V_m), \quad (22)$$

$$\dot{V}_R = G_{R2}(V_m, \alpha) \equiv -\frac{1}{\zeta} (k_s + k_r) g \cos \alpha \cdot \Phi(V_m) \quad (23)$$

Используя приведенные уравнения динамики скольжения можно изобразить годографы скоростей (см. Рис. 4-7). Для этого заметим, что из уравнений (20)-(21) и (22)-(23) в случаях:

А) $V_m > V_R$

$$\frac{dV_R}{dV_m} = \frac{(k_s - k_r) \cdot \Phi(V_m)}{\zeta [tg \alpha - k_s \cdot \Phi(V_m)]} \equiv f_1(\Phi); \quad (24)$$

Б) $V_m < V_R$

$$\frac{dV_R}{dV_m} = -\frac{(k_s + k_r) \cdot \Phi(V_m)}{\zeta [tg \alpha + k_s \cdot \Phi(V_m)]} \equiv f_2(\Phi). \quad (25)$$

Предварительно заметим, что кривые $V_R(V_m)$ выпуклы вниз в случае А) и выпуклы вверх в случае Б). Это следует из неравенств

$$\frac{df_1}{d\Phi} = \frac{(k_s - k_r) \cdot tg \alpha}{\zeta [tg \alpha - k_s \cdot \Phi(V_m)]^2} > 0, \quad \frac{df_2}{d\Phi} = -\frac{(k_s + k_r) \cdot tg \alpha}{\zeta [tg \alpha + k_s \cdot \Phi(V_m)]^2} < 0.$$

Направления стрелок на годографах определяется знаками правых частей уравнений (20)-(23). Ниже будут разобраны пять различных вариантов устройства канала. Во всех рисунках жирная биссектриса - это годограф траектории качения. Все остальные кривые – годографы траекторий скольжения.

1) $\operatorname{tg}\alpha \leq k_r$ (Рис. 4)

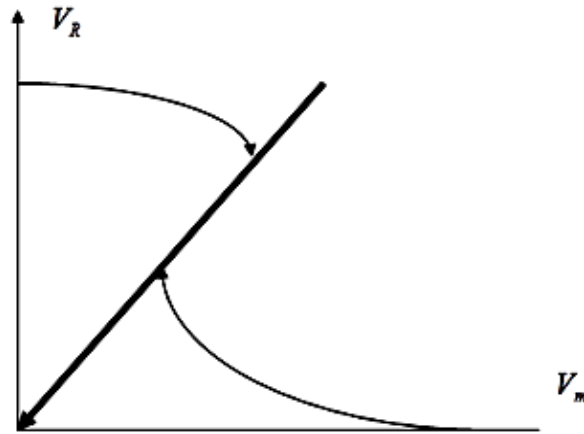


Рис. 4

2) $k_r < \operatorname{tg}\alpha \leq k_s$ (Рис. 5). Введем предельную скорость, при которой меняет знак правая часть в уравнении (11):

$$V_r = \frac{\sqrt[4]{(\operatorname{tg}^2 \alpha / k_r^2 - 1) R_0^2 g^2 \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}.$$

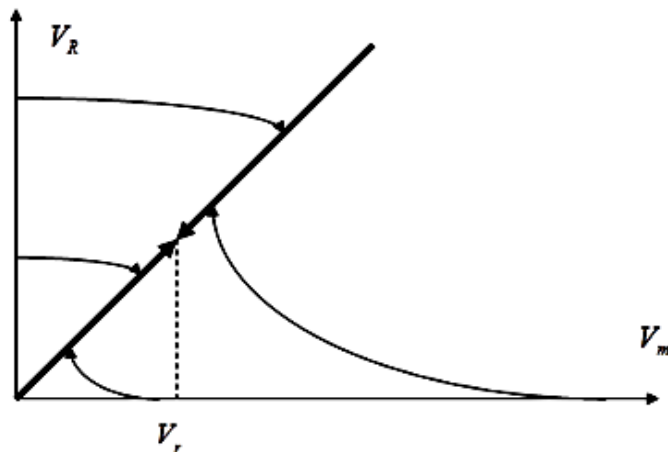


Рис. 5

3) $k_s < \operatorname{tg}\alpha \leq \frac{1}{\eta} = \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right)$, (Рис. 6). Введем предельную скорость, при которой меняет знак правая часть в уравнении (20)

$$V_s = \frac{\sqrt[4]{(tg^2 \alpha / k_s^2 - 1) R_0^2 g^2 \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} < V_r.$$

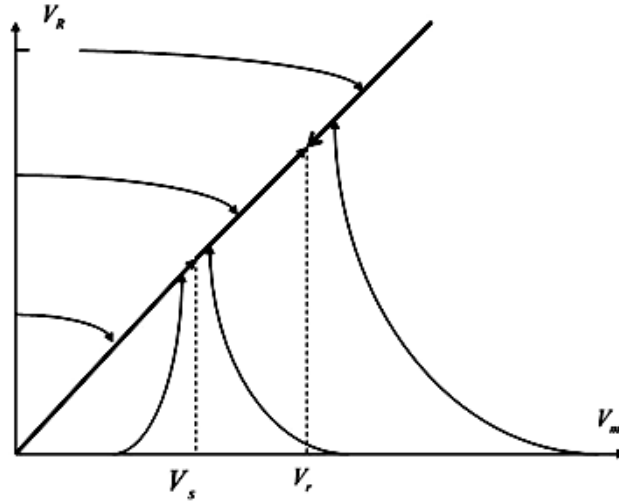


Рис. 6

4) $tg \alpha > \frac{1}{\eta} = \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right)$, (Рис. 7). Введем предельную скорость, при которой становится справедливым неравенство (4):

$$V_{roll} = \frac{\sqrt[4]{(\eta^2 tg^2 \alpha - 1) R_0^2 g^2 \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} < V_s.$$

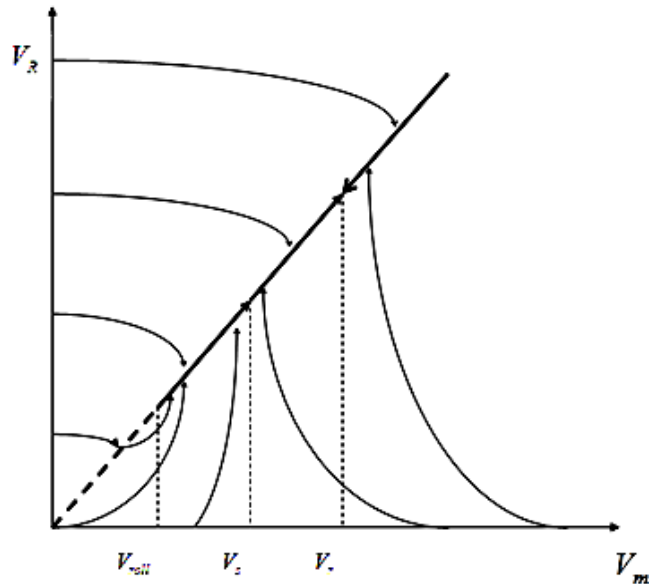


Рис. 7

Выведем формулу для скорости V_{ra} , при которой скольжение переходит в качение. Если это происходит в момент времени t , то $V_R(t) = V_m(t) = V_{ra}$.

1. Если в начальный момент $V_R(0) < V_m(0)$, то интегрируя (24), получим

$$V_{ra} = \frac{k_s - k_r}{\zeta} \int_{V_m(0)}^{V_{ra}} \frac{\Phi(V_m) dV_m}{\text{tg}\alpha - k_s \Phi(V_m)} + V_R(0); \quad (26)$$

На рисунках – это координаты точек пересечения биссектрисы с дугами, лежащими под биссектрисой.

2. Если $V_R(0) = V_m(0)$, но в начальный момент $t_0 = 0$ нарушено условие (15), (оно же (19)), (на Рис. 7 – это координаты пунктирных точек биссектрисы), то формула для V_{ra} остается прежней.

3. Если $V_R(0) > V_m(0)$, то формула для скорости V_{ra} , выводится аналогично из (25):

$$\begin{aligned} V_{ra} &= - \int_{V_m(0)}^{V_{ra}} \frac{(k_s + k_r) \cdot \Phi(V_m)}{\zeta [\text{tg}\alpha + k_s \cdot \Phi(V_m)]} dV_m + V_R(0) = \\ &= \frac{k_s + k_r}{\zeta} \int_{V_{ra}}^{V_m(0)} \frac{\Phi(V_m)}{[\text{tg}\alpha + k_s \cdot \Phi(V_m)]} dV_m + V_R(0). \end{aligned} \quad (27)$$

На рисунках – это координаты точек пересечения биссектрисы с дугами, лежащими над биссектрисой.

Покажем, наконец, что значения V_{ra} , вычисленные по формуле (26) не меньше V_{roll} , т.е. стрелки годографа на Рис. 7. для дуг, лежащих под биссектрисой или на ней, заканчиваются на жирной части биссектрисы, отвечающей за дальнейшее качение. Нетрудно видеть, что неравенства

$\text{tg}\alpha \leq \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \Phi(V_m)$ и $V_m \geq V_{roll}$ равносильны. Это значит, что при

$V_m < V_{roll}$ будет выполнено неравенство

$$\text{tg}\alpha > \left(k_s + \frac{k_s - k_r}{\zeta} \right) \Phi(V_m).$$

Отсюда после несложных преобразований получим неравенство

$$\frac{k_s - k_r}{\zeta} \frac{\Phi(V_m)}{\text{tg}\alpha - k_s \Phi(V_m)} < 1. \quad (28)$$

Предположим, что $V_{ra} < V_{roll}$. Тогда из полученного неравенства (28) и формулы (26) следует, что

$$V_{ra} - V_R(0) = \frac{k_s - k_r}{\zeta} \int_{V_m(0)}^{V_{ra}} \frac{\Phi(V_m) dV_m}{tg\alpha - k_s \Phi(V_m)} < V_{ra} - V_m(0) \leq V_{ra} - V_R(0).$$

Последнее неравенство следует из условия применения формулы (26), т.е. $V_R(0) \leq V_m(0)$. Нами получено, что $V_{ra} < V_{ra}$. Последнее и говорит о несостоятельности сделанного предположения. Таким образом, всегда $V_{ra} \geq V_{roll}$.

Вывод. Из рассмотрения годографа скоростей на Рис. 7 следует, что скольжение обязательно переходит в качение, при этом скорость качения стремится к постоянному значению V_r , $V_m(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} V_r$, и некоторое время движение происходит с почти постоянной скоростью V_r .

1. Пусть $V_R(0) < V_m(0)$. Определим время t_1 , через которое движение выйдет на режим качения. Для этого решим трансцендентное уравнение (26) и найдем скорость V_{ra} , при которой скольжение переходит в качение. Интегрируя уравнение (20) с начальным условием $V_m(0)$, получаем функцию $V_m(t)$. Тогда искомое время является решением уравнения $V_m(t_1) = V_{ra}$. Если $l(t)$ - длина пути, пройденной сферой за время t в режиме скольжения, то справедливы уравнения $\dot{l} = V_m, \dot{V}_m = G_{m1}(V_m, \alpha)$. Откуда получаем $\frac{dl}{dV_m} = \frac{V_m}{G_{m1}(V_m, \alpha)}$. Отсюда следует, что путь, пройденный ЛМ до выхода на

режим качения, равен $l_1 = \int_{V_m(0)}^{V_{ra}} \frac{V_m}{G_{m1}(V_m, \alpha)} dV_m$.

2. Если $V_R(0) > V_m(0)$, то время t_2 , через которое движение выйдет на режим качения определяется аналогично. Теперь надо решить уравнение (27) и найти скорость V_{ra} , при которой скольжение переходит в качение. Интегрируя уравнение (22) с начальным условием $V_m(0)$, получаем функцию $V_m(t)$. Тогда искомое время является решением уравнения $V_m(t_2) = V_{ra}$. И так же, как и выше получим, что путь, пройденный ЛМ до выхода на режим

качения, равен $l_2 = \int_{V_m(0)}^{V_{ra}} \frac{V_m}{G_{m2}(V_m, \alpha)} dV_m$.

Литература.

1. *Басов Н.Г., Крохин О.Н.* Условие разогрева плазмы излучением оптического генератора. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С.171-175.
2. *Александрова И.В., Белоліпецкий А.А., Корешева Е.Р.* Состояние проблемы криогенных топливных мишеней в современной программе инерциального термоядерного синтеза // Вестник РАН. 2007. №2. С.15–20.
3. *Александрова И.В., Белоліпецкий А.А., Корешева Е.Р., и др.* Монография. Криогенные мишени для реактора. Ч.1 // Препринт. М.: ФИАН им. П.Н.Лебедева, 2012.
4. *Александрова И.В., Белоліпецкий А.А., Малинина Е.А. и др.* FST-технологии для производства криогенных мишеней класса HIPER // Тезисы докладов 38-й международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и УТС. 2011. С.131-131.
5. *Белоліпецкий А.А.* Математическое моделирование процесса десублимации изотопов водорода в лазерной мишени // Труды МФТИ. 2009. 1. №4. С.7 -22.
6. *Белоліпецкий А.А., Малинина Е.А., Семёнов К.О.* Математическая модель качения массивной сферы по спиралевидной трубке // Сборник научных трудов «Математическое моделирование информационных систем». М.: МФТИ, 2012. С.18-26
7. *Белоліпецкий А.А., Малинина Е.А.* Численное решение двухкритериальной задачи оптимизации формы канала при движении по нему шара // Прикладная математика и информатика № 48. 2015. М.: Макс-Пресс. С. 13-26.
8. *Belolipetskii A.A., Malinina E.A.* Numerical Solution of the Two-Criterion Optimization Problem for the Shape of a Channel with a Moving Ball // Computational Mathematics and Modeling: January (2016), Volume 27, Issue 1, Page 9-19. Springer Science+Buisness Media New-York. DOI 10.1007/s10598-015-9299-5.