А.Г. Белов, Б.М. Щедрин

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПРИ РАЗБИЕНИИ РЕГРЕССОРОВ

Введение. Теорема о разбиении (декомпозиции) регрессоров или, как ее часто называют в зарубежной литературе, теорема Frisch-Waugh-Lovell (FWL), названная так в честь авторов ряда основополагающих работ [1;2], занимает важное место в экономических приложениях регрессионного анализа при введении дополнительных регрессоров[2; 3, с.68]. Эта теорема формулируется обычно применительно к выборочному уравнению множественной регрессии

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{e}, \tag{1}$$

где $\underline{y} = \left(y_1,...y_n\right)^T$ – вектор-столбец значений наблюдаемой зависимой переменной (отклика), $X = \left\|\underline{x}_1,...,\underline{x}_k\right\| \in R^{n\times k}$, $n \ge k$, $rank\left(X\right) = k$ – матрица (плана) наблюдений k линейно независимых векторов значений переменных (регрессоров), $\underline{x}_j = \left(x_{1j},...,x_{nj}\right)^T$, $\underline{\beta} = \left(\beta_1,...,\beta_k\right)^T$ – вектор-столбец неизвестных коэффициентов модели и $\underline{e} = \left(e_1,...,e_n\right)^T$ – вектор-столбец ненаблюдаемых равноточных (гомоскедастичных) некоррелированных ошибок.

Пусть наблюдаемая регрессионная модель представима в блочном виде

$$\underline{y} = X_1\underline{\beta_1} + X_2\underline{\beta_2} + \underline{e}, \tag{2}$$

где $X_1 = \left\|\underline{x}_1,...,\underline{x}_{k_1}\right\| \in R^{n\times k_1}$ и $X_2 = \left\|\underline{x}_{k_1},...,\underline{x}_k\right\| \in R^{n\times k_2}$ – матрицы наблюдений k_1 и $k_2 = k - k_1$ переменных, $rank\left(X_1\right) = k_1$, $rank\left(X_2\right) = k_2$, а $\underline{\beta}_1 \in R^{k_1\times 1}$ и $\underline{\beta}_2 \in R^{k_2\times 1}$ – вектора-столбцы соответствующих коэффициентов с числом компонент k_1 и k_2, соответственно. Таким образом, $X = \left[X_1 : X_2\right]$, $\underline{\beta}^T = \left(\underline{\beta_1}^T, \underline{\beta_2}^T\right)$. Тогда FWL-теорема утверждает, что компонента $\hat{\underline{\beta_2}}$ оценки $\hat{\underline{\beta}} = \left(X^TX\right)^{-1}X^T\underline{y}$ по методу наименьших квадратов (МНК) в регрессии $\underline{y}$ на X (1) совпадает с МНК-оценкой $\breve{\underline{\beta_2}} = \left(\breve{X}_2{}^T\breve{X}_2\right)^{-1}\breve{X}_2{}^T\underline{\breve{y}}$ в регрессии $\underline{\breve{y}} = M_1\underline{y}$ на $\breve{X}_2 = M_1X_2$ вида

$$\underline{\breve{y}} = \breve{X}_2 \underline{\beta_2} + \underline{u}, \tag{3}$$

где $M_1 = I_n - X_1 \left(X_1^T X_1 \right)^{-1} X_1^T \in R^{n \times n}$, $I_n = diag(1,...,1) \in R^{n \times n}$. При этом остаточные вектора $\underline{\hat{e}} = \underline{y} - X \underline{\hat{\beta}}$ и $\underline{\breve{u}} = \underline{\breve{y}} - \breve{X}_2 \underline{\breve{\beta}_2}$ в обеих регрессиях (1), (3) равны. Справедливо также, что если две группы регрессоров ортогональны, то есть $X_2^T X_1 = \underline{\underline{0}} \in R^{k_2 \times k_1}$, то МНК–оценки $\underline{\hat{\beta}_1}, \underline{\hat{\beta}_2}$ в уравнениях

$$\underline{y} = X_1 \underline{\beta_1} + \underline{e_1},\ \underline{y} = X_2 \underline{\beta_2} + \underline{e_2} \tag{4}$$

совпадут с МНК-оценками этих коэффициентов, полученных из (2).

Данная теорема была обобщена [4] для случая коррелированных ошибок наблюдений $\underline{e}$ с невырожденной ковариационной матрицей Σ. Тогда применяется обобщенный МНК (ОМНК) и оценки имеют вид

$$\underline{\hat{\beta}_2} = \left(\tilde{X}_2^T \Sigma^{-1} \tilde{X}_2 \right)^{-1} \tilde{X}_2^T \Sigma^{-1} \underline{\tilde{y}}, \tag{5}$$

где $\underline{\tilde{y}} = \tilde{M}_1 \underline{y}$, $\tilde{X}_2 = \tilde{M}_1 X_2$, $\tilde{M}_1 = I_n - X_1 \left(X_1^T \Sigma^{-1} X_1 \right) X_1^T \Sigma^{-1} \in R^{n \times n}$. При этом в случае ортогональности X_1 и X_2 в метрике Σ^{-1}, то есть $X_2^T \Sigma^{-1} X_1 = \underline{\underline{0}}$, ОМНК–оценки коэффициентов уравнений (4) есть

$$\underline{\hat{\beta}_1} = \left(X_1^T \Sigma^{-1} X_1 \right)^{-1} X_1^T \Sigma^{-1} \underline{y},\ \underline{\hat{\beta}_2} = \left(X_2^T \Sigma^{-1} X_2 \right)^{-1} X_2^T \Sigma^{-1} \underline{y}, \tag{6}$$

и совпадают с соответствующими ОМНК-оценками, полученными для (2).

Постановка задачи. Перечисленные выше формулы оценок получены для случая выборочной регрессии и являются следствием ряда теорем линейной алгебры с использованием свойств линейной независимости и ортогональности векторов. Однако, как известно [5, с.57], вектора значений наблюдаемых переменных могут рассматриваться как реализации случайных величин (с.в.) и тем самым обладать рядом вероятно-статистических свойств, например, быть некоррелированными [6]. В связи с этим возможно стохастическое обобщение формул для оценок коэффициентов.

Теоретическая регрессия. Рассмотрим теоретическую модель множественной линейной регрессионной зависимости

$$E\left[\eta | \underline{\xi} \right] = \underline{\beta}^T \underline{\xi}, \tag{7}$$

где зависимая $\eta | \underline{\xi}$ и объясняющая $\underline{\xi} = \left(\xi_1, ..., \xi_k \right)^T$ переменные являются с.в. с соответствующими распределениями, имеющими конечные первый и второй моменты.

Примером ситуации, описываемой (7), может являться эксперимент, в котором на исход i–го опыта y_i, описываемого с.в. $\eta_i | \underline{\xi}$, влияют факторы в виде с.в. $\xi_1,...,\xi_k$ со значениями $x_{i1},...,x_{ik}$ и аддитивные ошибки e_i, описываемые некоррелированными, одинаково распределенными с.в. ε_i, $i=1,...,n$, имеющими нулевые математические ожидания (м.о.) $E\left[\varepsilon_i\right]=0$ и одинаковые дисперсии $D\left[\varepsilon_i\right]=\sigma^2>0$. В силу гомоскедастичности величины $\left\{e_i\right\}_1^n$ можно интерпретировать как значения одной с.в. ε, эквивалентной с.в. $\left\{\varepsilon_i\right\}_1^n$. Аналогично, величины $y_1,...,y_n$ можно считать значениями одной с.в. $\eta|\underline{\xi}$.

Известно, что средней квадратичной оценкой вектора коэффициентов $\underline{\beta}$ является величина

$$\underline{\hat{\beta}}=\arg\min_{\underline{\beta}} E\left(E\left[\eta|\underline{\xi}\right]-\underline{\beta}^T\underline{\xi}\right)^2=\arg\min_{\underline{\beta}} E\left(\eta-\underline{\beta}^T\underline{\xi}\right)^2=\left(E\left[\underline{\xi}\underline{\xi}^T\right]\right)^{-1}E\left(\underline{\xi}\eta\right), \quad (8)$$

при условии невырожденности матрицы $E\left[\underline{\xi}\underline{\xi}^T\right]=\left\|E\left[\xi_i\xi_j\right]\right\|_1^k\in R^{k\times k}$. Будем предполагать, что переменные можно разбить на две группы, например, случайные вектора $\underline{\xi_1}=\left(\xi_1,...,\xi_{k_1}\right)^T$ и $\underline{\xi_2}=\left(\xi_{k_1+1},...,\xi_k\right)^T$. Тогда матрицу $E\left[\underline{\xi}\underline{\xi}^T\right]$, вектора $E\left[\underline{\xi}\eta\right]=\left(E[\xi_1\eta],...,E[\xi_k\eta]\right)^T$ и $\underline{\beta}$ можно записать в блочном виде

$$\begin{pmatrix} E\left[\underline{\xi}_1\underline{\xi}_1^T\right] & E\left[\underline{\xi}_1\underline{\xi}_2^T\right] \\ E\left[\underline{\xi}_2\underline{\xi}_1^T\right] & E\left[\underline{\xi}_2\underline{\xi}_2^T\right]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E\left[\underline{\xi}_1\eta\right] \\ E\left[\underline{\xi}_2\eta\right]\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\underline{\beta}_1 \\ \underline{\beta}_2\end{pmatrix}.$$

Для блочного обращения $E\left[\underline{\xi}\underline{\xi}^T\right]$ воспользуемся одним из вариантов формулы Фробениуса [7, с.60]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1}\end{pmatrix},$$

где $H=D-CA^{-1}B$. Тогда для оценок блочных векторов параметров справедливы представления

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\beta}_1}&=\left(E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right]\right)^{-1}\left(E\left[\underline{\xi_1}\eta\right]-E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_2}^T\right]\underline{\hat{\beta}_2}\right), \\ \underline{\hat{\beta}_2}&=H^{-1}\left(E\left[\underline{\xi_2}\eta\right]-E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_1}^T\right]\left(E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right]\right)^{-1}E\left[\underline{\xi_1}\eta\right]\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $H=E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_2}^T\right]-E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_1}^T\right]\left(E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right]\right)^{-1}E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_2}^T\right]$.

Если выполнено условие «ортогональности» $E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_1}^T\right]=\underline{\underline{0}}$, то из (9) имеем

$$\underline{\hat{\beta}_1} = \left(E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right]\right)^{-1} E\left[\underline{\xi_1}\eta\right],\ \underline{\hat{\beta}_2} = \left(E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_2}^T\right]\right)^{-1} E\left[\underline{\xi_2}\eta\right]. \qquad (10)$$

В противном случае, в предположении некоррелированности с.в. $\underline{\xi_1}, \underline{\xi_2}, \eta$

$$E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_1}^T\right] = E\left[\underline{\xi_2}\right]E\left[\underline{\xi_1}\right]^T,\ E\left[\underline{\xi_1}\eta\right] = E\left[\underline{\xi_1}\right]E[\eta], \qquad (11)$$

для блочных векторов параметров из (9) получаем представления

$$\begin{aligned} &\underline{\hat{\beta}_1} = \left(E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right]\right)^{-1} E\left[\underline{\xi_1}\right]\left(E[\eta] - E\left[\underline{\xi_2^T}\right]\underline{\hat{\beta}_2}\right), \\ &\underline{\hat{\beta}_2} = H^{-1}\left(E\left[\underline{\xi_2}\eta\right] - E\left[\underline{\xi_2}\right]S_1 E[\eta]\right), \end{aligned} \qquad (12)$$

где $H = E\left[\underline{\xi_2}\underline{\xi_2^T}\right] - E\left[\underline{\xi_2}\right]S_1 E\left[\underline{\xi_2^T}\right]$ и $S_1 = E\left[\underline{\xi_1^T}\right]\left(E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right]\right)^{-1} E\left[\underline{\xi_1}\right]$.

Возможно дальнейшее упрощение для блочных оценок коэффициентов, если дополнительно к условиям (11) предположить, что выполнено равенство

$$E\left[\underline{\xi_1}\underline{\xi_1}^T\right] = E\left[\underline{\xi_1}\right]E\left[\underline{\xi_1}\right]^T. \qquad (13)$$

Последнее условие означает, что компоненты вектора $\underline{\xi_1}$ являются с.в. с нулевой дисперсией, т.е. принимают постоянные значения. Поскольку матрица $E\left[\underline{\xi_1}\right]E\left[\underline{\xi_1}\right]^T$ обратима только при $k_1 = 1$, то не уменьшая общности, полагая $P(\xi_1 = 1) = 1$ и учитывая $E[\xi_1] = 1, S_1 = 1$, из (12) получим

$$\underline{\hat{\beta}_1} = E\eta - E\left[\underline{\xi_2^T}\right]\underline{\hat{\beta}_2},\ \underline{\hat{\beta}_2} = H^{-1}\operatorname{cov}\left(\underline{\xi_2}, \eta\right) = H^{-1}E\left[\underline{\xi_2^c}\eta^c\right], \qquad (14)$$

где $H = \operatorname{cov}\left(\underline{\xi_2}, \underline{\xi_2}\right) = E\left[\underline{\xi_2^c}\underline{\xi_2^{cT}}\right]$, а $\underline{\xi_2^c} = \underline{\xi_2} - E\underline{\xi_2}, \eta^c = \eta - E\eta$ – с.в., центрированные относительно средних значений.

Рассмотрим теперь случай коррелированных и неравноточных (гетероскедастичных) ошибок наблюдений e_i, описываемых с.в. ε_i с $E[\varepsilon_i] = 0$ и невырожденной ковариационной матрицей

$$\Sigma = \left\|\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right)\right\|_1^n \in R^{n\times n}.$$

Тогда наблюдаемый вектор значений $\underline{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ описывается вектором с.в. $\underline{\eta}|\underline{\xi} = \left(\eta_1|\underline{\xi}, ..., \eta_n|\underline{\xi}\right)^T$. Поскольку матрица Σ симметрична и положительно определена, то существует такая невырожденная матрица $V \in R^{n\times n}$, что $\Sigma = VV^T$ [3, с.64]. Тогда преобразуя с.в. $\underline{\xi}' = V^{-1}\underline{\xi}$, $\underline{\eta'}|\underline{\xi'} = V^{-1}\underline{\eta}|\underline{\xi}'$ и $\underline{\varepsilon}' = V^{-1}\underline{\varepsilon}$, где $E\underline{\varepsilon'} = \underline{0}_n, D\underline{\varepsilon'} = I_n, \underline{\varepsilon'} = \left(\varepsilon_1', ..., \varepsilon_n'\right)^T$, приходим к некоррелированным, гомоскедастичным с.в. $\eta_1'|\underline{\xi}',...,\eta_n'|\underline{\xi}'$, которые эквивалентны некоторой с.в. $\eta'|\underline{\xi}'$ со значениями $V^{-1}\underline{y}$. Уравнение регрессии имеет аналогичный (7) вид

$$E\left[\eta'|\underline{\xi}'\right]=\underline{\beta}^T\underline{\xi}'. \tag{15}$$

Следовательно, все формулы (9), (10), (12) и (14) могут быть перенесены и легко преобразованы на случай коррелированных ошибок.

Таким образом, в зависимости от степени коррелированности объясняющих и зависимой переменных возможны различные представления для МНК-оценок блочных векторов коэффициентов при разбиении регрессоров.

Примером применимости полученных формул оценивания является k-параметрическая модель (7) с постоянным членом $E\left[\eta|\left(1,\underline{\xi}\right)\right]=\beta_1+\underline{\beta}^T\underline{\xi}$, где $\underline{\xi}=\left(\xi_2,...,\xi_k\right)^T$, $\underline{\beta}=\left(\beta_2,...,\beta_k\right)^T$. Для этой модели справедливо блочное представление с $k_1=1, k_2=k-1, \xi_1=1$ и выполнены условия (11), (13). Тогда для МНКоценок коэффициентов модели справедливы представления (14).

Выборочная регрессия. Запишем полученные выше формулы для оценок коэффициентов блочного аналога (2) выборочного уравнения множественной регрессии (1). В случае некоррелированных и гомоскедастичных ошибок наблюдений статистическим аналогом теоретического совместного распределения случайного вектора $\left(\underline{\xi}^T,\eta\right)$ является распределение дискретного случайного вектора, принимающего n значений $\left(\underline{x}^{(i)T},y_i\right)$, $i=1,...,n$, с вероятностями $1/n$, где $\underline{x}^{(i)}=\left(x_{i1},...,x_{ik}\right)^T$. В этом случае, статистический аналог некоторой характеристики $\varphi=E\left[\varphi\left(\underline{\xi}^T,\eta\right)\right]$ наблюдаемой с.в. $\left(\underline{\xi}^T,\eta\right)$ вычисляется по формуле $\hat{\varphi}_n=\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\underline{x_i^T},y_i\right)$, где суммирование происходит по всем выборочным значениям [8, с.105]. Тогда заменой теоретических характеристик на эмпирические, например, $E\left[\xi_i\xi_j\right]\sim\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}x_{li}x_{lj}$, $E\left[\xi_i\eta\right]\sim\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}x_{li}y_l$, легко могут быть получены расчетные формулы оценок коэффициентов для линейных регрессионных моделей. При этом выражения для оценок (8), (9) примут известный соответствующий выборочный вид

$$\underline{\hat{\beta}} = \arg\min_{\underline{\beta}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \underline{\beta}^T \underline{x}^{(i)}\right)^2 = \arg\min_{\underline{\beta}}\left(\underline{y} - X\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{y} - X\underline{\beta}\right) = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \underline{y},$$

$$\underline{\hat{\beta}_1} = \left(X_1^T X_1\right)^{-1} X_1^T\left(\underline{y} - X_2\underline{\hat{\beta}_2}\right), \underline{\hat{\beta}_2} = \left(\breve{X}_2^T \breve{X}_2\right)^{-1} \breve{X}_2^T \underline{\breve{y}}.$$

В случае ортогональности регрессоров $X_2{}^T X_1 = \underline{\underline{0}}$ из (10) получим известные МНК-оценки для (4) аналоги (10):

$$\underline{\hat{\beta}}_1 = \left(X_1{}^T X_1\right)^{-1} X_1{}^T \underline{y},\ \ \underline{\hat{\beta}}_2 = \left(X_2{}^T X_2\right)^{-1} X_2{}^T \underline{y}.$$

При выполнении условий некоррелированности (11), имеющих выборочный вид $X_2{}^T X_1 = n\underline{\overline{x}}_2\underline{\overline{x}}_1^T$, $X_1{}^T \underline{y} = n\underline{\overline{x}}_1\overline{y}$, приходим к следующим выборочным аналогам оценок (12)

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\beta}_1} &= n\left(X_1^T X_1\right)^{-1} \underline{\overline{x}}_1\left(\overline{y} - \underline{\overline{x}}_2^T \underline{\hat{\beta}_2}\right), \\ \underline{\hat{\beta}_2} &= \left(X_2^T X_2 - s_1\underline{\overline{x}}_2\underline{\overline{x}}_2^T\right)^{-1}\left(X_2^T \underline{y} - s_1\underline{\overline{x}}_2\overline{y}\right), \end{aligned} \qquad (16)$$

где $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\underline{\overline{x}}_1 = \left(\overline{x}_1,...,\overline{x}_{k_1}\right)^T = \frac{1}{n}1_n^T X_1$, $\underline{\overline{x}}_2 = \left(\overline{x}_{k_1+1},...,\overline{x}_k\right)^T = \frac{1}{n}1_n^T X_2$, $\overline{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, j = 1,..,k,$ $s_1 = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}$, а $\left\|p_{ij}\right\| = P_1 = X_1\left(X_1^T X_1\right)^{-1} X_1^T \in R^{n\times n}$. В случае выполнения дополнительного к (11) условия (13) в виде $X_1{}^T X_1 = n\underline{\overline{x}}_1\underline{\overline{x}}_1^T$ приходим к выборочным аналогам оценок (14)

$$\underline{\hat{\beta}_1} = \overline{y} - \underline{\overline{x}}_2^T \underline{\hat{\beta}_2}, \underline{\hat{\beta}_2} = \left(X_2^{cT} X_2^c\right)^{-1} X_2^{cT} \underline{y}^c, \qquad (17)$$

где $X_2^c = CX_2$, $\underline{y}^c = C\underline{y} = \underline{y} - \overline{y}1_n$, $1_n = (1,...,1)^T \in R^{n\times 1}$, $C = I_n - 1_n\left(1_n{}^T 1_n\right)^{-1} 1_n{}^T \in R^{n\times n}$ – матрица центрирования.

В случае коррелированных ошибок наблюдений выборочными аналогами (15) являются соотношения

$$\underline{y}' = X'\underline{\beta} + \underline{e}' = X_1'\underline{\beta_1} + X_2'\underline{\beta_2} + \underline{e}',$$

где $\underline{y}' = V^{-1}\underline{y},\ X_1' = V^{-1}X_1,\ X_2' = V^{-1}X_2,\ \underline{e}' = V^{-1}\underline{e}$, а $V^{-1} = \left\|w_{ij}\right\| = \Lambda^{-1/2}U^T \in R^{n\times n}$ определяется матрицами разложения $\Sigma = U\Lambda U^T$, $\Lambda = diag\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right), \lambda_i > 0, i = 1,...,n$, – собственные (характеристические) числа Σ, а столбцы матрицы U – соответствующие числам собственные вектора. Учитывая $U^T = U^{-1}$, $\left(V^{-1}\right)^T V^{-1} = \Sigma^{-1}$, (8) примет известный вид

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(X'^T X'\right)^{-1} X'^T \underline{y}' = \left(X^T\Sigma^{-1}X\right)^{-1} X^T\Sigma^{-1}\underline{y},$$

а (9) – вид (5) и $\underline{\hat{\beta}_1} = \left(X_1^T \Sigma^{-1} X_1 \right)^{-1} X_1^T \Sigma^{-1} \left(\underline{y} - X_2 \underline{\hat{\beta}_2} \right)$.

В случае ортогональности регрессоров $X_2'^T X_1' = X_2{}^T \Sigma^{-1} X_1 = \underline{\underline{0}}$ получим ОМНК-оценки (6). Соотношения (12), при выполнении соответствующих (11) условий

$$X_2{}^T \Sigma^{-1} X_1 = n X_2{}^T \underline{\overline{w}}\underline{\overline{w}}^T X_1, \; X_1{}^T \Sigma^{-1} \underline{y} = n X_1{}^T \underline{\overline{w}}\underline{\overline{w}}^T \underline{y},$$

после небольших матричных преобразований принимают вид:

$$\begin{aligned} &\underline{\hat{\beta}_1} = n \left(X_1^T \Sigma^{-1} X_1 \right)^{-1} X_1^T \underline{\overline{w}}\underline{\overline{w}}^T \left(\underline{y} - X_2 \underline{\hat{\beta}_2} \right), \\ &\underline{\hat{\beta}_2} = \left[X_2^T \left(\Sigma^{-1} - \tilde{s}_1 \underline{\overline{w}}\underline{\overline{w}}^T \right) X_2 \right]^{-1} X_2^T \left(\Sigma^{-1} - \tilde{s}_1 \underline{\overline{w}}\underline{\overline{w}}^T \right) \underline{y}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\underline{\overline{w}} = \left(\overline{w}_1, ..., \overline{w}_n \right)^T$, $\overline{w}_j = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_{ij}, \; j = 1, ..., n$, $\tilde{s}_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{p}_{ij}$, а $\left\| \tilde{p}_{ij} \right\| = \tilde{P}_1 = V^{-1} X_1 \left(X_1^T \Sigma^{-1} X_1 \right)^{-1} X_1^T \left(V^{-1} \right)^T$. Для (14), при дополнительном к (11) условии (13) в виде $X_1{}^T \Sigma^{-1} X_1 = n X_1{}^T \underline{\overline{w}}\underline{\overline{w}}^T X_1$, имеем

$$\underline{\hat{\beta}_1} = \underline{\overline{w}}^T \left(\underline{y} - X_2 \underline{\hat{\beta}_2} \right), \; \underline{\hat{\beta}_2} = \left(X_2^T \left(\Sigma^{-1} \right)^c X_2 \right)^{-1} X_2^T \left(\Sigma^{-1} \right)^c \underline{y}, \tag{19}$$

где $\left(\Sigma^{-1} \right)^c = \left(C V^{-1} \right)^T \left(C V^{-1} \right)$.

В качестве примера применимости полученных формул и условий для них рассмотрим для модели (1) следующие массивы данных:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда вычисляя МНК-оценки коэффициентов получим $\underline{\hat{\beta}} = \left(0.5, 0, 0 \right)^T$. Рассмотрим два случая блочного представления матрицы плана:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что для первого разложения выполняется условие (11), а для второго также и (13). Тогда воспользовавшись (16) и (17) или их обобщенными аналогами (18) и (19) для соответствующих представлений получим те же значения для оценок коэффициентов.

Заключение. Рассмотренный вероятностно-статистический подход позволил получить ряд общих формул и условий их применимости для оценок коэффициентов линейной множественной регрессионной модели при разбиении регрессоров в зависимости от проявления стохастических свойств зависимой и объясняющих величин.

Литература

1. Frisch R., Waugh F.V. Partial Time Regressions as Compared with Individual Trends // Econometrica, 1933, 1(4), 387–401.
2. Lovell M. Seasonal adjustment of economic time series // Journal of the American Statistical Association, 1963, 58, 993–1010.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
4. Fiebig D.G., Bartels R., Kramer W. The Frisch-Waugh Theorem and Generalised Least Squares Estimators // Econometrics. Reviews, 1996, 15, 431–444.
5. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. (1985). Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.
6. Rodgers J.L., Nicewander W.A., Toothaker L. Linear independent, orthogonal and uncorrelated variables // American Statistician, 1984, 38(2), 133–134.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Изд-во Наука, 1967.
8. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику: Учебник. М.: ЛКИ, 2010.