А.Г. Белов

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА ЧЕТНЫХ ЧАСТОТ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введение. В работе [1] для случая $k=3$ численно исследована асимптотическая эффективность оценок параметров методом моментов для сложного пуассоновского распределения с производящей функцией вероятностей (п.ф.в.)

$$P(z)=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\left(\left(\bar{\varepsilon}+\varepsilon z\right)^\nu-1\right)\right\}=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\theta_\nu\left(z^\nu-1\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $\lambda_1,...,\lambda_\nu>0, 0<\varepsilon\le 1$ задано, $\bar{\varepsilon}=1-\varepsilon$,

$$\theta_\nu=\varepsilon^\nu\sum_{\mu=\nu}^{k}C_\mu^\nu\bar{\varepsilon}^{\mu-\nu}\lambda_\mu,\left(\lambda_\nu=\sum_{\mu=\nu}^{k}C_\mu^\nu\varepsilon^{-\mu}\left(-\bar{\varepsilon}\right)^{\mu-\nu}\theta_\mu\right), \nu=\overline{1,k}.$$

Функция вероятностей такого распределения имеет вид

$$p_n=p_0\sum\prod_{\nu=1}^{k}\frac{\theta_\nu^{i_\nu}}{i_\nu!},\ n=0,1,..., \qquad (2)$$

где $p_0=\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{k}\theta_\nu\right\}=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\left(\bar{\varepsilon}^\nu-1\right)\right\}$, а суммирование ведется по целым неотрицательным решениям $i_1,...,i_k\ge 0$ уравнения $\sum_{\alpha=1}^{k}\alpha i_\alpha=n$.

В данной работе, для выявленных в [1] областей низкой эффективности оценки параметров $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ с помощью метода моментов, исследуется возможность альтернативного применения метода четных частот и выборочного среднего [2,3].

Далее будут использованы обозначения, приведенные в [1].

Оценки и их ковариационная матрица. Оценки по методу четных частот и выборочному среднему, для случая $k=3$, могут быть получены из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ p_0 = h_0 \\ P_r = H_r \end{cases},$$

где $\alpha_1 = \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon\lambda_2 + 3\varepsilon\lambda_3$ – первый начальный момент [5], a_1 – выборочное среднее, h_0 – нулевая частота, $P_r = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}$, $H_r = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n}$. После ряда простых преобразований получаем

$$\begin{cases} \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon\lambda_2 + 3\varepsilon\lambda_3 = a_1 \\ \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^2(3-\varepsilon)\lambda_3 = \ln h_0 + a_1 \\ 4\varepsilon^3\lambda_3 = 4\ln h_0 + 2a_1 - \ln(2H_r - 1) \end{cases}. \qquad (3)$$

Воспользовавшись (1), (2) и свойством любого дискретного распределения $P(1) + P(-1) = 2\sum_{n=0}^{\infty} p_{2n}$, вытекающего из определения п.ф.в., из (3) приходим к оценкам

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = \dfrac{2(2\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 3)a_1 + 4(3-4\varepsilon)\ln h_0 - (3-2\varepsilon)\ln(2H_r - 1)}{4\varepsilon^3} \\ \tilde{\lambda}_2 = \dfrac{-6\bar{\varepsilon}a_1 - 4(3-2\varepsilon)\ln h_0 + (3-\varepsilon)\ln(2H_r - 1)}{4\varepsilon^3} \\ \tilde{\lambda}_3 = \dfrac{2a_1 + 4\ln h_0 - \ln(2H_r - 1)}{4\varepsilon^3} \end{cases},$$

при этом из ограничений $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3 > 0$ получим условия разрешимости системы

$$e^{-a_1} < h_0 < e^{-\frac{\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 3}{3}a_1}, \quad \frac{1}{2}\left(1 + h_0^2\right) < H_r < \frac{1}{2}\left(1 + h_0^4 e^{2a_1}\right).$$

В случае $\varepsilon=1$ получим следующие оценки параметров

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = \dfrac{-2a_1 - 4\ln h_0 - \ln(2H_r - 1)}{4} \\ \tilde{\lambda}_2 = \dfrac{-4\ln h_0 + 2\ln(2H_r - 1)}{4} \\ \tilde{\lambda}_3 = \dfrac{2a_1 + 4\ln h_0 - \ln(2H_r - 1)}{4} \end{cases},$$

которые совпадают, за исключением $\tilde{\lambda}_3$, с приведенными в [2]. Для нахождения дисперсий оценок $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ помимо равенств [4]

$$D(a_1) = \frac{\mu_2}{N}, \quad D(h_0) = \frac{p_0(1-p_0)}{N}, \quad \operatorname{cov}(a_1, h_0) = -\frac{p_0\alpha_1}{N},$$

требуется знание $D(H_r)$, $\operatorname{cov}(a_1, H_r)$, $\operatorname{cov}(h_0, H_r)$. Ясно, что

$$D(H_r) = \sum_n Dh_{2n} + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(h_{2i}, h_{2j}) = N^{-1}P_r(1-P_r),$$

$$\operatorname{cov}(a_1, H_r) = E\left(\sum_n nh_n - \alpha_1\right)(H_r - P_r) = \sum_n n \operatorname{cov}(h_n, H_r).$$

Но, как нетрудно установить,

$$\operatorname{cov}(h_n, H_r) = \begin{cases} N^{-1}p_{2i}(1-P_r), & n = 2i, \\ N^{-1}p_{2i+1}P_r, & n = 2i+1, \quad i = 0,1,.... \end{cases}$$

Отсюда $\operatorname{cov}(h_0, H_r) = N^{-1}p_0(1-P_r)$ и $\operatorname{cov}(a_1, H_r) = N^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} 2ip_{2i} - \alpha_1 P_r\right)$.

Далее заметим, что для любого дискретного распределения справедливо равенство $2\sum_{i=0}^{\infty} 2ip_{2i} = P'(1) - P'(-1)$. Тогда для нашего случая имеем

$$2\sum_{i=0}^{\infty} 2ip_{2i} = \alpha_1 - (2P_r - 1)(\theta_1 - 2\theta_2 + 3\theta_3),$$

$$\operatorname{cov}\left(a_1, H_r\right) = N^{-1}(2P_r - 1)(-\theta_1 - 3\theta_3) = -(\theta_1 + 3\theta_3)e^{-2(\theta_1+\theta_3)}N^{-1}.$$

Воспользовавшись с точностью $O\left(N^{-3/2}\right)$ формулой дисперсии функции $y = y\left(a_1, H_r, h_0\right)$

$$D(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^2 D(a_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial H_r}\right)^2 D(H_r) + \left(\frac{\partial y}{\partial h_0}\right)^2 D(h_0) +$$

$$+2\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial H_r}\right)\operatorname{cov}(a_1, H_r) + 2\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial h_0}\right)\operatorname{cov}(a_1, h_0) +$$

$$+2\left(\frac{\partial y}{\partial H_r}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial h_0}\right)\operatorname{cov}(H_r, h_0),$$

где производные берутся при $a_1 = \alpha_1$, $H_r = P_r$, $h_0 = p_0$, после трудоемких преобразований получим, с точностью $O\left(N^{-1/2}\right)$,

$$16\varepsilon^6 ND\left(\tilde{\lambda}_1\right) = 4\theta_1\left(4\varepsilon^4 - 36\varepsilon^2 + 36\varepsilon - 9\right) + 16\theta_2\left(2\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 3\right)\left(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3\right) +$$
$$+9\theta_3\left(16\varepsilon^4 - 64\varepsilon^3 + 80\varepsilon^2 - 48\varepsilon + 12\right) + 16(3 - 4\varepsilon)^2 e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + (3 - 2\varepsilon)^2 e^{4(\theta_1+\theta_3)} -$$
$$-8(3 - 4\varepsilon)(3 - 2\varepsilon)e^{2(\theta_1+\theta_3)} - (9 - 14\varepsilon)^2,$$

$$16\varepsilon^6 ND\left(\tilde{\lambda}_2\right) = -36\theta_1\overline{\varepsilon}^2 - 48\theta_2(3 - \varepsilon)\overline{\varepsilon} + 108\theta_3\overline{\varepsilon}^2 + 16(3 - 2\varepsilon)^2 e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} +$$
$$+(3 - \varepsilon)^2 e^{4(\theta_1+\theta_3)} - 8(3 - 2\varepsilon)(3 - \varepsilon)e^{2(\theta_1+\theta_3)} - (9 - 7\varepsilon)^2,$$

$$16\varepsilon^6 ND\left(\tilde{\lambda}_3\right) = -4\theta_1 - 16\theta_2 + 12\theta_3 + 16e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3} + e^{4(\theta_1+\theta_3)} - 8e^{2(\theta_1+\theta_3)} - 9.$$

Из (3), путем линейных преобразований, получим равенства

$$4\varepsilon^3\left(\tilde{\lambda}_1+2\tilde{\lambda}_2\right)=2\left(2\varepsilon^2-3\right)a_1-12\ln h_0+3\ln\left(2H_r-1\right),$$

$$\varepsilon^2\left(\tilde{\lambda}_1+\left(2\varepsilon-3\right)\tilde{\lambda}_3\right)=-\left(2-\varepsilon\right)a_1-2\ln h_0.$$

Откуда с учетом $D\left(\tilde{\lambda}_1\right),D\left(\tilde{\lambda}_2\right),D\left(\tilde{\lambda}_3\right)$ и из формулы дисперсии функции выборочных характеристик получаем с точностью $O\left(N^{-1/2}\right)$

$$16\varepsilon^6 NCov\left(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2\right)=36\theta_1\bar{\varepsilon}\left(1-2\varepsilon\right)+16\theta_2\left(2\varepsilon^3+6\varepsilon^2-18\varepsilon+9\right)-$$
$$-36\theta_3\bar{\varepsilon}\left(4\varepsilon^2-6\varepsilon+3\right)-16\left(3-4\varepsilon\right)\left(3-2\varepsilon\right)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}-\left(3-2\varepsilon\right)\left(3-\varepsilon\right)e^{4\left(\theta_1+\theta_3\right)}+$$
$$+4\left(8\varepsilon^2-27\varepsilon+18\right)e^{2\left(\theta_1+\theta_3\right)}+\left(98\varepsilon^2-189\varepsilon+81\right),$$

$$16\varepsilon^6 NCov\left(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_3\right)=-12\theta_1\left(1-2\varepsilon\right)-16\theta_2\left(3-4\varepsilon\right)+$$
$$+12\theta_3\left(4\varepsilon^2-6\varepsilon+3\right)+16\left(3-4\varepsilon\right)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}+\left(3-2\varepsilon\right)e^{4\left(\theta_1+\theta_3\right)}-$$
$$-24\bar{\varepsilon}e^{2\left(\theta_1+\theta_3\right)}-3\left(9-14\varepsilon\right).$$

Непосредственно из второго равенства (3) имеем

$$16\varepsilon^6 NCov\left(\tilde{\lambda}_2,\tilde{\lambda}_3\right)=12\theta_1\bar{\varepsilon}+16\theta_2\left(3-2\varepsilon\right)-$$
$$-36\theta_3\bar{\varepsilon}-16\left(3-2\varepsilon\right)e^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}-\left(3-\varepsilon\right)e^{4\left(\theta_1+\theta_3\right)}+$$
$$+12\left(2-\varepsilon\right)e^{2\left(\theta_1+\theta_3\right)}+3\left(9-7\varepsilon\right).$$

Эффективность оценок, сравнительный анализ. Опираясь на результаты [1,6] для асимптотической эффективности оценок метода (3) получаем равенство

$$e_0\left(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right)=\frac{9\lambda_3^2\varepsilon^{12}}{\left\{\mu_2\left(\bar{i}_{11}\bar{i}_{22}-\bar{i}_{12}^2\right)-4\bar{i}_{11}-\bar{i}_{22}+4\bar{i}_{12}\right\}\left|\Delta\right|},$$

где $\mu_2=\varepsilon\lambda_1+2\varepsilon\left(1+\varepsilon\right)\lambda_2+3\varepsilon\left(1+2\varepsilon\right)\lambda_3$ – второй центральный момент,

$$|\mathbf{\Delta}| = \begin{vmatrix} \varepsilon^6 ND(\tilde{\lambda}_1) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3) \\ \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) & \varepsilon^6 ND(\tilde{\lambda}_2) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3) \\ \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3) & \varepsilon^6 ND(\tilde{\lambda}_3) \end{vmatrix},$$

$$\bar{i}_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}^2}{p_n} - 1, \; \bar{i}_{22} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{n-2}^2}{p_n} - 1, \; \bar{i}_{12} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{n-1} p_{n-2}}{p_n} - 1.$$

Значения (в %) $e_0(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})$ как функции параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при тех же, что и в [1], значениях ε в виде линий уровня представлены на рис.1-6.

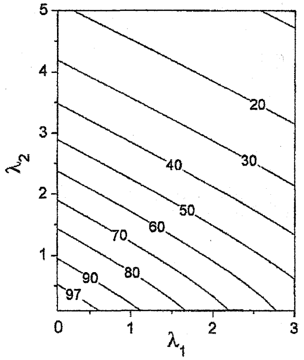

Рис. 1 $(\varepsilon = 0.1, \lambda_3 = 0.1)$

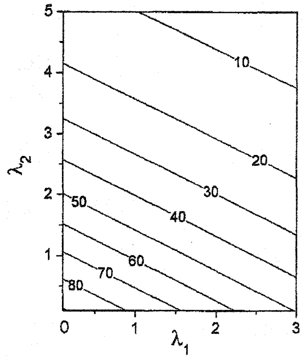

Рис. 2 $(\varepsilon = 0.1, \lambda_3 = 1.0)$

Видно, что при малых $\varepsilon = 0.1$ оценки $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ эффективны $(e_0 \geq 0.9)$ лишь при ограниченных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1.0;\ 0 < \lambda_3 < 0.1)$ (рис.1). В предельном случае $\lambda_3 = 0\ (k = 2)$ оценки $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ асимптотически эффективны на этом же множестве допустимых значений параметров $\lambda_1, \lambda_2 (0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1.0)$ [6]. С ростом λ_3 область высокой эффективности уменьшается и практически отсутствует уже при $\lambda_3 = 1.0$ (рис. 2).

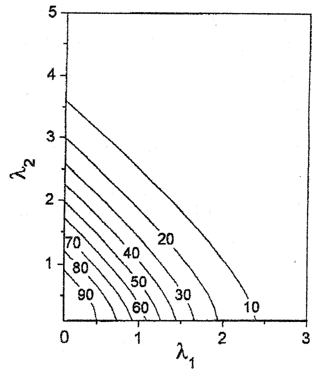

Рис. 3 $(\varepsilon = 0.5, \lambda_3 = 0.1)$

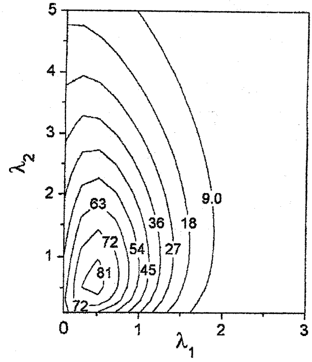

Рис. 4 $(\varepsilon = 0.9, \lambda_3 = 0.1)$

Когда ε растет, эффективность уменьшается, а область высокой эффективности смешается к малым λ_1, λ_2. Например, при $\varepsilon = 0.5$ и $\lambda_3 = 0.1$ (рис. 3) $e_0 \geq 0.9$ почти в треугольнике $\{(\lambda_1, \lambda_2) : 2\lambda_1 + \lambda_2 < 1\}$ (как и в предельном случае $\lambda_3 = 0$ $(k = 2)$ [6]). При дальнейшем росте $\varepsilon \geq 0.9$ зона эффективности сильно локализуется (рис. 4-6) и $e_0 \geq 0.9$ имеет место лишь при очень малых $0 < \lambda_3 \leq 0.01$ (рис. 5). Например, при $\varepsilon = 0.9, \lambda_3 = 0.01$ она примерно $\{(\lambda_1, \lambda_2) : 0 < \lambda_1 < 0.6, 0 < \lambda_2 < \lambda_1\}$, а при $\varepsilon = 1, \lambda_3 = 0.01$ - практически $\{(\lambda_1, \lambda_2) : 0.2 < \lambda_1 < 0.5, 0 < \lambda_2 < \lambda_1\}$ (рис. 5). При $\lambda_3 > 0.01$ эффективность оценок резко падает (рис.6).

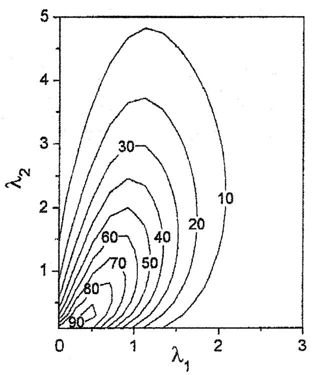

Рис. 5 $(\varepsilon = 1.0, \lambda_3 = 0.01)$

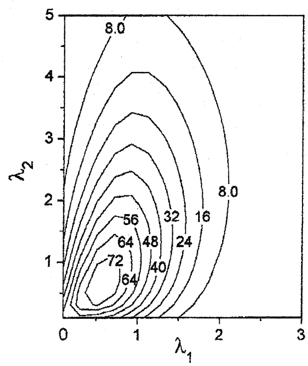

Рис. 6 $(\varepsilon = 1.0, \lambda_3 = 0.1)$

Заключение. Проведенные численные исследования асимптотических эффективностей позволяют сделать следующие выводы.

Области эффективности $e_0 \geq 0.9$ метода четных частот сильно локализованы в очень малых значениях параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при различных ε и полностью не покрывают всех зон низкой эффективности метода моментов [1]. Поэтому, в отличие от случая $k = 2$ [3,6], применимость метода четных частот как дополнения методу моментов в случае $k = 3$ очень ограничена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов А.Г., Галкин В.Я. Асимптотическая эффективность метода моментов оценивания сложного пуассоновского распределения // Прикладная математика и информатика. М.: МАКС Пресс, 2006. №24. С. 44-53.
2. Patel Y.C. Estimation of the parameters of the Triple and Quadruple Stuttering-Poisson Distributions // Technometrics. 1976. Vol.18, no.1. P.67-73.
3. Kemp A.W., Kemp C.D. Even-point estimation // Encyclopedia of Statistical Sciences, 2-nd ed., 2006. Vol. 3. P.2106-2108.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975.
5. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1985.
6. Белов А.Г., Галкин В.Я. Асимптотическая эффективность совместного оценивания параметров одного сложнопуассоновского распределения // Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1988. С.46-57.