А.Г. Белов, В.Я. Галкин

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА МОМЕНТОВ ОЦЕНИВАНИЯ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введение. Численно исследуется асимптотическая эффективность оценок параметров сложного пуассоновского распределения. Перечислим установленные ранее некоторые свойства исследуемого распределения [1;2;3,с.15]. Производящая функция вероятностей записывается в виде

$$P(z)=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\left(\left(\bar{\varepsilon}+\varepsilon z\right)^\nu-1\right)\right\}=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\theta_\nu\left(z^\nu-1\right)\right\},$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_л>0, 0<\varepsilon\le 1$ задано, $\bar{\varepsilon}=1-\varepsilon$,

$$\theta_\nu=\varepsilon^\nu\sum_{\mu=\nu}^{k}C_\mu^\nu\bar{\varepsilon}^{\mu-\nu}\lambda_\mu,\ \left(\lambda_\nu=\sum_{\mu=\nu}^{k}C_\mu^\nu\varepsilon^{-\mu}\left(-\bar{\varepsilon}\right)^{\mu-\nu}\theta_\mu\right),\ \nu=\overline{1,k}, \tag{1}$$

или в матричной форме

$$\boldsymbol{\theta}=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{C}=\mathbf{C}^{k\times k}=\left\|c_{\nu\mu}\right\|=\left\|\varepsilon^\nu C_\mu^\nu\bar{\varepsilon}^{\mu-\nu}\right\|.$$

Функция вероятностей такого распределения имеет вид

$$p_n=p_0\sum\prod_{\nu=1}^{k}\frac{\theta_\nu^{i_\nu}}{i_\nu!},\ n=0,1,\ldots, \tag{2}$$

где $p_0=\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{k}\theta_\nu\right\}=\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_\nu\left(\bar{\varepsilon}^\nu-1\right)\right\}$, а суммирование ведется по целым неотрицательным решениям $i_1,\ldots,i_k\ge 0$ уравнения $\sum_{\alpha=1}^{k}\alpha i_\alpha=n$.

Далее воспользуемся следующими фактами распределения (2) [1-3]: представлениями производных по параметрам $\theta_\nu,\lambda_\nu,\nu=\overline{1,k}$,

$$\frac{\partial p_n}{\partial\theta_\nu}=\sum_{j=0}^{\min\{1,[n/\nu]\}}(-1)^{1-j}p_{n-\nu j},\ \frac{\partial p_n}{\partial\lambda_\nu}=\sum_{j=0}^{\min\{\nu,n\}}C_\nu^j\varepsilon^j\bar{\varepsilon}^{\nu-j}p_{n-j}-p_n;$$

рекуррентным соотношением на p_n, $n = 1,2,...$,

$$np_n = \sum_{\nu=1}^{\min\{k,n\}} \nu\theta_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \sum_{\nu=1}^{\min\{\mu,n\}} \nu C_\mu^\nu \bar{\varepsilon}^{\mu-\nu} p_{n-\nu};$$

выражениями для семиинвариантов

$$\kappa_r = \sum_{\nu=1}^{k} \nu^r \theta_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \sum_{\nu=1}^{\mu} \nu^r C_\mu^\nu \varepsilon^\nu \bar{\varepsilon}^{\mu-\nu}, \ r = 1,2,...; \qquad (3)$$

в том числе начальным и пятью низшими центральными моментами

$$\kappa_1 = \alpha_1 = \theta_1 + 2\theta_2 + 3\theta_3 = \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon\lambda_2 + 3\varepsilon\lambda_3,$$

$$\kappa_2 = \mu_2 = \theta_1 + 4\theta_2 + 9\theta_3 = \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)\lambda_2 + 3\varepsilon(1+2\varepsilon)\lambda_3,$$

$$\kappa_3 = \mu_3 = \theta_1 + 8\theta_2 + 27\theta_3 = \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon(1+3\varepsilon)\lambda_2 + 3\varepsilon(1+6\varepsilon+2\varepsilon^2)\lambda_3,$$

$$\kappa_4 = \theta_1 + 16\theta_2 + 81\theta_3 = \mu_4 - 3\mu_2^2,$$

$$\kappa_5 = \theta_1 + 32\theta_2 + 243\theta_3 = \mu_5 - 10\mu_2\mu_3,$$

$$\kappa_6 = \theta_1 + 64\theta_2 + 729\theta_3 = \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3;$$

элементами информационной матрицы Фишера [4]

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\lambda^{kxk} = \left\| E_\lambda \left(\partial \ln L / \partial\lambda_\nu \, x \, \partial \ln L / \partial\lambda_\mu \right) \right\| = \left\| b_{\nu\mu} \right\|, \ \nu, \mu = \overline{1,k},$$

$$b_{\nu\mu} = -E_\lambda \, \partial^2 \ln L \Big/ \partial\lambda_\nu \partial\lambda_\mu = N \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{-1} \, \partial p_n \Big/ \partial\lambda_\nu \, \partial p_n \Big/ \partial\lambda_\mu = N i_{\nu\mu},$$

$$i_{\nu\mu} = \bar{\varepsilon}^{\nu+\mu} \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\mu} C_\nu^i C_\mu^j \left(\varepsilon \big/ \bar{\varepsilon} \right)^{i+j} \sum_{n=\max\{i,j\}}^{\infty} p_{n-i} p_{n-j} \Big/ p_n - 1 =$$

$$= \bar{\varepsilon}^{\nu+\mu} \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\mu} C_\nu^i C_\mu^j \left(\varepsilon \big/ \bar{\varepsilon} \right)^{i+j} \bar{i}_{ij},$$

где $L = \prod_{i=1}^{N} p_{n_i}$ – функция правдоподобия, $N\bar{i}_{ij} = N\left(\sum_{n=\max\{i,j\}}^{\infty} p_{n-i}p_{n-j} \Big/ p_n - 1 \right)$ – элементы информационной матрицы $\mathbf{B}_{\theta}^{k\times k} = N\bar{\mathbf{I}}_{\theta}^{k\times k}$ в системе параметров θ_{ν}, $\mathbf{B}_{\lambda}^{k\times k} = N\mathbf{I}_{\lambda}^{k\times k}$;

определителем матрицы $\mathbf{B}_{\lambda}^{k\times k}$ при $k \geq 2$

$$|\mathbf{B}| = \det \mathbf{B}_{\lambda}^{k\times k} = \frac{N^k}{k^2 \lambda_k^2} \begin{vmatrix} & & & & \varepsilon \\ & & & & 2\varepsilon \\ & & \mathbf{I}_{\lambda}^{k-1\times k-1} & & \dots \\ & & & & (k-1)\varepsilon \\ \varepsilon & 2\varepsilon & \dots & (k-1)\varepsilon & \mu_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon^{k(k+1)} \det \mathbf{B}_{\theta}^{k\times k} = \frac{N^k \varepsilon^{k(k-1)}}{k^2 \lambda_k^2} \begin{vmatrix} & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & \bar{\mathbf{I}}_{\theta}^{k-1\times k-1} & & \dots \\ & & & & k-1 \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & \mu_2 \end{vmatrix},$$

при этом для $k = 3$ имеем

$$|\mathbf{B}| = \frac{N^3 \varepsilon^6}{9\lambda_3^2} \left\{ \mu_2 \left(\bar{i}_{11}\bar{i}_{22} - \bar{i}_{12}^2 \right) - 4\bar{i}_{11} - \bar{i}_{22} + 4\bar{i}_{12} \right\},$$

где $\bar{i}_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{n-1}^2}{p_n} - 1$, $\bar{i}_{22} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{n-2}^2}{p_n} - 1$, $\bar{i}_{12} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{n-1}p_{n-2}}{p_n} - 1$.

Далее исследуется асимптотическая эффективность состоятельных оценок $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$, определяемая [6, с.389] как

$$e_0(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = e_0(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}|\boldsymbol{\lambda}) = \left(\lim_{N\to\infty} |\mathbf{B}| |\mathbf{V}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}})| \right)^{-1},$$

где $\mathbf{V}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \left\| \operatorname{cov}\left(\tilde{\lambda}_{\nu}, \tilde{\lambda}_{\mu}\right) \right\|$ – ковариационная матрица оценок. В качестве альтернативы методу максимального правдоподобия [5-7], приводящего, как известно, к асимптотически нормальным и эффективным оценкам со смещениями $O(N^{-1})$, рассмотрим метод моментов оценивания параметров $\boldsymbol{\lambda}$ распределения (2).

Оценки, их смещение и ковариационная матрица. Для нашего распределения такие оценки $\tilde{\lambda}$ с учетом (3) могут быть получены из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{WC\lambda} = \mathbf{\kappa},$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{k\times k} = \|\mu^\nu\|, \nu, \mu = \overline{1,k}$ – матрица Вандермонда, $\mathbf{\kappa}$ – вектор-столбец выборочных семиинвариантов. Тогда

$$\mathbf{V}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{V}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}(\boldsymbol{\kappa})(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}^{-1})',$$

$$e_0(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}) = |\mathbf{W}|^2|\mathbf{C}|^2/|\mathbf{B}||\mathbf{V}(\boldsymbol{\kappa})|.$$

В важном для экспериментальной практике частном случае $k = 3$ система метода моментов принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon\lambda_2 + 3\varepsilon\lambda_3 = a_1 \\ \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)\lambda_2 + 3\varepsilon(1+2\varepsilon)\lambda_3 = m_2 \\ \varepsilon\lambda_1 + 2\varepsilon(1+3\varepsilon)\lambda_2 + 3\varepsilon(1+6\varepsilon+2\varepsilon^2)\lambda_3 = m_3 \end{cases}, \tag{4}$$

где a_1 – выборочное среднее, m_2, m_3 – выборочные второй и третий центральные моменты. Оценки по методу моментов суть

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = \dfrac{2(\varepsilon^2+\varepsilon+1)a_1 - (2\varepsilon+3)m_2 + m_3}{2\varepsilon^3} \\ \tilde{\lambda}_2 = \dfrac{-(2+\varepsilon)a_1 - (\varepsilon+3)m_2 - m_3}{2\varepsilon^3} \\ \tilde{\lambda}_3 = \dfrac{2a_1 - 3m_2 + m_3}{6\varepsilon^3} \end{cases},$$

при этом из ограничений $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3 > 0$ при $0 < \varepsilon \le 1$ получим условия разрешимости системы

$$1 < \frac{m_2}{a_1} < 1 + 2\varepsilon, \quad 1 < \frac{m_3}{m_2} < \frac{1+6\varepsilon+2\varepsilon^2}{1+2\varepsilon}, 1 < \frac{m_3}{a_1} < 1 + 6\varepsilon + 2\varepsilon^2, \tag{5}$$

где любое из трех ограничений есть следствие двух других.

Учитывая, что [7]

$$E(a_1)=\alpha_1,\quad E(m_2)=\mu_2-\frac{\mu_2}{N},\quad E(m_3)=\mu_3-\frac{3\mu_3}{N}+O\left(N^{-2}\right),$$

$$D(a_1)=\frac{\mu_2}{N},\quad D(m_2)=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{N}+O\left(N^{-2}\right),$$

$$D(m_3)=\frac{\mu_6-6\mu_4\mu_2-\mu_3^2+9\mu_2^3}{N}+O\left(N^{-2}\right),$$

$$\operatorname{cov}\left(a_1,m_2\right)=\frac{\mu_3}{N}+O\left(N^{-2}\right),$$

$$\operatorname{cov}\left(a_1,m_3\right)=\frac{\mu_4-3\mu_2^2}{N}+O\left(N^{-2}\right),$$

$$\operatorname{cov}\left(m_2,m_3\right)=\frac{\mu_5-4\mu_2\mu_3}{N}+O\left(N^{-2}\right),$$

и дисперсия функции $y=y(a_1,m_i,m_j)$ от выборочных моментов есть

$$D(y)=\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^2 D(a_1)+\left(\frac{\partial y}{\partial m_i}\right)^2 D(m_i)+\left(\frac{\partial y}{\partial m_j}\right)^2 D(m_j)+2\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial m_i}\right)\operatorname{cov}(a_1,m_i)+$$

$$+2\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial m_j}\right)\operatorname{cov}(a_1,m_j)+2\left(\frac{\partial y}{\partial m_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial m_j}\right)\operatorname{cov}(m_i,m_j)$$

с точность $O\left(N^{-3/2}\right)$, причем производные берутся при $a_1=\alpha_1$, $m_i=\mu_i$, $m_j=\mu_j$, получим с точностью $O\left(N^{-1}\right)$:

$$\varepsilon NE\left(\tilde{\lambda}_1-\lambda_1\right)=\left(\lambda_1+2(\varepsilon-2)\lambda_2-3(\varepsilon+5)\lambda_3\right),$$

$$2\varepsilon NE\left(\tilde{\lambda}_2-\lambda_2\right)=-\left(\lambda_1+2(5-\varepsilon)\lambda_2-3(4\varepsilon+11)\lambda_3\right),$$

$$\varepsilon NE\left(\tilde{\lambda}_3-\lambda_3\right)=-\left(2\lambda_2+3(\varepsilon+2)\lambda_3\right),$$

и с точностью $O\left(N^{-1/2}\right)$

$$\varepsilon^6 ND\left(\tilde{\lambda}_1\right) = \left(\varepsilon^4\theta_1 + 4\varepsilon^2\bar{\varepsilon}^2\theta_2 + 9\bar{\varepsilon}^4\theta_3 + 2\varepsilon(3+\varepsilon)\mu_2^2 - 6\varepsilon\mu_2\mu_3 + 9A\right),$$

$$\varepsilon^6 ND\left(\tilde{\lambda}_2\right) = \left(\varepsilon^2\theta_2 + 9\bar{\varepsilon}^2\theta_3 + \frac{1}{2}\varepsilon(6+\varepsilon)\mu_2^2 - 3\varepsilon\mu_2\mu_3 + 9A\right),$$

$$\varepsilon^6 ND\left(\tilde{\lambda}_3\right) = \left(\theta_3 + A\right),$$

где $A = \left(2\theta_2 + 9\theta_3\right)^2 + \left(\theta_2 + 9\theta_3\right)\mu_2 + \frac{1}{6}\mu_2^3$.

В (4) умножая первое равенство на $(1+2\varepsilon)$ и вычитая второе получим для оценок $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ равенство

$$2\varepsilon^2\left(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2\right) = (1+2\varepsilon)a_1 - m_2.$$

Откуда из формулы дисперсии функции выборочных моментов и (11) получаем с точностью $O\left(N^{-1/2}\right)$

$$\varepsilon^6 NCov\left(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\right) = -\left(2\varepsilon^2\bar{\varepsilon}\theta_2 + 9\bar{\varepsilon}^3\theta_3 + \frac{9}{2}\varepsilon\mu_2\left(\mu_2 - \mu_3\right) + \varepsilon^2\mu_2^2 + 9A\right).$$

Аналогично, получая из (4) путем преобразований соотношения

$$\varepsilon^2\left(\tilde{\lambda}_1 - 3\tilde{\lambda}_3\right) = (1+\varepsilon)a_1 - m_2, \quad 2\varepsilon^2\left(\tilde{\lambda}_2 + 3\tilde{\lambda}_3\right) = m_2 - a_1,$$

приходим к соответствующим равенствам

$$\varepsilon^6 NCov\left(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_3\right) = \left(3\bar{\varepsilon}^2\theta_3 + \varepsilon\mu_2^2 - \varepsilon\mu_2\mu_3 + 3A\right),$$

$$2\varepsilon^6 NCov\left(\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3\right) = -\left(6\bar{\varepsilon}\theta_3 + \varepsilon\mu_2^2 - \varepsilon\mu_2\mu_3 + 6A\right).$$

В случае $\varepsilon = 1$ получим те же выражения для оценок $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$, их смещений и членов ковариационной матрицы, что и в [8].

Эффективность оценок. Для асимптотической эффективности оценок метода моментов получаем равенство

$$e_0(\tilde{\lambda}) = \frac{9\lambda_3^2\varepsilon^{12}}{\left\{\mu_2\left(\bar{i}_{11}\bar{i}_{22} - \bar{i}_{12}^2\right) - 4\bar{i}_{11} - \bar{i}_{22} + 4\bar{i}_{12}\right\}|\Delta|},$$

где $$|\Delta| = \begin{vmatrix} \varepsilon^6 ND(\tilde{\lambda}_1) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_3) \\ \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2) & \varepsilon^6 ND(\tilde{\lambda}_2) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_2,\tilde{\lambda}_3) \\ \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_3) & \varepsilon^6 NCov(\tilde{\lambda}_2,\tilde{\lambda}_3) & \varepsilon^6 ND(\tilde{\lambda}_3) \end{vmatrix}.$$

Ее вычисление сводится, таким образом, к расчету сумм трех числовых рядов. Точность приближения сумм рядов частичными суммами может быть оценена либо эмпирически (результат следует считать удовлетворительным, если увеличение числа членов в суммах в несколько раз мало изменяет вычисляемое значение), либо построением оценки остаточного члена ряда на основе сравнения числовых рядов. В самом деле, справедливы неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n-1}^2}{p_n} \le \frac{1}{\theta_1}\sum_{n=1}^{\infty} np_{n-1} = (\alpha_1+1)/\theta_1, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_{n-2}^2}{p_n} \le \frac{1}{2\theta_2}\sum_{n=2}^{\infty} np_{n-2} = (\alpha_1+2)/2\theta_2,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p_{n-1}p_{n-2}}{p_n} \le \frac{1}{\theta_1}\sum_{n=2}^{\infty} np_{n-2} = (\alpha_1+2)/\theta_1,$$

которые и дают оценки для остатков рядов.

Значения $e_0(\tilde{\lambda})$ как функции параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ при различных ε в виде линий уровня и поверхностей представлены на рис.1-6. При этом суммы рядов $\bar{i}_{11}, \bar{i}_{12}, \bar{i}_{22}$ вычислялись с точностью до 10^{-20} значений их остатков.

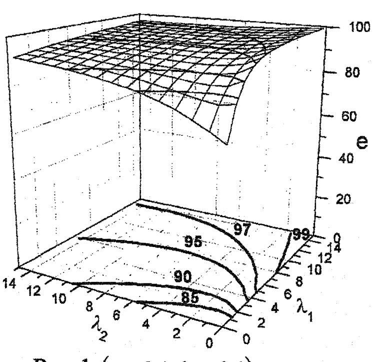

Рис.1 $(\varepsilon = 0.1, \lambda_3 = 0.1)$

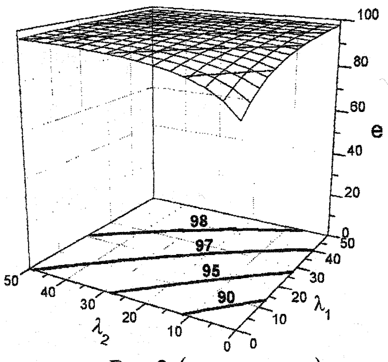

Рис.2 $(\varepsilon = 0.1, \lambda_3 = 10)$

Видно, что при малых $\varepsilon = 0.1$ оценки $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ неэффективны $(e_0 < 0.9)$ лишь при ограниченных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. В предельном случае $\lambda_3 = 0\ (k=2)$ оценки $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ асимптотически эффективны практически на всем множестве допустимых значений параметров [4]. С ростом λ_3 $(0 < \lambda_3 < 5 \div 10)$ область низкой эффективности увеличивается до $\{(\lambda_1, \lambda_2): 0 < \lambda_1, \lambda_2 < 13;\ \lambda_1 = -\lambda_2 + 13\}$ (рис.1,2). При этом она активнее расширяется (поверхность распрямляется) по параметру λ_1. С дальнейшим ростом λ_3, $(\lambda_3 > 10)$ зона эффективности $e_0 < 0.9$ уменьшается (поверхность приобретает горизонтальность), а при $\lambda_3 > 25$ она практически отсутствует (почти горизонтальная поверхность), тем самым демонстрируя асимптотическую эффективность оценок $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ метода моментов.

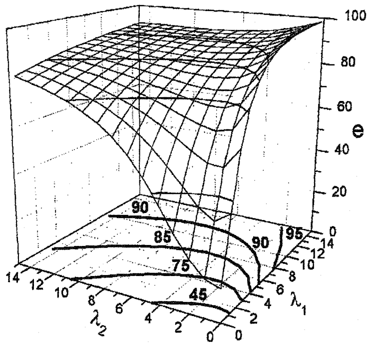

Рис.3 $(\varepsilon = 0.5, \lambda_3 = 0.1)$

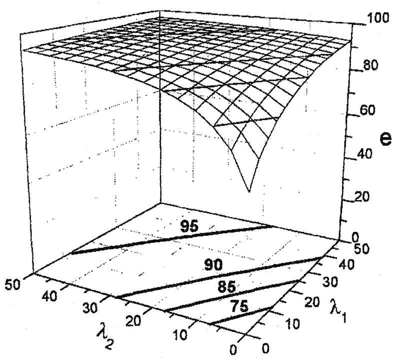

Рис.4 $(\varepsilon = 0.5, \lambda_3 = 10)$

С ростом ε область низкой эффективности явно расширяется с сохранением выше описанных закономерностей. Так в предельном случае $\lambda_3 = 0\ (k=2)$ [4] имеем: при $\varepsilon = 0.5$ эта область почти $\{(\lambda_1, \lambda_2): 0 < \lambda_1 < 3,\ 0 < \lambda_2 < 8\}$; при $\varepsilon = 0.9$ она примерно $\{(\lambda_1, \lambda_2): 0 < \lambda_1 < 5,\ 0 < \lambda_2 < 15\}$; а при $\varepsilon = 1$ [4,9] практически является полосой $\{(\lambda_1, \lambda_2): 0 < \lambda_1 < 4,\ 0 < \lambda_2\}$. С увеличением $\lambda_3\ (0 < \lambda_3 < 5 \div 10)$ зона $e_0 < 0.9$ растет и достигает своего максимума при $\lambda_3 = 5 \div 10$: при $\varepsilon = 0.5$ (рис.3,4) приблизительно до $\{(\lambda_1, \lambda_2,): 0 < \lambda_1, \lambda_2 < 30;\ \lambda_1 = -\lambda_2 + 30\}$; при $\varepsilon = 0.9,\ 1.0$ (рис.5,6) до $\{(\lambda_1, \lambda_2): 0 < \lambda_1 < 50,\ 0 < \lambda_2 < 25;\ \lambda_1 = -2\lambda_2 + 50\}$. При дальнейшем росте λ_3 $(\lambda_3 > 10)$ зона эффективности $e_0 < 0.9$ уменьшается и при больших значениях λ_3 практически отсутствует в случае $\varepsilon = 0.5, \lambda_3 > 43$ и $\varepsilon = 0.9, \lambda_3 > 40$. Однако при $\varepsilon = 1, \lambda_3 > 40$ область низкой эффективности $\{(\lambda_1, \lambda_2): 0 < \lambda_1 < 10,\ 0 < \lambda_2 < 10;\ \lambda_1 = -\lambda_2 + 10\}$ остается неизменной.

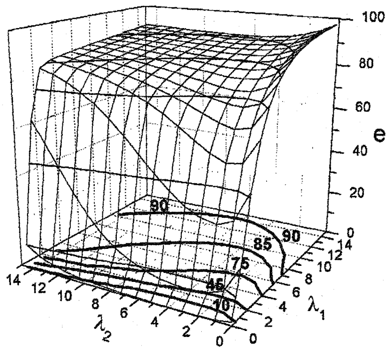

Рис.5 $(\varepsilon = 0.9, \lambda_3 = 0.1)$

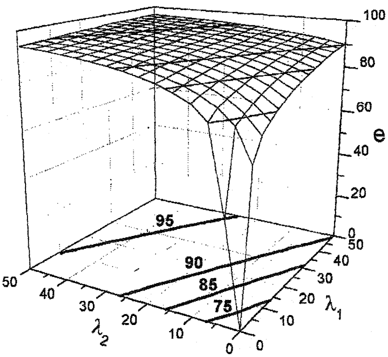

Рис.6 $(\varepsilon = 0.9, \lambda_3 = 10)$

Проведенные расчеты и сравнительный анализ позволяет дать новые и скорректировать ранее описанные [8] представления по эффективности использования метода моментов для точечного оценивания параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ распределения (2) при $k = 3$ и разных ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Исследование прямых стохастических задач при регистрации выхода множественных ядерных процессов // Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов. Вып.2. М.: Изд-во МГУ, 1973. С.81-116.
2. Галкин В.Я. Прямые задачи при разделении множественных процессов // ДАН СССР, 1974. Т.216, №5, С.1014-1017.

3. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1985.
4. Белов А.Г., Галкин В.Я. Асимптотическая эффективность совместного оценивания параметров одного сложнопуассоновского распределения// Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1988. С.46-57.
5. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Обратные задачи при регистрации выхода множественных ядерных процессов // Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов. Вып.3. М.: Изд-во МГУ, 1975. С.3-26.
6. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975.
8. Patel Y.C. Estimation of the parameters of the Triple and Quadruple Stuttering-Poisson Distributions // Technometrics. 1976. Vol.18, no.1. P.67-73.
9. Patel Y.C. Even point estimation and moment estimation in Hermite distribution // Biometrics. 1976. Vol.32. P.865-873.