А.Г. Белов, В.Я. Галкин, М.В. Уфимцев

СЛОЖНЫЙ ЗАКОН ПУАССОНА С ОБОБЩАЮЩИМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ БИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Введение. Моделями множественных процессов в различных областях естествознания часто являются обобщенные распределения Пуассона [2-5]. Рассмотрим одну из таких возможных постановок.

Имеем дискретную случайную величину (с.в.)

$$\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \ldots + k\zeta_k,$$

являющуюся взвешенной суммой k независимых пуассоновских с.в. $\zeta_j \sim Po(\lambda)$. Характеристическая функция (х.ф.) для ζ имеет вид

$$\varphi_\zeta(t) = Ee^{it\zeta} = \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{\lambda(e^{ijt}-1)\right\} = \exp\left\{\lambda\sum_{j=1}^{k}(e^{ijt}-1)\right\},$$

а её ф.в. $q_n = P\{\zeta = n\}$ записывается как $(k-1)-$ мерная сумма со связями [2,6]

$$q_n = e^{-k\lambda}\sum_{I_1^{(k)}=n}\lambda^{J_1^{(k)}}\prod_{j=1}^{k}\left(i_j!\right)^{-1} = e^{-k\lambda}\sum_{i_j=0,\ j=k,\ldots,2}^{\left[\left(n-I_{j+1}^{(k)}\right)/j\right]}\frac{\lambda^{n-I_2^{(k)}+J_2^{(k)}}}{\left(n-I_2^{(k)}\right)!}\prod_{j=2}^{k}\left(i_j!\right)^{-1}, \quad n = 0,1,\ldots;$$

здесь приняты обозначения $I_l^{(j)} = \sum_{\alpha=l}^{j}\alpha\ i_\alpha$, $J_l^{(j)} = \sum_{\alpha=l}^{j} i_\alpha$ для любых целых $l \le j,\ i_l,\ .\ .\ .\ ,\ i_j \ge 0,\ [z]$ – целая часть числа z.

Рассмотрим теперь условную с.в. ξ/ζ имеющую отрицательное биномиальное распределение, $\xi/\zeta \sim NB(r\zeta, p)$, с х.ф.

$$\varphi_{\xi/\zeta}(t) = p^{r\zeta}\Big/\left(1-qe^{it}\right)^{r\zeta},$$

где $r\zeta$ – число «успехов», p – вероятность «успеха» в единичном испытании, $q = 1-p-$ вероятность «неудачи», $0 < r-$ действительное число, $0 < p < 1,\ 0 < q < 1.$ В более удобной для дальнейших исследований системе параметров $Q = 1/p,\quad P = q/p,\quad P > 0,\quad Q - P = 1$ [7,8] х.ф. запишется в виде

$$\varphi_{\xi/\zeta}(t) = \left(Q - Pe^{it}\right)^{-r\zeta}.$$

Х.ф. с.в. ξ со сложным законом Пуассона порядка k, обобщенного отрицательным биномиальным распределением, $\xi \sim P_k NB(\lambda, r, P)$, есть

$$\varphi_\xi(t) = \varphi(t) = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k} \left\{ \left(Q - Pe^{it}\right)^{-jr} - 1 \right\}\right\}, \tag{1}$$

а соответствующая производящая функция вероятностей (п.ф.в.) равна

$$\psi_\xi(z) = \psi(z) = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k} \left\{ (Q - Pz)^{-jr} - 1 \right\}\right\} = \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{k} \left(h_j(z) - 1\right)\right\}, \tag{2}$$

где обозначено $h_j(z) = (Q - Pz)^{-jr}$, $\left(|z| \le 1\right)$ – п.ф.в. некоторой отрицательной биномиальной с.в. $X_j \sim NB(rj, P)$ с ф.в. [7]

$$\pi_m^{(j)} = P\left\{X_j = m\right\} = \frac{\Gamma(rj + m)}{\Gamma(rj)\ m\ !} P^m Q^{-jr-m},$$

имеющей очевидные рекуррентные соотношения

$$\pi_{m+1}^{(j)} = \frac{rj + m}{m+1} \frac{P}{Q} \pi_m^{(j)} = \frac{rj}{m+1} \sum_{l=0}^{m} \left(\frac{P}{Q}\right)^{l+1} \pi_{m-l}^{(j)}, \tag{3}$$

где $\pi_0^{(j)} = Q^{-jr}$, $m = 0, 1, \ldots$, а $\Gamma(x)$ – гамма-функция,
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1) = 1$.

Для доказательства второго равенства (3) имеем

$$\pi_{m+1}^{(j)} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} h_j(z)\Big|_{z=0} = \frac{j\Pr}{(m+1)!} \frac{d^m}{dz^m} \frac{h_j(z)}{Q - Pz}\Big|_{z=0} =$$

$$= \frac{j\Pr}{(m+1)!} \sum_{l=0}^{m} C_m^l \frac{d^l}{dz^l} \frac{1}{Q - Pz} \frac{d^{m-l} h_j(z)}{dz^{m-l}}\Bigg|_{z=0} = \frac{jr}{m+1} \sum_{l=0}^{m} \frac{P^{l+1}}{Q^{l+1}} \pi_{m-l}^{(j)}.$$

I. Явный вид. Кроме принятых, введем обозначения $A_l = \sum_{j=1}^{l} j a_j$, $B_l = \sum_{j=1}^{l} a_j$, где $a_j \ge 0$ – целые числа. Справедливо

Утверждение 1. Для ф.в. $p_n = P\{\xi = n\}$ верно представление

$$p_n = p_0 \left(\frac{P}{Q}\right)^n \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \sum_{l=0}^{m} \frac{\left(k - \sum_{j=1}^{k} Q^{-jr}\right)^{m-l}}{(m-l)\ !} \sum_{B_{k+1}=l} \frac{(-k)^{a_{k+1}}}{a_{k+1}! Q^{rA_k}} \sum_{J_1^{(k)}=n} \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(jra_j + i_j)}{a_j! i_j! \Gamma(jra_j)}, \tag{4}$$

где $p_0=\exp\left\{\lambda\sum_{j=1}^{k}\left(Q^{-jr}-1\right)\right\}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots$

Доказательство. В силу обращения п.ф.в.

$$p_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\psi(z)\Big|_{z=0}, \quad n=0,1,\ldots \tag{5}$$

и (2) сразу получаем p_0, если положить $z=0$. Далее представим п.ф.в. (2) в виде $\psi(z)=\psi(y(z))=\exp\{\lambda y(z)\}$, где $y(z)=\sum_{j=1}^{k}(Q-Pz)^{-jr}-k$, и воспользуемся формулой [9, с.78] для n-ой производной от сложной функции

$$\frac{d^n}{dz^n}\psi(y(z))=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\psi(y)}{\partial y^m}\sum_{l=0}^{m}C_m^l(-y)^{m-l}\frac{d^n}{dz^n}y^l(z). \tag{6}$$

В нашем случае имеем

$$\frac{\partial^m}{\partial y^m}(\psi(y))\Big|_{z=0}=\lambda^m\psi(y)\big|_{z=0}=\lambda^m p_0, \quad y(0)=\sum_{j=1}^{k}Q^{-jr}-k,$$

и используя формулу разложения мультинома [10, с.152]

$$\left(\sum_{j=1}^{k+1}u_j\right)^n=n!\sum_{B_{k+1}=n}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{u_j^{a_j}}{a_j!},$$

а затем обобщенную формулу Лейбница для n-ой производной от произведения [2, с.33]

$$\frac{d^n}{dx^n}\prod_{j=1}^{k}u_j(x)=n!\sum_{J_1^{(k)}=n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{i_j!}\frac{d^{i_j}}{dx^{i_j}}u_j(x)$$

при $z=0$, получим

$$\frac{d^n}{dz^n}y^l(z)\Big|_{z=0}=l!\sum_{B_{k+1}=l}\frac{(-k)^{a_{k+1}}}{a_{k+1}!}\frac{d^n}{dz^n}\prod_{j=1}^{k}\frac{(Q-Pz)^{-jra_j}}{a_j!}\Bigg|_{z=0}=$$

$$=l!\sum_{B_{k+1}=l}\frac{(-k)^{a_{k+1}}}{a_{k+1}!}n!\sum_{J_1^{(k)}=n}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{i_j!}\frac{1}{a_j!}P^{i_j}Q^{-jra_j-i_j}\left(jra_j\right)\left(jra_j+1\right)\times\ldots\times$$

$$\times\left(jra_j+i_j-1\right)=l!n!\left(\frac{P}{Q}\right)^n\sum_{B_{k+1}=l}\frac{(-k)^{a_{k+1}}}{a_{k+1}!Q^{rA_k}}\sum_{J_1^{(k)}=n}\prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma\left(jra_j+i_j\right)}{a_j!i_j!\Gamma\left(jra_j\right)}.$$

Подставляя полученные выше выражения в (6) при $z=0$, придем к (4).

Представление ф.в. (4) достаточно сложно для практического применения. Поэтому выведем рекуррентное соотношение для него.

II. Рекуррентное соотношение

Утверждение 2. Для всех $n=0,\ 1,\ .\ .\ .$ справедливо

$$(n+1)\,p_{n+1}=\lambda\sum_{i=0}^{n}p_i(n+1-i)\sum_{j=1}^{k}\pi_{n+1-i}^{(j)}. \tag{7}$$

Доказательство. Из (5) путем однократного дифференцирования (2) и формулы Лейбница имеем

$$p_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\ !}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\exp\left\{\lambda\sum_{j=1}^{k}\left(h_j(z)-1\right)\right\}\Bigg|_{z=0}=$$

$$=\frac{\lambda rP}{(n+1)\ !}\frac{d^n}{dz^n}\frac{\psi(z)}{Q-Pz}\sum_{j=1}^{k}jh_j(z)\Bigg|_{z=0}=$$

$$=\frac{\lambda rP}{(n+1)\ !}\sum_{i=0}^{n}C_n^i\frac{d^i\psi(z)}{dz^i}\sum_{l=0}^{n-i}C_{n-i}^l\frac{d^l}{dz^l}\frac{1}{Q-Pz}\frac{d^{n-i-l}}{dz^{n-i-l}}\sum_{j=1}^{k}jh_j(z)\Bigg|_{z=0}=$$

$$=\frac{\lambda r}{n+1}\sum_{i=0}^{n}p_i\sum_{l=0}^{n-i}\frac{P^{l+1}}{Q^{l+1}}\sum_{j=1}^{k}j\pi_{n-i-l}^{(j)}.$$

Воспользуемся (3), положив $m=n-i$, получим (7).

Соотношение (7) и (3) значительно упрощают расчет ф.в. p_n.

III. Производные по параметрам

Утверждение 3. Для $n=0,\ 1,\ .\ .\ .$ справедливы три равенства

$$\frac{\partial p_n}{\partial\lambda}=\sum_{i=0}^{n}p_i\sum_{j=1}^{k}\pi_{n-i}^{(j)}-kp_n,\qquad \frac{\partial p_n}{\partial P}=\frac{1}{P}\left\{np_n-(n+1)\,p_{n+1}\right\},$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial r}=\lambda\sum_{i=0}^{n}p_i\left\{\sum_{l=1}^{n-i}\frac{1}{l}\left(\frac{P}{Q}\right)^l\sum_{j=1}^{k}j\pi_{n-i-l}^{(j)}-\ln Q\sum_{j=1}^{k}j\pi_{n-i}^{(j)}\right\}.$$

Доказательство. Из представления (5) и формулы Лейбница имеем

$$\frac{\partial p_n}{\partial \lambda}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\psi(z)\sum_{j=1}^{k}h_j(z)-k\psi(z)\right\}\bigg|_{z=0}=$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\psi(z)\sum_{j=1}^{k}h_j(z)\bigg|_{z=0}-kp_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i\psi(z)}{i!dz^i}\sum_{j=1}^{k}\frac{d^{n-i}h_j(z)}{(n-i)\ !dz^{n-i}}\bigg|_{z=0}-kp_n=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}p_i\sum_{j=1}^{k}\pi_{n-i}^{(j)}-kp_n.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial p_n}{\partial P}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{\partial \psi}{\partial P}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{(z-1)}{P}\frac{\partial\psi(z)}{\partial z}\right\}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{P}\left\{np_n-(n+1)p_{n+1}\right\},$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial r}=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\lambda\psi(z)\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}h_j(z)\right\}\bigg|_{z=0}=$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{-\lambda\psi(z)\ln(Q-Pz)\sum_{j=1}^{k}jh_j(z)\right\}\bigg|_{z=0}=$$

$$=-\lambda\left\{\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^i\psi(z)}{i!\partial z^i}\sum_{l=0}^{n-i}\frac{\partial^l\ln(Q-Pz)}{l!\partial z^l}\frac{\partial^{n-i-l}}{(n-i-l)\ !\partial z^{n-i-l}}\sum_{j=1}^{k}jh_j(z)\right\}\bigg|_{z=0}=$$

$$=-\lambda\sum_{i=0}^{n}p_i\left\{\ln Q\sum_{j=1}^{k}j\pi_{n-i}^{(j)}-\sum_{l=1}^{n-i}\frac{1}{l}\left(\frac{P}{Q}\right)^l\sum_{j=1}^{k}j\pi_{n-i-l}^{(j)}\right\}.$$

IV. Семиинварианты. В [1] рассмотрены только первый начальный и второй центральный моменты. Выпишем другие моментные характеристики, например, обычные κ_m и факториальные $(\kappa)_m$ семиинварианты. Производящая функция факториальных семиинвариантов (п.ф.ф.с.) $w(t)=\ln\psi(1+t)$ из (1) и связи $Q-P=1$ равна

$$w(t)=\lambda\sum_{j=1}^{k}\left\{(1-Pt)^{-jr}-1\right\}. \tag{8}$$

Обращая (8), при $t=0$ получим $((\kappa)_0=0)$

$$(\kappa)_m = \frac{d^m}{dt^m} w(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^m}{dt^m} \ln\psi(1+t)\Big|_{t=0} = \lambda\sum_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(jr+m)}{\Gamma(jr)} P^m, \quad m = 1,2,...$$

В частности, воспользовавшись известными равенствами [11,с.36]

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \quad \sum_{j=1}^{k} j^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

$$\sum_{j=1}^{k} j^4 = \frac{k(k+1)}{2}\frac{(2k+1)}{15}\left(3k^2+3k-1\right), \quad \sum_{j=1}^{k} j^5 = \frac{k(k+1)}{2}\frac{k(k+1)}{6}\left(2k^2+2k-1\right),$$

$$\sum_{j=1}^{k} j^6 = \frac{k(k+1)}{2}\frac{(2k+1)}{21}\left(3k^4+6k^3-3k+1\right),$$

найдем поочередно

$$(\kappa)_1 = \lambda \Pr\sum_{j=1}^{k} j = \lambda \Pr\frac{k(k+1)}{2}, \quad (\kappa)_2 = \lambda P^2 r\sum_{j=1}^{k} j(jr+1) = \lambda P^2 r\frac{k(k+1)}{6} K_1(k,r),$$

$$(\kappa)_3 = \lambda P^3 r\sum_{j=1}^{k} j(jr+1)(jr+2) = \lambda P^3 r\frac{k(k+1)}{4} K_2(k,r),$$

$$(\kappa)_4 = \lambda P^4 r\sum_{j=1}^{k} j(jr+1)(jr+2)(jr+3) = \lambda P^4 r\frac{k(k+1)}{30} K_3(k,r),$$

$$(\kappa)_5 = \lambda P^5 r\sum_{j=1}^{k} j(jr+1)(jr+2)(jr+3)(jr+4) = \lambda P^5 r\frac{k(k+1)}{12} K_4(k,r),$$

$$(\kappa)_6 = \lambda P^6 r\sum_{j=1}^{k} j(jr+1)(jr+2)(jr+3)(jr+4)(jr+5) = \lambda P^6 r\frac{k(k+1)}{84} K_5(k,r),$$

где для упрощения записи введены следующие обозначения многочленов:

$K_1(k,r) = r(2k+1)+3;\quad K_2(k,r) = r^2k(k+1)+2r(2k+1)+4;$

$K_3(k,r) = r^3(2k+1)(3k^2+3k-1)+45r^2k(k+1)+55r(2k+1)+90;$

$K_4(k,r) = r^4k(k+1)(2k^2+2k-1)+4r^3(2k+1)(3k^2+3k-1)+$

$+105r^2k(k+1)+100r(2k+1)+144;$

$K_5(k,r) = 2r^5(2k+1)(3k^4+6k^3-3k+1)+105r^4k(k+1)(2k^2+2k-1)+$

$+238r^3(2k+1)(3k^2+3k-1)+4725r^2k(k+1)+3836r(2k+1)+5040.$

Выражения для κ_m следуют из обращения [12]

$$\kappa_m = \frac{d^m}{ds^m}\theta(s)\bigg|_{s=0},\quad m=1,2,...,$$

где производящая функция семиинвариантов (п.ф.с.)

$$\theta(s) = \ln\psi(e^s) = \lambda\sum_{j=1}^{k}\left\{\left(Q-Pe^s\right)^{-jr}-1\right\} = \lambda\sum_{j=1}^{k}\left\{y^{-jr}-1\right\} = F\left(y(s)\right), \qquad (9)$$

$$y(s) = y = Q-Pe^s.$$

При обращении (9) при $s=0$ воспользуемся формулой Бруно [13,с.48] для n-ой производной от сложной функции $\theta(s)=F(y(s))$

$$\frac{d^m}{ds^m}\theta(s)\bigg|_{s=0} = m!\sum_{n=0}^{m}\frac{d^n}{dy^n}F(y)\sum_{\substack{I_1^{(m)}=m,\\ J_1^{(m)}=n}}\prod_{l=1}^{m}\frac{\left(\frac{d^l}{ds^l}y(s)\right)^{i_l}}{(l\ \ !)^{i_l}i_l\ \ !}\Bigg|_{s=0} =$$

$$= \lambda m!\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\sum_{j=1}^{k}\frac{\Gamma(jr+n)}{\Gamma(jr)}\frac{1}{y^{jr+n}}\sum_{\substack{I_1^{(m)}=m,\\ J_1^{(m)}=n}}\prod_{l=1}^{m}\frac{\left(-Pe^s\right)^{i_l}}{(l\ \ !)^{i_l}i_l\ \ !}\Bigg|_{s=0} =$$

$$= \lambda m!\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\sum_{j=1}^{k}\frac{\Gamma(jr+n)}{\Gamma(jr)}\sum_{\substack{I_1^{(m)}=m,\\ J_1^{(m)}=n}}\prod_{l=1}^{m}\frac{(-P)^{i_l}}{(l\ \ !)^{i_l}i_l\ \ !}.$$

Последовательно подставляя $m=1,2,...$ получим семиинварианты κ_m.

Воспользуемся связью κ_m с факториальными семиинвариантами

$(\kappa)_m$ через числа Стирлинга первого $s_m^{(j)}$ и второго $\sigma_m^{(j)}$ рода [12,14]

$$(\kappa)_m = \sum_{j=0}^{m} s_m^{(j)} \kappa_j, \;\; \kappa_m = \sum_{j=0}^{m} \sigma_m^{(j)} (\kappa)_j, \tag{10}$$

а также значениями чисел Стирлинга 2-ого рода [6,с.49] $\sigma_m^{(j)}$, $m = 1,2,...,6$; $\sigma_0^{(0)} = 1$; $\sigma_0^{(j)} = 0$, $j = 1,2,...,6$, собранных в Табл.1:

Таблица 1

$\sigma_1^1 = 1$					
$\sigma_2^1 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$				
$\sigma_3^1 = 1$	$\sigma_3^2 = 3$	$\sigma_3^3 = 1$			
$\sigma_4^1 = 1$	$\sigma_4^2 = 7$	$\sigma_4^3 = 6$	$\sigma_4^4 = 1$		
$\sigma_5^1 = 1$	$\sigma_5^2 = 15$	$\sigma_5^3 = 25$	$\sigma_5^4 = 10$	$\sigma_5^5 = 1$	
$\sigma_6^1 = 1$	$\sigma_6^2 = 31$	$\sigma_6^3 = 90$	$\sigma_6^4 = 65$	$\sigma_6^5 = 15$	$\sigma_6^6 = 1.$

С помощью подстановки $(\kappa)_m$ и $\sigma_m^{(j)}$ во второе равенство (10) путем несложных преобразований получим последовательно

$$\kappa_1 = \alpha_1 = \lambda \Pr \frac{k(k+1)}{2}, \quad \kappa_2 = \mu_2 = \lambda \Pr \frac{k(k+1)}{6}\big(3 + PK_1(k,r)\big),$$

$$\kappa_3 = \lambda \Pr \frac{k(k+1)}{4}\big(2 + 2PK_1(k,r) + P^2K_2(k,r)\big),$$

$$\kappa_4 = \lambda \Pr \frac{k(k+1)}{30}\big(15 + 35PK_1(k,r) + 45P^2K_2(k,r) + P^3K_3(k,r)\big),$$

$$\kappa_5 = \lambda \Pr \frac{k(k+1)}{12}\big(6 + 30PK_1(k,r) + 75P^2K_2(k,r) + 4P^3K_3(k,r) + P^4K_4(k,r)\big),$$

$$\kappa_6 = \lambda \Pr \frac{k(k+1)}{84}(42 + 434PK_1(k,r) + 1890P^2K_2(k,r) + 182P^3K_3(k,r) +$$

$$+105P^4K_4(k,r) + P^5K_5(k,r)).$$

где $\alpha_1 = E\xi$ и $\mu_2 = E(\xi - \alpha_1)^2$ – первый начальный и второй центральный моменты с.в. ξ.

V. Асимптотика. Для $\xi \sim P_k NB(\lambda, r, P)$ докажем

Утверждение 4. При постоянных значениях r, P и $\lambda \to \infty$ с.в. ξ асимптотически нормальна с параметрами α_1, μ_2.

Доказательство. Рассмотрим х.ф. для стандартизованной с.в. $\tau = {(\xi - \alpha_1)}\big/{\sqrt{\mu_2}}$, которая с учетом х.ф. $\varphi_\xi(t)$ (1) имеет вид [10,с.133]

$$\varphi_\tau(t) = \exp\left\{-\frac{it\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}}\right\}\varphi_\xi\left(\frac{t}{\sqrt{\mu_2}}\right).$$

Применим формулу Тейлора к $\varphi_\xi(t)$ и учтем вид х.ф. (1)

$$\varphi_\tau(t) = \exp\left\{-\frac{it\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}} + \lambda\sum_{j=1}^{k}\left(\left(1 - P\left(\frac{it}{\sqrt{\mu_2}} - \frac{t^2}{2\ !\mu_2} + O(\lambda^{-3/2})\right)\right)^{-jr} - 1\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{it\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}} + \lambda\frac{itP}{\sqrt{\mu_2}}\sum_{j=1}^{k} jr - \lambda\frac{t^2}{2\ !\mu_2}\left(P\sum_{j=1}^{k} jr + P^2\sum_{j=1}^{k} jr(jr+1)\right) + O(\lambda^{-1/2})\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{it\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}} + \frac{it\alpha_1}{\sqrt{\mu_2}} - \frac{t^2\mu_2}{2\ !\mu_2} + O(\lambda^{-1/2})\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + O(\lambda^{-1/2})\right\}.$$

Последнее равенство по теореме Леви [10,с.134] означает сходимость по распределению с.в. τ к стандартному нормальному N(0,1) распределению. Далее, возвращаясь к исходной с.в. ξ, используя усиленную воспроизводимость нормального распределения [10,с.172] приходим к доказываемому утверждению.

VI. Расчет ф.в. Полученные рекуррентные соотношения (3), (7) использованы для вычисления функции вероятностей p_n (4) при характерных значениях параметров λ, r, P, k. Для более удобного восприятия значения ф.в. откладываются по оси ординат и графически изображается ломаной (а не гистограммой) при значениях аргумента $n = 0, 1, \ldots$, откладываемых по оси абцисс.

Рис.1а-в при $k = 1$ иллюстрируют поведение ф.в. Пуассон-Паскаль распределения, рассмотренного в [7]. На рис.1,2а-в результаты счета иллюстрируют доказанную выше асимптотическую нормальность поведения распределения с ф.в. p_n при $\lambda \to \infty$. Видно, что при малых значениях

λ $(\lambda = 1;2)$ в точке $n = 1$ наблюдается «проседание» (см. рис.1,2а-в). Причем с уменьшением p «проседание» заметно и для больших λ $(\lambda = 4;6)$, а сама ф.в. распределения более «размазана» по n. Для $k = 2$ при малых значениях λ $(\lambda = 1;2)$ «проседание» более ярко выражено (сравните рис.1б с рис.2б; рис.1в с 2в).

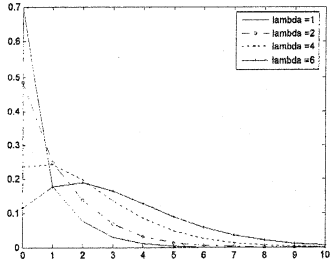

Рис.1а $(k = 1,\ p = 0.8,\ r = 2)$

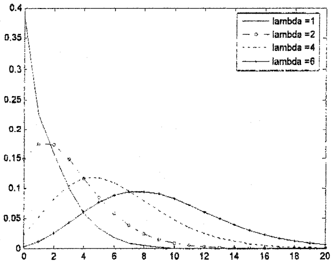

Рис.2а $(k = 2,\ p = 0.8,\ r = 2)$

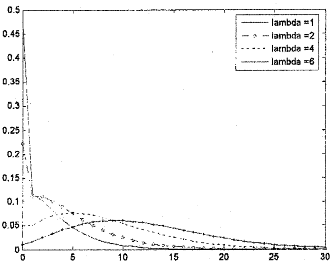

Рис.1б $(k = 1,\ p = 0.5,\ r = 2)$

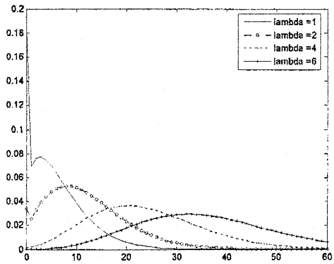

Рис.2б $(k = 2,\ p = 0.5,\ r = 2)$

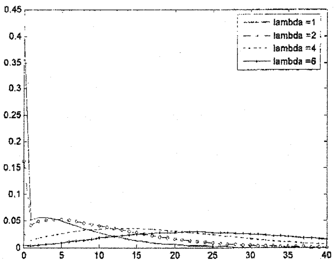

Рис.1в $(k = 1,\ p = 0.3,\ r = 2)$

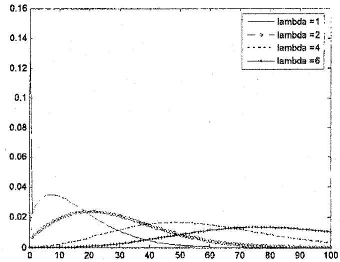

Рис.2в $(k = 2,\ p = 0.3,\ r = 2)$

С ростом значений либо k (рис.3а,б), либо λ при небольших p (рис.1б,в; 2б,в), либо r (рис.4а,б) «проседание» в точке $n = 1$ ломаной ф.в. p_n уменьшается.

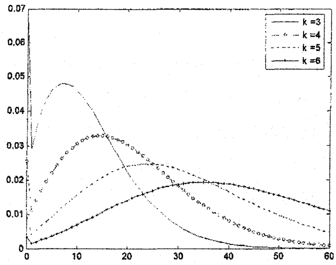

Рис.3а $(\lambda = 1,\ p = 0.5,\ r = 2)$

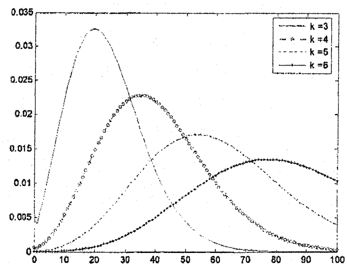

Рис.3б $(\lambda = 2,\ p = 0.5,\ r = 2)$

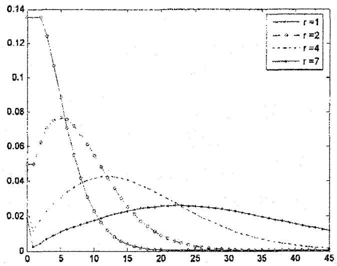

Рис.4а $(k = 1,\ \lambda = 4,\ p = 0.5)$

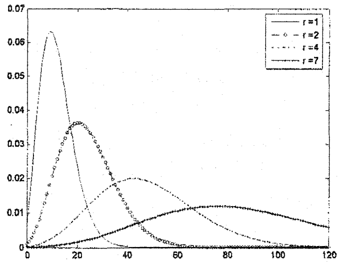

Рис.4б $(k = 2,\ \lambda = 4,\ p = 0.5)$

Расчеты и их визуализация показали отсутствие структурности кривой ф.в. в других точках. Связывать излом с эффектом «множественности», характерного для ряда других сложных пуассоновских распределений [6,15], нет оснований.

Литература

1. Philippou A.N. Mixtures of Distributions by the Poisson Distribution of Order k. Biometrical Journal, 1989, v.31, no.1, p.67-74.
2. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О предельном распределении при регистрации продуктов множественных реакций // Обработка и интерпретация результатов наблюдений. М.: Изд-во МГУ, 1981. С.27-42.
3. Neyman J. On a new class of "contagious" distributions, applicable in entomology and bacteriology. Ann.Of Math. Statist., 1939, vol.10, p.35-57.
4. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Обобщенные процессы риска. М.: МАКС-Пресс, 2000.
5. Johnson N.L., Kotz S., Kemp A.W. Univariate discrete distributions. 2edition, Wiley, New York, 1992. 590p.
6. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1985.
7. Catti S.K., Gurland J. The Poisson Pascal distribution. Biometrics, 1961, v.17, no.4, pp.527-538.
8. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы обработки данных. М.: Мир, 1980.
9. Гурса Э. Курс математического анализа, т.1. Изд.3. М.:ГТТИ, 1936.
10. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
11. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики, часть 1. Арифметика и алгебра. М.: Госуд.изд-во физ.-матем. литер., 1959.
12. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О моментных характеристиках распределений. В кн.: "Методы математического моделирования: Труды факультета ВмиК". М.: Диалог-МГУ.1998г.С.34-41.
13. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.:ИЛ, 1963.
14. Грехем Г., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.:"Мир", 1998.С.287.
15. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические свойства двухпараметрического семейства распределений Пуассона порядка k. Вест. Моск.ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн., 2000, №2, с.32-37.

В.С. Левченков, Л.Г. Левченкова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИОТНОШЕНИЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ СВЯЗЕЙ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ [1]

Введение

Под социальной сетью обычно понимают структуру связей, возникающих в коллективе, участники которого обладают определенными общими интересами. Примером социальной сети является совокупность ученых, работающих в некоторой области науки и связанных друг с другом совместными научными работами. Другой пример: социальная сеть большой программистской компании, группы сотрудников которой выполняют совместные проекты.

С формальной точки зрения социальная сеть – это граф с множеством вершин, фиксирующих совокупность индивидуумов в сети, и дугами, показывающими взаимодействие между людьми и порождающими структуры с разнообразными свойствами (см. обзорную работу [1]). Очень интересной проблемой, связанной с описанием временной эволюции таких сетей является прогнозирование новых связей, появляющихся в сети с течением времени [2]. Она формализуется следующим образом. Пусть мы знаем в какой-то момент t (или точнее, промежуток времени I) состояние социальной сети, т.е. вершины графа сети и все дуги. Можно ли только на основе информации, описывающей это состояния сделать оценку того, какие новые дуги появятся в этом графе к другому моменту времени t' (или промежутку времени I'). В работе [2] эта проблема рассматривается для конкретного случая социальной сети ученых, работающих в ряде областей физики и публикующих статьи по определенной тематике. Для оценки различных теоретических моделей авторы используют базы данных по научным статьям в пяти областях физики за период 1994-1999гг. Исходные данные в каждой базе разбиваются на две группы: в первой содержатся работы за промежуток времени $I = [1994, 1996]$, а во второй – за промежуток $I' = [1997, 1999]$. Социальная сеть на каждом интервале I и I' описывается графами $G = (A, E)$ и $G' = (A, E')$, соответственно. Множество вершин A

[1]Работа выполнена при поддержке Гранта Президиума РАН по проекту ИКС.