А.Г. Белов, В.Я. Галкин

МОМЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО ПУАССОНА С ОБОБЩАЮЩИМ БИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

При изучении множественных процессов в ядерной физике, биологии, бактериологии, в теории массового обслуживания и других областях естествознания часто приходится сталкиваться с моделями Пуассона, обобщенными биномиальным распределением.

Рассмотрим дискретную случайную величину (с.в.)

$$\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \ldots + k\zeta_k, \tag{1}$$

являющуюся взвешенной суммой k независимых пуассоновских с.в. $\zeta_j \sim Po(\lambda_j)$. Легко найти характеристическую функцию (х.ф.) для ζ :

$$\varphi_\zeta(t) = E\ e^{it\zeta} = E\ e^{it\sum_{j=1}^{k} j\zeta_j} = \prod_{j=1}^{k} E\ e^{ijt\zeta_j} = \prod_{j=1}^{k} \exp\{\lambda_j(e^{ijt}-1)\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (e^{ijt} - 1)\right\}, \tag{2}$$

но её функция вероятностей (ф.в.) довольно сложна и может быть записана в виде $(k\text{-}1)$–мерной суммы со связями.

Укажем одно из представлений ф.в. $p_n = P\{\zeta = n\}$ [1,2]:

$$p_n = e^{-\lambda} \sum_{i_j = 0,\ j = k,\ldots,2}^{\left[(n - I_{j+1}^{(k)})/j\right]} \frac{\lambda_1^{\,n - I_2^{(k)}}}{(n - I_2^{(k)})\,!} \prod_{j=2}^{k} \frac{\lambda_j^{\,i_j}}{i_j\,!}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{3}$$

Здесь приняты обозначения

$$\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\ ,\ I_l^{(j)} = \sum_{\alpha=l}^{j} \alpha \cdot i_\alpha$$

для любых целых $l \le j$, $[z]$ – целая часть числа z.

Рассмотрим теперь условную с.в. ξ/ζ, имеющую биномиальное распределение с параметрами ζ и ε, $0 < \varepsilon \le 1$, $\xi/\zeta \sim Bi(\zeta,\varepsilon)$. Формулы х.ф. и ф.в. для рассматриваемой с.в. ξ аналогичны (2) и (3), но с новыми параметрами

$$x_j = \varepsilon^j \sum_{\nu=j}^{k} C_\nu^J\ (1-\varepsilon)^{\nu - j} \lambda_\nu, \quad j = 1,2,\ldots,k \tag{4}$$

$$(x = \sum_{j=1}^{k} x_j = \lambda \; - \; \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu (1-\varepsilon)^\nu),$$

а именно:

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} x_j (e^{ijt} - 1) \right\} \;, \qquad (2')$$

$$p_n = e^{-x} \sum_{i_j = 0,\, j = k,\dots,2}^{\left[(n - I_{j+1}^{(k)})/j\right]} \frac{x_1^{\,n - I_2^{(k)}}}{(n - I_2^{(k)})\,!} \prod_{j=2}^{k} \frac{x_j^{\,i_j}}{i_j!} \;, \quad n = 0,1,\dots \qquad (3')$$

Понятно, что уже подсчёт ф.в. по формуле (3'), а тем более – исследование её вероятностных свойств, в том числе моментных характеристик является трудной задачей.

В настоящей статье изучены всевозможные моментные характеристики с.в. ξ (соответствующие результаты для ζ получаются, если положить в (4) $\varepsilon = 1$).

I. Семиинварианты. Пожалуй, наиболее просто записываемыми из всех моментных характеристик оказываются семиинварианты (обычные κ_r и факториальные $(\kappa)_r$ – [5,с.110]). Из (2'), получим производящую функцию семиинвариантов $s(t) = \ln \; \varphi(t)$ в виде

$$s(t) = \sum_{j=1}^{k} x_j (e^{ijt} - 1) \;, \qquad (5)$$

а сами κ_r при любом $r = 1, 2, \dots$ имеют вид

$$\kappa_r = \frac{d^r}{dt^r} s(t/i)\Big|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r} \sum_{j=1}^{k} x_j (e^{jt} - 1)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{k} j^r x_j = g_r^{(1)}(x_1, \dots, x_k), \quad (6)$$

где $g_r^{(1)}(x_1, \dots, x_k)$ – обозначение для специальных полиномов [3].

Числа Стирлинга первого $(s_r^{(j)})$ и второго рода $(\sigma_r^{(j)})$ [9;10,с.43] задают связь обычных κ_r и факториальных семиинвариантов $(\kappa)_r$ [4,6]:

$$(\kappa)_r = \sum_{j=0}^{r} s_r^{(j)} \; \kappa_j \;, \; \kappa_r = \sum_{j=0}^{r} \sigma_r^{(j)} \; (\kappa)_j \;.$$

Тогда для любого $r = 1, \dots, k$ имеем

$$(\kappa)_r = \sum_{j=0}^{r} s_r^{(j)} \sum_{m=1}^{k} m^j x_m = \sum_{m=1}^{k} x_m \sum_{j=0}^{r} s_r^{(j)} \; m^j =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} (m)_r x_m = \sum_{m=r}^{k} (m)_r x_m = r\,! \sum_{m=1}^{k} C_m^r x_m \,, \tag{7}$$

где $(m)_r = \Gamma(m)/\Gamma(r) = m(m-1)\ \ldots\ (m-r+1)$ – символ Похаммера [7]; $(\kappa)_0 = \kappa_0 = 0$, $(\kappa\ )_r = 0$ для $r = k+1, k+2, \ldots$

В качестве первых очевидных следствий при $k = 1, 2$ имеем явные виды семиинвариантных характеристик соответственно для распределений Пуассона $Po(x_1)$ и Эрмита $He(x_1\ , x_2)$ [8]:

$\kappa_r^{(1)} = x_1\ , \ r = 1, 2, \ldots; (\kappa)_1^{(1)} = x_1\ , \ (\kappa)_r^{(1)} = 0, \ r = 2, 3, \ldots;$

$(\kappa)_r^{(2)} = x_1 + 2^r x_2\ , \ r = 1, 2, \ldots;$

$(\kappa)_1^{(2)} = x_1 + 2\ x_2\ , \ (\kappa)_2^{(2)} = 2x_2\ , \ (\kappa)_r^{(2)} = 0\ , \ r = 3, 4, \ldots$

Переходя к рекуррентностям на семиинварианты $\kappa_r^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} j^r x_j$, сделаем следующие замечания. Прежде всего учтём, что $\kappa_r^{(k)}$ – функция не только натурального r и параметров $x_1, \ldots, x_k$, но и их числа k.

Здесь возможны три типа рекуррентностей.

Во-первых, $\kappa_{r+1}^{(k)}$ линейно выражается через $\kappa_r^{(k)}\ ,\kappa_r^{(k-1)}\ , \ldots,\kappa_r^{(1)}$. Во-вторых, для натуральных $r \geq k$ при фиксированном k $\kappa_{r+1}^{(k)}$ есть линейная функция $\kappa_r^{(k)}\ ,\kappa_{r-1}^{(k)}\ , \ldots,\kappa_{r-k+1}^{(k)}$. В третьих, имеется дифференциально-рекуррентное соотношение, когда $\kappa_{r+1}^{(k)}$ представимо через производные от $\kappa_r^{(k)}$ по параметрам $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Вот конкретные рекуррентности этих типов.

Утверждение 1. Для $r, k = 1,2, \ldots$ и $l = 1, \ldots, k$

$$\kappa_{r+1}^{(k)} = k\ \kappa_r^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} \kappa_r^{(l)}\ , \quad \kappa_1^{(l)} = \sum_{j=1}^{l} j\ x_j\ . \tag{8}$$

Доказательство. Воспользовавшись справедливостью равенств

$$\sum_{j=1}^{k} j\ x_j e^{jt} = k \sum_{j=1}^{k} x_j\ (e^{jt} - 1) + \sum_{j=1}^{k} j\ x_j - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) x_j (e^{jt} - 1) =$$

$$= k \sum_{j=1}^{k} x_j\ (e^{jt} - 1) + \sum_{j=1}^{k} j\ x_j - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=j}^{k-1} x_j\ (e^{jt} - 1) =$$

$$= k \sum_{j=1}^{k} x_j\ (e^{jt} - 1) + \sum_{j=1}^{k} j\ x_j - \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l} x_j\ (e^{jt} - 1)\ ,$$

из соотношения (6) имеем

$$\kappa_{r+1}^{(k)} = \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} \sum_{j=1}^{k} x_j (e^{jt} - 1) \Bigg|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r} \sum_{j=1}^{k} j \ x_j e^{jt} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= k \ \frac{d^r}{dt^r} \ \sum_{j=1}^{k} x_j (e^{jt} - 1) \Bigg|_{t=0} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{d^r}{dt^r} \sum_{j=1}^{l} x_j (e^{jt} - 1) \Bigg|_{t=0} =$$

$$= k\kappa_r^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} \kappa_r^{(l)} .$$

Утверждение 2. При $r = k$, $k + 1$, ... и фиксированном k $\kappa_1^{(k)}$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\sum_{j=1}^{k+1} s_{k+1}^{(j)} \kappa_{r-k+j}^{(k)} = 0 \ , \quad r \geq k \ . \tag{9}$$

Доказательство. Проверим (9), воспользовавшись (6) и определением чисел Стирлинга первого рода:

$$(x)_n = \sum_{m=0}^{n} s_n^{(m)} x^n \ .$$

Тогда, поскольку $s_{k+1}^{(0)} = 0$, левая часть (9) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k+1} s_{k+1}^{(j)} \sum_{m=1}^{k} m^{r-k+j} x_m = \sum_{m=1}^{k+1} m^{r-k} x_m \sum_{j=0}^{k+1} s_{k+1}^{(j)} \ m^j =$$

$$= \sum_{m=1}^{k+1} m^{r-k} x_m \ (m)_{k+1} = \sum_{m=1}^{k} m^{r-k+1} (m-1)....(m-k) \ x_m = 0 \ .$$

Так как $s_{k+1}^{(k+!)} = 1$, то (9) даёт рекуррентное соотношение

$$\kappa_{r+1}^{(k)} = - \sum_{j=1}^{k} s_{k+1}^{(j)} \ \kappa_{r-k+j}^{(k)} \ , \quad r = k, k+1, ... \ ,$$

$$\kappa_j^{(k)} = \sum_{m=1}^{k} m^j x_m \ , \quad j = 1, \ ... \ , k \ .$$

Утверждение 3. Для r, $k = 1,2,$ ...

$$\kappa_{r+1}^{(k)} = \sum_{m=1}^{k} m \ x_m \frac{\partial}{\partial \ x_m} \kappa_r^{(k)} = \left(1 + \sum_{m=2}^{k} (m-1) \ x_m \frac{\partial}{\partial \ x_m} \right) \kappa_r^{(k)} \ , \tag{10}$$

$$\kappa_1^{(k)} = \sum_{m=1}^{k} m \ x_m$$

легко проверяется.

Следствия. Рекуррентные соотношения (8) – (10) на семиинварианты $\kappa_r^{(1)}$ распределения $Po(x_1)$ запишутся как

$$\kappa_{r+1}^{(1)} = \kappa_r^{(1)} \ , \quad s_2^{(1)} \ \kappa_r^{(1)} + s_2^{(2)} \ \kappa_{r+1}^{(1)} = 0 \ ,$$

$$\kappa_{r+1}^{(1)} = x_1 \ \frac{d}{d \ x_1}\kappa_r^{(1)} \ , \quad \kappa_1^{(1)} = x_1 \ , \quad r = 1, \ 2, ...,$$

а на семиинварианты $(\kappa)_r^{(2)}$ распределения $He(x_1 \ , \ x_2)$ – как

$$\kappa_{r+1}^{(2)} = 2 \ \kappa_r^{(2)} - \kappa_r^{(1)} = \left(1 + x_2 \frac{\partial}{\partial \ x_2}\right) \ \kappa_r^{(2)} \ ,$$

$$\kappa_1^{(2)} = x_1 + 2x_2 \ , \qquad \kappa_1^{(1)} = x_1 \ ,$$

$$\kappa_{r+1}^{(2)} = 3 \ \kappa_r^{(2)} - 2\kappa_{r-1}^{(2)} \ , \quad r = 2, \ 3, \ ...,$$

$$\kappa_1^{(2)} = x_1 + 2x_2 \ , \quad \kappa_2^{(2)} = x_1 + 4x_2 \ ,$$

поскольку $s_2^{(1)} = -1, \quad s_2^{(2)} = 1, \quad s_3^{(1)} = 2, \quad s_3^{(2)} = -3$ [9, с. 627].

Для факториальных семиинвариантов $(\kappa)_r$ справедливы следующие соотношения.

Утверждение 4. Любой $(\kappa)_r$, $r = 1, \ ..., \ k$ линейно выражается через последующие $(\kappa)_{r+1}$, ..., $(\kappa)_k$ и параметры x_r :

$$(\kappa)_r = \sum_{i=1}^{k-r} (-1)^{i-1} (\kappa)_{r+i} / i! + r! x_r \ , \quad r = k, \ k-1, \ ..., \ 1 \ . \qquad (11)$$

Действительно, рассмотрев $\sum\limits_{i=0}^{k-r} (-1)^i (\kappa)_{r+i} / i \ !$, подставив явный вид (7) $(\kappa)_{r+i}$ и поменяв порядок суммирования, имеем

$$\sum_{m=r}^{k} x_m \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m)_{r+i} / i! = \sum_{m=r}^{k} x_m (m)_r \ \delta_{mr} = (r)_r \ x_r = r \ ! \ x_r \ ,$$

что и утверждается; второе равенство здесь – тождество

$$\sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m)_{r+i} / i! = (m)_r \ \delta_{mr} = r \ ! \ \sum_{i=0}^{k-r} (-1)^i \ C_m^i \ C_{m-i}^r \ ,$$

которое получается сразу, если продифференцировать r раз разложение бинома $(t-1)^m$ и положить $t = 1$.

Утверждение 5. Факториальные семиинварианты $(\kappa)_1, (\kappa)_2, \ldots, (\kappa)_k$ подчиняются следующему дифференциально-рекуррентному соотношению

$$(\kappa)_{r+1} = \sum_{m=r+1}^{k} (m-r)\ x_m \frac{\partial}{\partial\ x_m}(\kappa)_r\ , \quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\ . \qquad (12)$$

Доказательство сразу получается из рекуррентности на $(m)_r$

$$(m)_{r+1} = (m-r)\ (m)_r\ .$$

В самом деле, умножив обе части очевидного равенства $\partial/\partial\ x_m\ (\kappa)_r = (m)_r$ на *(m-r)* и просуммировав по m от $r+1$ до k, приходим к (12).

Следствия для распределения $Po(x_1)$ и $He(x_1\ ,\ x_2)$ очевидны

$$(\kappa)_1^{(1)} = x_1\ , \qquad (\kappa)_{r+1}^{(1)} = 0, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots\ ;$$

$$(\kappa)_1^{(2)} = (\kappa)_2^{(2)} + x_1\ , \quad (\kappa)_2^{(2)} = 2\ !\ x_2\ ,$$

$$(\kappa)_2^{(2)} = x_2\ \frac{\partial}{\partial\ x_2}(\kappa)_1^{(2)}\ , \quad (\kappa)_{r+1}^{(2)} = 0\ , \quad r = 2,\ 3,\ \ldots$$

II. Начальные моменты. Явный вид начальных моментов α_r получается из производящей функции (п.ф.) моментов

$$M(t) = \varphi(t/i) = P(e^t) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{k} x_m(e^{mt} - 1)\right\} \qquad (13)$$

путем её дифференцирования

$$\alpha_r = \frac{d^r}{dt^r}M(t)\ \Bigg|_{t=0}\ ,$$

если обращение *M(t)* произвести по формуле Фаа ди Бруно [9;10,с.48] для n-ой производной от сложной функции $f(t) = F(y(t))$:

$$\frac{d^n}{d\ t^n}f(t) = n\ !\ \sum_{j=0}^{n} \frac{d^j}{dy^j}F(y) \sum_{\substack{I_1^{(n)} = n,\\ J_1^{(n)} = j}} \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{d^l}{dt^l}y(t)\right)^{i_l} \Big/ (l!)^{i_l} i_l\ !\ ,$$

где обозначено $J_p^{(q)} = \sum_{\alpha=p}^{q} i_\alpha\ ,\ I_p^{(q)} = \sum_{\alpha=p}^{q} \alpha \cdot i_\alpha\ ,\ p \le q,\ i_p,\ \ldots,\ i_q \ge 0$ –

некоторые целые числа, $P(z) = Ez^{\xi}$ - п.ф. случайной величины ξ .

Впрочем, явный вид α_r сразу даётся общим представлением начальных моментов через семиинварианты [6]:

$$\alpha_r = \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{l=1}^{r} \frac{\kappa_l^{i_l}}{(l!)^{i_l} i_l!}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

В самом деле, так как из (6) $\kappa_l = g_l^{(1)} = g_l^{(1)}(x_1, \ldots, x_k)$, из (13) следует $(r=1,2,\ldots)$

$$\alpha_r = \alpha_r^{(k)} = r! \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{l=1}^{r} \frac{\left(\sum_{m=1}^{k} m^l x_m\right)^{i_l}}{(l!)^{i_l} i_l!} = Y_r\left(g_1^{(1)}, \ldots, g_r^{(1)}\right), \quad (14)$$

где $Y_r\left(g_1^{(1)}, \ldots, g_r^{(1)}\right)$ - экспоненциальные полиномы Белла степени r от r переменных [10,с.46], которые проще всего определять следующими тождествами

$$h = h(z), \quad h_l = \frac{d^l h}{dz^l}, \quad Y_r(h_1,\ldots,h_r) = e^{-h}\frac{d^r}{dz^r}e^h = r! \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{l=1}^{r} \frac{h_l^{i_l}}{(l!)^{i_l} i_l!}.$$

Следствия. Начальные моменты $\alpha_r^{(1)}$ распределения Пуассона $Po(x_1)$ совпадают с полиномами Стирлинга от аргумента x_1:

$$\alpha_r^{(1)} = s_r(x_1) = \sum_{m=0}^{r} \sigma_r^{(m)} x_1^m, \quad r = 0, 1, \ldots,$$

а начальные моменты распределения Эрмита $He(x_1, x_2)$ суть

$$\alpha_r^{(2)} = r! \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{l=1}^{r} \frac{\left(x_1 + 2^l x_2\right)^{i_l}}{(l!)^{i_l} i_l!}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Утверждение 6. Начальные моменты α_r подчиняются рекуррентным соотношениям *(r = 0,1, ...)*:

$$\alpha_{r+1} = \sum_{m=1}^{k} m\, x_m \sum_{j=0}^{r} C_r^j m^j \alpha_{r-j} = \sum_{m=1}^{k} m\, x_m \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \alpha_r, \quad (15)$$

$$\alpha_r^{(k)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j \alpha_{r-j}^{(k-1)} k^j \alpha_j^{(1)}(x_k), \quad k = 2, 3, \ldots, \qquad (16)$$

где $\alpha_j^{(1)}(x_k)$ – начальные моменты распределения $Po(x_k)$.

Доказательство. Путем однократного дифференцирования и формулы Лейбница имеем

$$\alpha_{r+1} = \frac{d^{r+1}}{d\ t^{r+1}} \exp\{\sum_{m=1}^{k} x_m(e^{m\,t}-1)\} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{d^{\,r}}{d\ t^{\,r}} \sum_{m=1}^{k} m\ x_m\ e^{m\,t} \exp\{\sum_{l=1}^{k} x_l(e^{l\,t}-1)\} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} m\ x_m \sum_{j=0}^{r} C_r^j \frac{d^j}{dt^j} e^{\,m\,t} \frac{d^{r-j}}{dt^{r-j}} \exp\{\sum_{l=1}^{k} x_l(e^{l\,t}-1)\} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} m\ x_m \sum_{j=0}^{r} C_r^j\ m^j\ \alpha_{\,r-j}\ .$$

Второе равенство (15) легко проверяется. Для доказательства (16) также воспользуемся формулой Лейбница:

$$\alpha_r^{(k)} = \frac{d^{\,r}}{d\ t^{\,r}} \exp\{\sum_{m=1}^{k} x_m(e^{m\,t}-1)\} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{d^{\,r}}{d\ t^{\,r}} \exp\{\sum_{m=1}^{k\text{-}1} x_m(e^{m\,t}-1)\}\ \exp\{x_k(e^{k\,t}-1)\} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j \frac{d^{\,r-j}}{d\ t^{\,r-j}} \exp\{\sum_{m=1}^{k\text{-}1} x_m(e^{m\,t}-1)\}\ \frac{d^{\,j}}{d\ t^{\,j}} \exp\{x_k(e^{k\,t}-1)\} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j\ \alpha_{r-j}^{(k-1)}\ k^j \alpha_j^{(1)}\ .$$

Следствия. Начальные моменты $\alpha_r^{(1)}$ распределения Пуассона $Po(x_1)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям $(r=0,1,\ldots)$

$$\alpha_{r+1}^{(1)} = x_1\left(1+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\alpha_r^{(2)} = x_1\sum_{j=0}^{r} C_r^j \alpha_j^{(1)} = x_1\,(\alpha+1)^r, \qquad \alpha^j = \alpha_j^{(1)}\ ;$$

моменты $\alpha_r^{(2)}$ распределения Эрмита $He(x_1,x_2)$ – соотношениям $(r=0,1,\ldots)$

$$\alpha_{r+1}^{(2)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^{\,j}\left(x_1+2^{\,j+1}x_2\right)\ \alpha_{r-j}^{(2)} =$$

$$= \left(\alpha_1^{(2)} + x_1\frac{\partial}{\partial\ x_1} + 2\ \ x_2\ \frac{\partial}{\partial\ x_2}\right)\ \alpha_r^{(2)}\ ,$$

а $\alpha_r^{(2)}$ следующим образом выражаются через начальные моменты $\alpha_j^{(1)}(x_m)$ распределений Пуассона $Po(x_m)$, $m = 1,\ 2$

$$\alpha_r^{(2)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j \ \alpha_{r-j}^{(1)}(x_1)\ 2^j\ \alpha_j^{(1)}(x_2) = \left(\alpha^{(1)}(x_1)+2\ \alpha^{(1)}(x_2)\right)^r ,$$

$$(\alpha^{(1)}(x_m))^j \equiv \alpha_j^{(1)}(x_m) \ .$$

III. Факториальные и биномиальные моменты. Здесь пойдёт речь о факториальных $(\alpha)_r$ и биномиальных B_r моментах распределения (3'). Явный вид $(\alpha)_r$ может быть получен из обращения п.ф. факториальных моментов $P(1 + t)$:

$$(\alpha)_r = \frac{d^r}{dt^r}P(1+t)\ \Bigg|_{t=0} ,$$

если r-ю производную взять по формуле Фаа ди Бруно и выполнить некоторые преобразования:

$$(\alpha)_r = r!\sum_{I_1^{\{\min\{r,k\}\}}=r}\ \prod_{l=1}^{\min\{n,k\}}\left(\sum_{m=1}^{k}(m)_l x_m\right)^{i_l}(l!)^{-i_l}(i_l\ !)^{-1}, \quad r=0,\ 1,\ldots \quad (17)$$

К этому же результату естественно приводит и общая связь факториальных моментов $(\alpha)_r$ с факториальными семиинвариантами $(\kappa)_j$ [6]

$$(\alpha)_r = Y_r((\kappa)_1\ ,\ .\ .\ .\ ,\ (\kappa)_r)\ , \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots,$$

и поскольку в нашем случае

$$(\kappa)_r = \frac{d^r}{d\ z^r}\ln\ P(1) = \frac{d^r}{dt^r}\sum_{m=1}^{k} x_m(z^m-1)\ \Bigg|_{z=1} = \sum_{m=r}^{k}(m)_r x_m ,$$

получаем

$$(\alpha)_r = \begin{cases} Y_r((\kappa)_1\ ,\ .\ .\ .\ ,\ (\kappa)_r)\ , \ \text{если}\ r \le k\ ; \\ Y_r((\kappa)_1\ ,\ .\ .\ .\ ,\ (\kappa)_k,\ 0_{k+1},\ .\ .\ ,\ 0_r)\ ,\ \text{если}\ r > k \end{cases} , \quad (18)$$

где индекс у нуля означает место его нахождения как аргумента.

Следствия. Факториальные моменты $(\alpha)_r^{(1)}$ пуассоновского распределения $Po(x_1)$ суть $(\alpha)_r^{(1)} = x_1^r$, $r = 0,\ 1,\ \ldots,$ [11, с.90], а для факториальных моментов $(\alpha)_r^{(2)}$ эрмитовского распределения $He(x_1\ ,\ x_2)$ имеют место представления [8] (*r = 0,1, …*)

$$(\alpha)_r^{(2)} = r\,! \sum_{i_1+2i_2=r} \frac{(x_1+2x_2)^{i_1} x_2^{i_2}}{i_1\,!\; i_2\,!} = r\,! \sum_{j=0}^{[r/2]} \frac{x_2^j\;(x_1+2x_2)^{r-2j}}{j\,!\;(r-2j)\,!} .$$

Утверждение 7. Факториальные моменты $(\alpha)_r$ при фиксированном k подчиняются рекуррентным соотношениям ($r = 0,1$ ...):

$$(\alpha)_{r+1} = \sum_{m=1}^{k} x_m \sum_{j=0}^{\min\{r,\,m-1\}} C_r^j\;(m)_{j+1}(\alpha)_{r-j} = \tag{19}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} m\;x_m \left(1+\frac{\partial}{\partial\; x_m}\right)(\alpha)_r - r\;(\alpha)_r .$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства произведем однократное дифференцирование п.ф. факториальных моментов и воспользуемся формулой Лейбница имеем

$$(\alpha)_{r+1} = \left.\frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} P(1+t)\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\frac{d^{\,r}}{d\;t^{\,r}} \sum_{m=1}^{k} m\;x_m\;(1+t)^{m-1} \exp\{\sum_{l=1}^{k} x_l((1+t)^l-1)\}\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\sum_{m=1}^{k} m\;x_m \sum_{j=0}^{r} C_r^j \frac{d^j}{dt^j}(1+t)^{m-1} \frac{d^{r-j}}{dt^{r-j}} \exp\{\sum_{l=1}^{k} x_l(e^{lt}-1)\}\right|_{t=0} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} x_m \sum_{j=0}^{\min\{r,\,m-1\}} C_r^j\;(m)_{j+1}(\alpha)_{r-j} .$$

Для доказательства второго равенства проще всего заметить, что его правая часть равна

$$\alpha_1\;(\alpha)_r + \sum_{m=1}^{k} m\;x_m \frac{\partial^r}{\partial\;z^r}\;\frac{\partial}{\partial\;x_m} P(1) - r\;(\alpha)_r =$$

$$= \alpha_1\;(\alpha)_r + \left.\frac{\partial^r}{\partial\;z^r} P(z) \sum_{m=1}^{k} m\;x_m(z^m-1)\right|_{z=1} - r\;(\alpha)_r =$$

$$= \left.\frac{\partial^r}{\partial\;z^r} z \frac{\partial}{\partial\;z} P(z)\right|_{z=1} - r\;(\alpha)_r =$$

$$= \frac{\partial^{r+1}}{\partial z^{r+1}} P(1) + C_r^1 \frac{\partial^r}{\partial z^r} P(1) - r (\alpha)_r = (\alpha)_{r+1} .$$

Следствия. Для $(\alpha)_r^{(1)}$ распределения $Po(x_1)$

$$(\alpha)_{r+1}^{(1)} = x_1 (\alpha)_r^{(1)} = x_1 \left(1 + \frac{d}{d x_1}\right) (\alpha)_r^{(1)} - r(\alpha)_r^{(1)}, \quad r = 0,1,...,$$

а для $(\alpha)_r^{(2)}$ распределения Эрмита $He(x_1, x_2)$ ($r = 0,1,...$)

$$(\alpha)_{r+1}^{(2)} = (x_1 + 2 x_2)(\alpha)_r^{(2)} + 2 x_2 r (\alpha)_{r-1}^{(2)} =$$

$$= (\kappa)_1^{(2)} (\alpha)_r^{(2)} + r (\kappa)_2^{(2)} (\alpha)_{r-1}^{(2)} =$$

$$= \left(\alpha_1^{(2)} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - r\right) (\alpha)_r^{(2)} .$$

В силу связи биномиальных моментов $r!B_r = (\alpha)_r$ с факториальными для B_r из (18) получается явный вид, переходящий при $k=1$ в биномиальные моменты $B_r^{(1)} = x_1^r / r!$ пуассоновского, а при $k=2$ – в

$$B_r^{(2)} = \sum_{j=0}^{[r/2]} \frac{x_2^j (x_1 + 2x_2)^{r-2j}}{j! (r-2j)!}$$

эрмитовского распределений.

Рекуррентности на B_r переписываются из (19) ($r = 1, 2, ...$)

$$rB_r = \sum_{m=1}^{k} x_m \sum_{j=1}^{\min\{r,m\}} j C_m^j B_{r-j} = \sum_{m=1}^{k} m x_m \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_m}\right) B_{r-1} - (r-1) B_{r-1}.$$

При этом для $B_r^{(1)}$ распределения $Po(x_1)$ очевидно

$$(r + 1) B_{r+1}^{(1)} = x_1 B_r^{(1)} = \left(x_1 + x_1 \frac{d}{d x_1} - r\right) B_r^{(1)} , \quad r = 0, 1, ... ,$$

а для $B_r^{(2)}$ распределения $He(x_1, x_2)$ ($r = 1, 2...$)

$$(r+1) B_{r+1}^{(2)} = B_1^{(2)} B_r^{(2)} + 2x_2 B_{r-1}^{(2)} = \left(B_1^{(2)} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - r\right) B_r^{(2)} ,$$

$$B_1^{(2)} = x_1 + 2 x_2 .$$

IV. Центральные моменты. П.ф. $C(t)$ центральных моментов μ_r определяется соотношениями [12, с.91]

$$C(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \frac{t^r}{r!} = \exp(-E\xi)M(t).$$

В нашем случае в силу (13) имеем

$$C(t) = \exp(-\alpha_1 t)\, M(t) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{k} x_m (e^{mt} - mt - 1)\right\}. \quad (20)$$

И, следовательно, r - ый центральный момент $\mu_r = \left.\frac{d^r}{dt^r} C(t)\right|_{t=0}$ может быть найден с помощью формулы обращения Фаа ди Бруно и ряда преобразований.

Для получения явного вида центральных моментов μ_r можно также воспользоваться доказанным в [6] их связью с семиинвариантами

$$\mu_r = Y_r(0, \kappa_2, ..., \kappa_r) = r! \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{l=2}^{r} \frac{\kappa_l^{i_l}}{(l!)^{i_l} i_l!}, \quad r = 0, 1, ...,$$

в частности $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \kappa_2$, $\mu_3 = \kappa_3$, $\mu_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2$, $\mu_5 = \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3$.

Тогда в силу (6) имеем

$$\mu_r = r! \sum_{I_2^{(r)}=r} \prod_{l=2}^{r} \left(\sum_{m=1}^{k} m^l x_m \right)^{i_l} (l!)^{-i_l} (i_l!)^{-1}, \quad r = 0, 1, ... \quad (21)$$

Отсюда и из (6), в частности, дисперсия с.в. ξ равна

$$Var\xi = \mu_2 = \kappa_2 = g_2^{(1)}(x_1,...,x_k) = \sum_{m=1}^{k} m^2 x_m.$$

Следствия: Центральные моменты $\mu_r^{(1)}$ распределения $Po(x_1)$ совпадают с присоединёнными многочленами Стирлинга $\bar{s}_r(x_1)$ [2,с.57]:

$$\mu_r^{(1)} = \left.\frac{d^r}{dt^r} C(t)\right|_{t=0} = \left.\frac{d^r}{dt^r} \exp\{x_1(e^t - t - 1)\}\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\sum_{m=0}^{r} x_1^m \frac{1}{m!} \frac{d^r}{dt^r} (e^t - t - 1)^m \right|_{t=0} = \sum_{m=0}^{r} \bar{\sigma}_r^{(m)} x_1^m = \bar{s}_r(x_1),$$

где $\overline{\sigma}_r^{(m)} = \frac{d^r}{dt^r}\frac{1}{m!}(e^t - t - 1)^m \Big|_{t=0}$ - присоединенные числа Стирлинга 2-го рода [10, с.92]; а $\mu_r^{(2)}$ распределения $He(x_1, x_2)$ имеют вид

$$\mu_r^{(2)} = \sum_{I_2^{(r)} = r}\prod_{l=2}^{r}(x_1 + 2^l x_2)^{i_l}(l!)^{-i_l}(i_l!)^{-1}, \quad r = 0, 1, \ldots$$

Утверждение 8. Для центральных моментов $\mu_r = \mu_r^{(k)}$ справедливы рекуррентные соотношения ($r = 0, 1, \ldots$):

$$\mu_{r+1} = \sum_{m=1}^{k} m\, x_m \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j m^{r-j}\mu_j = \sum_{m=1}^{k} m\, x_m\left(m\, r\, \mu_{r-1} + \frac{\partial}{\partial x_m}\mu_r\right), \quad (22)$$

$$\mu_r^{(k)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j\, \mu_{r-j}^{(k-1)}\, \mu_j^{(1)}(x_k), \quad k = 2, 3, \ldots, \quad (\mu_1 = \overline{s}_1(x_1)), \quad (23)$$

где $\mu_j^{(1)}(x_k) = \overline{s}_j(x_k)$ – центральные моменты распределения $Po(x_k)$.

Доказательство. Как и в случае других моментных характеристик рекуррентное соотношение по r легко получается однократным дифференцированием соответствующей п.ф. (20) и использованием формулы Лейбница. Действительно,

$$\mu_{r+1} = \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}\exp\{\sum_{m=1}^{k} x_m(e^{mt} - mt - 1)\}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d^r}{dt^r}\sum_{m=1}^{k} m\, x_m\,(e^{mt} - 1)\exp\{\sum_{l=1}^{k} x_l(e^{lt} - l\,t - 1)\}\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} m\, x_m \sum_{j=0}^{r} C_r^j \frac{d^{r-j}}{dt^{r-j}}(e^{mt} - 1)\frac{d^j}{dt^j}\exp\{\sum_{l=1}^{k} x_l(e^{lt} - lt - 1)\}\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} m\, x_m \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j m^{r-j}\mu_j .$$

Второе равенство легко доказывается преобразованием правой части.

Для доказательства рекуррентности по k воспользуемся следующим преобразованием и формулой Лейбница:

$$\mu_r^{(k)} = \frac{d^r}{dt^r}\exp\{\sum_{m=1}^{k} x_m(e^{mt} - mt - 1)\}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{d^r}{dt^r}\exp\{\sum_{m=1}^{k-1} x_m(e^{mt} - mt - 1)\}\ \exp\{x_k(e^{kt} - kt - 1)\}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j \frac{d^{r-j}}{dt^{r-j}}\exp\{\sum_{m=1}^{k-1} x_m(e^{mt} - mt - 1)\}\frac{d^j}{dt^j}\exp\{x_k(e^{kt} - kt - 1)\}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} C_r^j\ \mu_{r-j}^{(k-1)}\ \mu_j^{(1)}(x_k)\ .$$

Следствия. На $\mu_r^{(1)}(x_1) = \mu_r^{(1)}$ имеет место рекуррентное соотношение в конечной [5, с.179] и дифференциальной формах

$$\mu_{r+1}^{(1)} = x_1 \sum_{j=0}^{r-1} C_r^j \mu_j^{(1)} = x_1 \left(r\mu_{r-1}^{(1)} + \frac{d}{d\ x_1}\mu_r^{(1)} \right), \quad r = 0,\ 1,\ \ldots;$$

центральные моменты $\mu_r^{(2)}$ распределения $He(x_1\ ,\ x_2)$ подчиняются рекуррентным соотношениям ($r = 0,1,\ldots$)

$$\mu_r^{(2)} = \sum_{j=1}^{r} C_r^j\ (x_1 + 2^{j+1}x_2)\mu_{r-j}^{(2)} =$$

$$= \mu_r^{(2)}\ (x_1 + 4x_2)\ r\ \mu_{r-1}^{(2)} + \left(x_1\frac{\partial}{\partial\ x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial\ x_2} \right)\mu_r^{(2)}\ ,$$

$$\mu_r^{(2)} = \sum_{j=0}^{r} C_r^j\ \mu_{r-j}^{(1)}(x_1)\ \mu_j^{(1)}(x_2) = \sum_{m=0}^{r} x_1^m \sum_{l=m}^{r} x_2^l \sum_{j=r-l}^{r-m} C_r^j\ \overline{\sigma}_j^{(l)}\ \overline{\sigma}_{r-j}^{(m)}\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Исследование прямых стохастических задач при регистрации выхода множественных ядерных процессов // Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов, вып.2. М.: Изд-во МГУ, 1973. С.81-116.
2. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: Изд-во МГУ, 1985.
3. Галкин В.Я. Функция вероятностей одного обобщенно-пуассоновского распределения и специальные полиномы // Численные методы в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1996. С.160-169.
4. Грехем Г., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: "Мир", 1998. С.287.
5. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Теория распределений. – М.: Наука. 1966
6. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. О моментных характеристиках распределений. В кн.: *"Методы математического моделирования: Труды факультета ВМиК"*. М.: Диалог-МГУ. 1998 г. С.
7. Wolfram, S. "Mathematica: A System for Doing Mathematica by Computer". Addison-Wesley, Reading, MA. 1991
8. Kemp, A.W., Kemp, C.D. (1965) Some properties of Hermite distribution. *Biometrika*, vol.52, p.381-394
9. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука. 1979
10. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963
11. Johnson, N.L., Kotz , S. (1969) Distributions in Statistics: Discrete Distributions. Boston, Houghton Mifflin Comp.
12. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: методы обработки данных. М.: Мир, 1980.