

## НЕКЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ\*

Многочисленные работы по динамике вязких несжимаемых жидкостей в течение всего предыдущего времени, как правило, были основаны на классической системе уравнений Навье-Стокса, состоящей из динамических уравнений и уравнения неразрывности. В нашей работе [1] была предложена и реализована методика численного исследования задач динамики вязких несжимаемых жидкостей и газов в рамках классической модели Навье-Стокса на основе системы уравнений, сохраняющих прямую и обратную связь динамических уравнений и уравнения энергии и при численных расчётах обеспечивающих высокую точность выполнения закона сохранения массы. Настоящая статья посвящена описанию и применению указанной методики для численного исследования нестационарных течений в каналах достаточно большой протяжённости при различных граничных и начальных условиях, что показало существование различных неклассических структур решения.

**Решение Пуазеля.** Классический подход для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости основывается на решении соответствующих граничных задач для системы уравнений Навье-Стокса:

$$\rho_0 \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho_0 \vec{F} - \text{grad } p + \mu_0 \Delta \vec{V}, \quad (1)$$
$$\text{div } \vec{V} = 0.$$

Здесь обозначения общепринятые:  $\vec{V}$  – вектор скорости,  $u, v, w$  – его компоненты,  $\vec{F}$  – вектор массовых сил,  $p$  – давление,  $\rho_0$  – плотность и  $\mu_0$  – коэффициент динамической вязкости предполагающиеся постоянными. Решению различных математических задач на основе этой математической модели посвящено огромное количество работ. Не ставя своей целью делать их обзор, обратим внимание только на классическое решение Пуазеля [2] для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, которое получено при предположении слоистости течения, когда продольная вдоль канала компонента скорости  $u \neq 0$ , а поперечные компоненты скорости  $v = w = 0$ . Предположение слоистости течения приводит к тому, что система уравнений (1) дает, что

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 01-01-00151 и № 02-07-90407.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0, p = p(t, x),$$

а продольная компонента скорости  $u = u(t, y, z)$  удовлетворяет уравнению

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

Предположения, что течение является плоским и стационарным приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$v_0 \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $p = p(x)$  – некоторая заданная функция распределения давления вдоль канала, а  $v_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$  – кинематический коэффициент вязкости. Если стенки плоского канала расположены симметрично относительно оси  $x$  при  $y = \pm b$  и на них заданы условия прилипания  $u = 0$ , то решением этой задачи является функция

$$u = -\frac{1}{2v_0} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2). \quad (4)$$

Таким образом, решение Пуазейля является в конечном итоге решением обыкновенного дифференциального уравнения, к которому свелась задача благодаря целому ряду предположений. Переход от постоянного профиля скорости на входе в канал к профилю Пуазейля аналитически был получен в [3]. Аналогичный результат [4] дал численный расчёт разностным методом системы уравнений (1) при задании профиля Пуазейля в конце расчётной области. В результате, укоренилось представление, что в плоском канале любой длины на всём его протяжении реализуется течение Пуазейля. Такое представление, естественно, вступает в противоречие с наличием вязкости в потоке. Это наводит на мысль, что исследования развития нестационарных течений в плоских каналах следует проводить при отсутствии предположения о слоистости течения на основе системы уравнений, наиболее полно аппроксимирующих основные законы сохранения.

**Постановка задачи.** Такой системой в данном случае является полная система уравнений Навье-Стокса для вязкого, сжимаемого, теплопроводного, совершенного газа. Если записать эту систему уравнений для плоских течений в безразмерных величинах:

$$\begin{aligned} t &= t'V'_0/L', x = x'/L', u = u'/V'_0, v = v'/V'_0, \\ p &= p' / (\rho'_0 V'_0)^2, \rho = \rho' / \rho'_0, T = T' / T'_0, \mu = \mu' / \mu'_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где введены общепринятые обозначения (размерные величины отмечены штрихами и  $L', V'_0, T'_0, \rho'_0, \mu'_0$  – соответственно характерные величины дли-

ны, скорости, температуры, плотности, динамической вязкости) и предположить, что жидкость является несжимаемой ( $\rho = 1$ ) и коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности постоянные, то мы получим следующую систему уравнений в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi, \quad (9)$$

где  $\Phi$  – диссипативная функция:

$$\Phi = \gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$p = \frac{1}{\gamma M^2} T \quad (10)$$

Здесь параметры подобия: число Рейнольдса  $\text{Re} = \frac{VL'}{\nu'}$ , число Маха

$M = \frac{V'}{a}$ , число Прандтля  $\text{Pr} = \frac{\mu' c'_p}{k'}$ . Квадрат скорости звука  $a^2 = \frac{\gamma p'_0}{\rho_0}$ , от-

ношение удельных теплоёмкостей  $\gamma = \frac{c'_p}{c'_v}$ .

Уравнение состояния (10) дает линейную связь между  $p$  и  $T$ . Отметим, что уравнение Ван-дер-Ваальса и другие уравнения состояния [5], применяемые для расчётов течений вязких жидкостей и газов, также определяют линейную связь давления и температуры при предположении постоянства плотности. В целом система (6-10) является переопределённой: для нахождения трех неизвестных  $u, v, p$  имеется 4 дифференциальных уравнения. Классический подход, как правило, предполагает использование уравнений (6-8). При этом отбрасывается уравнение (9) и пренебрегается уравнением состояния (10). Комбинация двух уравнений количества движения с использованием уравнения неразрывности дает уравнение для давления (уравнение Пуассона)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (11)$$

по которому можно вычислить давление после того, как найдены  $u, v$  из системы (6,7). Для численного решения соответствующих граничных задач, как правило, используются разностные методы для системы (6,7,11) в "примитивных" переменных  $u, v, p$  или используется переход к системе "функция тока - вихрь", получение которой основано на использовании уравнения неразрывности.

Подход к решению задач динамики вязких несжимаемых жидкостей, использованный нами в работе [ 1 ] основан на численном решении уравнений (6,7,9,10), а уравнение неразрывности (8) используется в качестве контрольного соотношения. Уверенность в том, что при численном решении соответствующих начально-краевых задач для такой системы закон сохранения массы должен выполняться с необходимой точностью, соответствующей аппроксимации дифференциальных уравнений (6,7,9), основана на том, что уравнение неразрывности используется при их теоретическом выводе. Широкие вычислительные эксперименты подтвердили эту уверенность. Существенным различием используемого нами подхода (уравнения (6,7,9,10)), и расчётов на основе системы (6,7,11) состоит в определении давления: уравнение (9) является эволюционным в отличие от уравнения (11), которое стабилизирует решение.

В системе (6,7,9,10), по существу, единственным изменяемым критерием подобия является число Рейнольдса, так как вместо уравнения (9), используя (10), можно получить уравнение для давления  $p$ , в котором отсутствует число Маха. Однако, при расчётах удобнее использовать уравнение энергии (9), что облегчает задание начальных условий (размерное давление отнесено к удвоенному скоростному напору) и интерпретацию результатов.

С точки зрения организации алгоритма расчёта и его последующего применения к различным задачам по численному исследованию плоских течений вязких несжимаемых жидкостей (газов) в каналах, постановка задачи может быть сформулирована следующим образом.

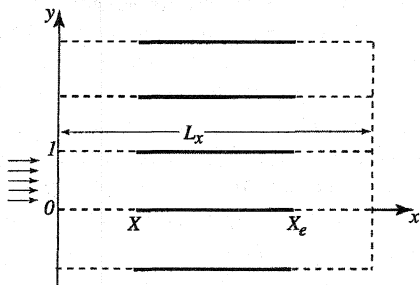


Рис. 1

Рассматривается бесконечная “батарея” плоских бесконечно тонких пластин, расположенных строго параллельно друг другу и образующих плоские каналы одинаковой высоты, обдуваемая дозвуковым вязким потоком (рис. 1). Рассматривается расчётная область ( $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq 1$ ). Характерным линейным размером является высота канала). Пластины имеют конечную длину  $L_0 = X_c - X$ , область набегающего потока ( $0 \leq x < X$ ), область гидродинамического следа за каналом  $L_w = L_x - X_c$ . В случае  $X = 0$  и  $X_c = L_x$  течение может быть рассчитано только в канале.

Граничные условия ставятся следующим образом. Набегающий поток задаётся при  $x = 0$  значениями компонент вектора скорости, которые могут быть постоянными или определены как функции времени. При  $0 < x < X$  и  $X_c < x < L_x$  задаются условия периодичности

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad v(x,0) = v(x,1) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = 0. \quad (12)$$

На нижней и верхней стенках канала при  $X \leq x \leq X_c$  задаются условия “прилипания” для скорости и условия теплоизоляции для температуры

$$u(x,0) = v(x,0) = 0, \quad v(x,0) = v(x,1) = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = 0. \quad (13)$$

На выходной границе  $x = L_x$  используются “мягкие” граничные условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (14)$$

В качестве начальных условий использовались условия покоя для скорости и постоянства температуры во всей расчетной области:

$$u(x,y) = v(x,y) = 0, T(x,y) = 1 \quad (0 < x \leq L_x, 0 \leq y \leq 1). \quad (15)$$

**Метод численного решения.** Сформулированная выше задача в вязкой постановке, как понятно, имеет тривиальное решение, так как не учитывает вязкостных эффектов, которые связаны с развитием пограничных слоёв около стенок канала и их последующим взаимодействием. Поэтому при решении поставленной задачи разностным методом необходимо иметь более густую разностную сетку вблизи стенок канала. Это достигалось путём введения новой “расчётной” переменной  $y_1$  в поперечном направлении:

$$y_1 = \eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} (e^{-\alpha(y-0.5)^2} - e^{-0.25\alpha}) / (1 - e^{-0.25\alpha}), & 0 \leq y \leq 0.5, \\ \frac{1}{2} (e^{-\alpha(y-0.5)^2} + e^{-0.25\alpha}) / (1 - e^{-0.25\alpha}), & 0.5 < y \leq 1. \end{cases}$$

с некоторой линейной коррекцией вблизи  $y = 0.5$ . Параметр  $\alpha$  позволяет симметрично относительно центра канала сгущать узлы сетки около стенок. Сразу следует заметить, что все результаты расчётов приводятся в “физических” (а не в “расчётных”) координатах.

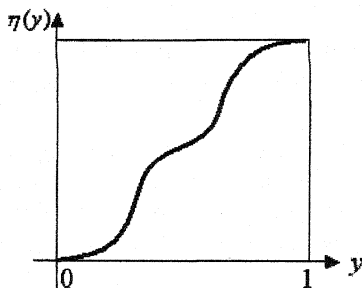


Рис. 2

В качестве вычислительного метода использовался широко известный метод покоординатного расщепления. Для простоты изложения приведём в “физических” переменных системы дифференциальных уравнений, для которых решались соответствующие краевые задачи разностным методом с использованием прогонок. Процесс расчёта при переходе от одного временного слоя к последующему осуществлялся в два этапа. Сначала находилось решение на “полуцелом” временном слое поперёк расчётной области для системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \Phi. \end{aligned}$$

Используя полученное решение находилось решение соответствующей краевой задачи на “целом” временном слое вдоль расчётной области для системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\gamma}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \Phi. \end{aligned}$$

При этом для “выборки нелинейности” проводились необходимые итерационные процессы на “полуцелых” и “целых” временных шагах. Оценка точности осуществлялась путём осреднённого значения интеграла от дивергенции скорости в каждой сеточной ячейке. В обсуждаемых ниже результатах численных экспериментов осреднённое значение этого интеграла составляло  $10^{-6} - 10^{-4}$ .

**Обсуждение результатов расчётов.** Результаты расчётов представляются в виде компьютерных рисунков, на которых изображается поверхность продольной составляющей вектора скорости и поля направлений вектора скорости в расчётной области (или её части). Эти рисунки сделаны с помощью системы компьютерной визуализации результатов научных исследований [5]. Проведённые расчёты дают возможность исследовать процесс развития течения в плоских каналах достаточно большой протяжённости. Обсуждаются результаты расчётов, полученные от начального постоянного профиля скорости  $u = 1, v = 0$  при  $x = 0$ , когда канал занимает всю расчётную область  $L_x = L_c$ , а так же в некоторых случаях, когда расчётная область захватывает некоторый участок гидродинамического следа за каналом. Выше было отмечено, что основным критерием подобия в рассматриваемой задаче является число Рейнольдса. Поэтому обсуждение результатов расчётов построено по принципу увеличения числа Рейнольдса. Отметим также, что изменение числа Маха в интервале (0.0003-0.01) практически не влияет на результаты расчётов. Точность вычислений оценивалась осреднённым по сетке значением интеграла от дивергенции вектора скорости и составляла для всех приведённых ниже результатов  $10^{-4} - 10^{-5}$ .

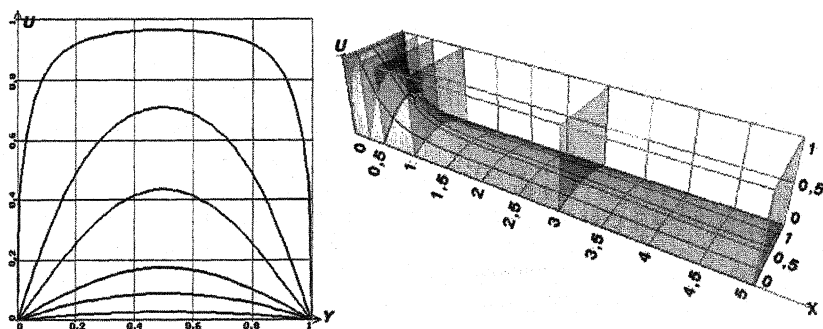


Рис. 3.  $Re = 10$ .

На правом планшете рис. 3 для канала длиной  $L_x = L_c = 5$  и для числа Рейнольдса  $Re = 10$  при  $t = 10$  изображена поверхность продольной составляющей вектора скорости, на которой показано несколько секущих плоскостей при  $x = 0.1, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0$ , а на левом планшете соответствующие им профили продольной составляющей вектора скорости. Течение характеризуется плавным переходом от постоянного профиля скорости на входе к профилям параболического вида с постепенным нелинейным уменьшением максимального значения скорости в центре канала (на выходе из канала оно составило  $0.02$ ). Приведённое решение является установившимся.

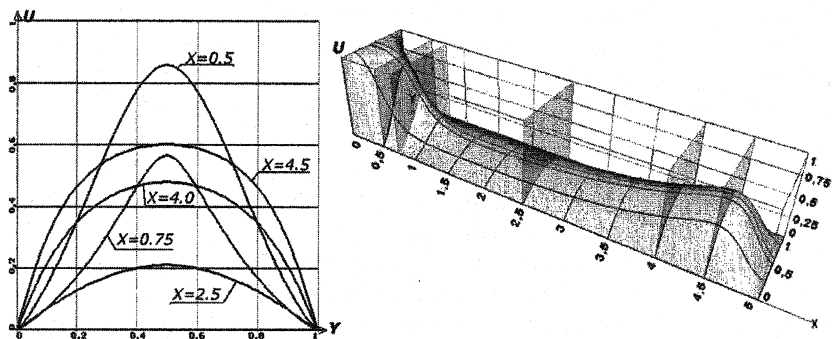


Рис. 4.  $Re = 50$

На рис. 4, построенном аналогично рис. 3, приведены результаты расчёта для  $Re = 50$  также при  $t = 10$  и  $L_x = L_c = 5$ . Течение в предыдущие моменты времени развивалось следующим образом. Непосредственно в начале канала при  $0 < x < 1$  образовалась стоячая волна клиновидной формы, от неё отделилась головная волна меньшей интенсивности, которая стала распространяться по каналу и в момент времени  $t = 10$  почти достигла конца канала, оставляя за собой профили скорости параболического вида (см. левый планшет). После выхода головной волны из канала начинается процесс установления, который проходит достаточно быстро и для  $t \geq 30$  решение не изменяется.



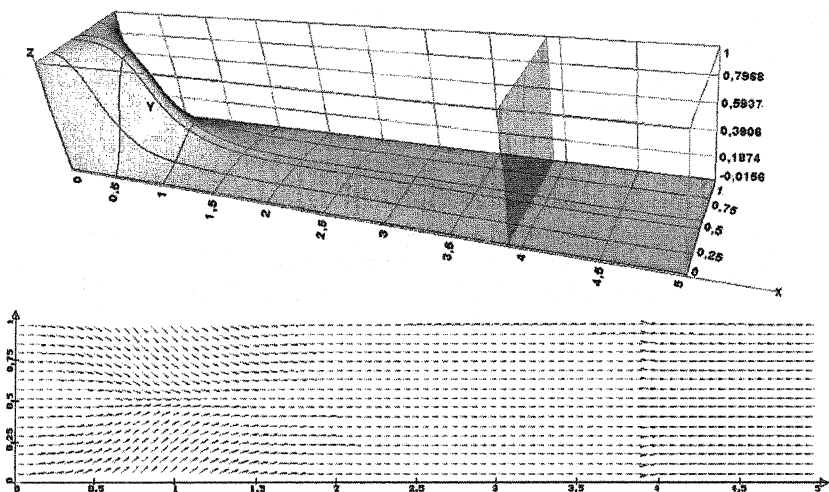


Рис.5.  $Re = 50$

Установившееся решение, представленное на рис.5, характеризует стоячей волной клиновидной формы на интервале  $0 < x < 1.1$  и последующим достаточно быстрым уменьшением скорости. Внизу на этом же рисунке представлено поле направлений векторов скорости (головка вектора более жирная). Уменьшение скорости при  $x \geq 1.1$  приводит к тому, что вблизи  $x = 4$  образуется полоса, где скорость равна нулю, а в конце канала на интервале  $4 \leq z \leq 5$  компонента скорости  $u$  становится отрицательной. Это связано с реализацией “мягкого” граничного условия в конце расчётной области ( $L_x = L_c = 5!$ ), которое обеспечивает подсос жидкости из затопленного пространства, расположенного за расчётной областью.

Существенное изменение структуры течения в канале, связанное с полной его блокировкой при  $Re = 140$ , было отмечено нами в [ 1 ] для короткого канала  $L_c = 1$ . Развитие течения при  $Re = 140$  в канале, длина которого  $L_c = 5$ , и в гидродинамическом следе за этим каналом при  $5 < x \leq 10$  ( $L_x = 10$ ) представлено на рис. 6.

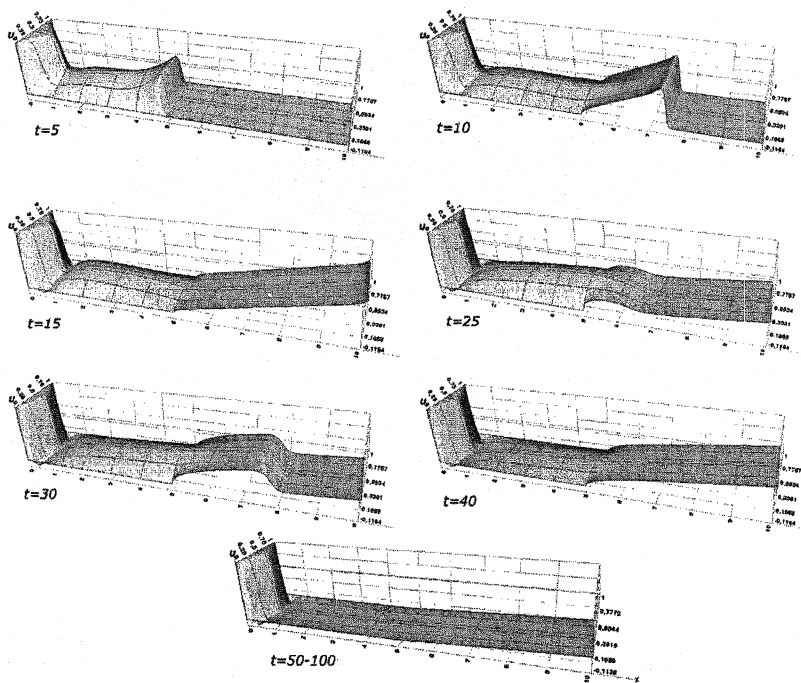


Рис. 6.  $Re = 140$ .

На этом рисунке показаны поверхности продольной составляющей вектора скорости в различные моменты времени. Течение характеризуется возникновением при  $0 \leq x \leq 1.1$  клиновидной области, в которой скорость близка к скорости при  $x = 1$ , и головной волной, распространяющейся вдоль канала ( $t = 5$ ). Головная волна после выхода из канала распространяется в следе в виде ступеньки ( $t = 10$ ). К этому моменту времени около клиновидной области у стенок канала произошёл отрыв пограничного слоя, и зародились симметричные вихри с центрами вблизи  $x = 0.7$  (рис.7). В дальнейшем с увеличением времени центры вихрей устремляются к центру канала, принимая вытянутую форму ( $t = 15$ ), и при  $t = 30$  (рис.8) образуется устойчивая вихревая зона около более тонкой, чем в первоначальные моменты времени, клиновидной стоячей волны в начале канала. Установление решения для  $x > 1$  в канале и в следе за ним происходит как волнообразный по пространству и по времени процесс затухания скорости до нуля. Полная блокировка канала наступает при  $t = 50$  и такое решение сохраняется и при  $t = 100$ .

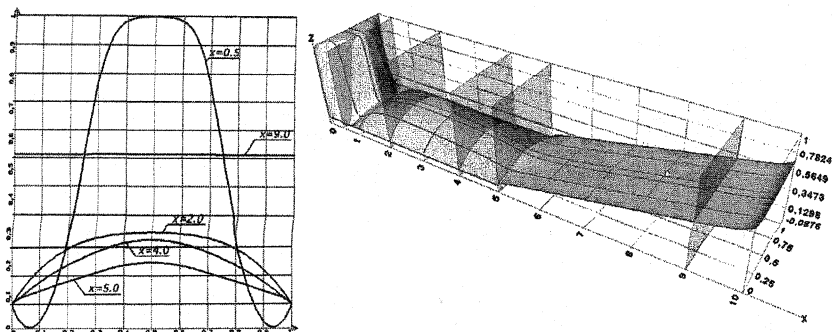


Рис. 7.  $Re = 140, t = 15$ .

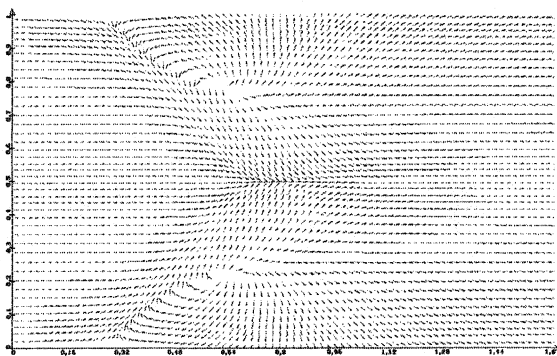


Рис. 8.  $Re = 140, t = 30$ .

Интерес представляет устойчивость такого решения по отношению к возмущениям потока на входе в канал. На рис. 9 показаны поверхности продольной составляющей вектора скорости в различные моменты времени для синусоидального изменения скорости при  $x = 0$ :  $u(0, t) = 1 + A \sin(\omega \pi t)$ , где  $A = 0.5$  и  $\omega = 0.5$ . Характер изменения решения по времени и по пространству в канале несколько отличается от решения при  $u(0, t) = 1$ , однако блокировка канала также реализуется уже при  $t = 45$  и впоследствии продолжает оставаться, хотя при  $x = 0$  продолжают пульсации. Таким образом, организуется периодический режим изменения решения в интервале  $0 < x \leq 1$  при практически нулевой скорости в остальной части канала, что определяет блокировку канала.

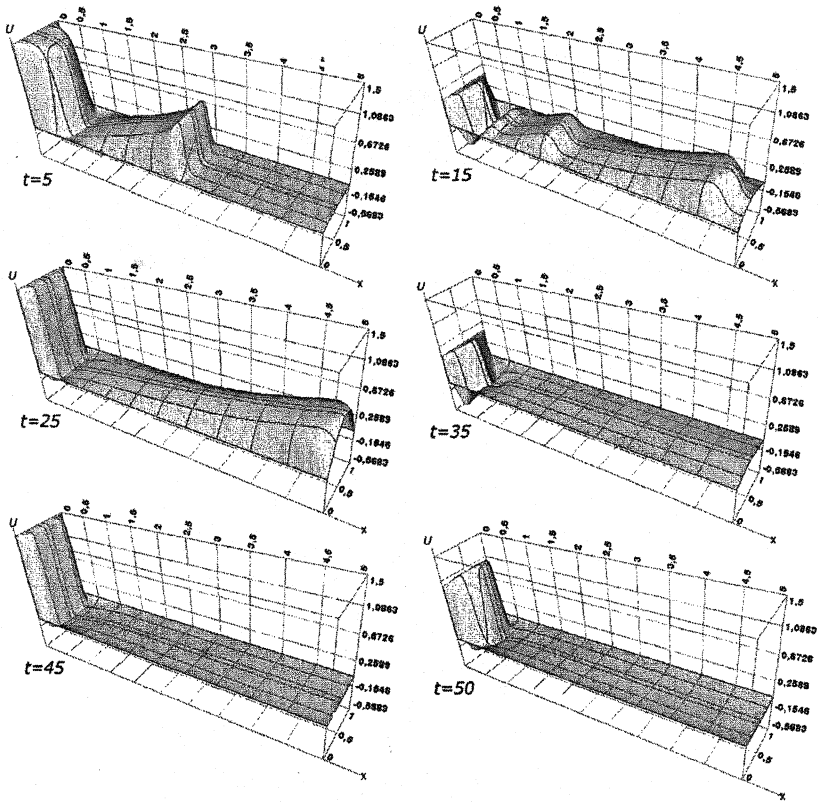


Рис. 9.  $Re = 140$ .

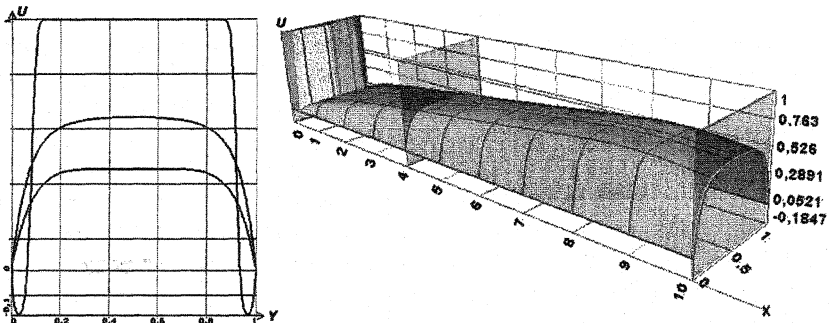


Рис.10.  $Re = 700, t = 50$ .

На рис. 10 для  $Re = 700, t = 50$  показаны на правом планшете поверхность продольной составляющей вектора скорости с тремя секущими плоскостями, для которых на левом планшете даны соответствующие им профили продольной компоненты скорости. Отметим профиль, у которого  $u < 0$  вблизи стенок, и профиль в конце канала, где максимальное значение скорости составляет  $u = 0.61$ , что указывает на падение скорости в канале. Структура вихрей, центры которых расположены на расстоянии 0.28 от стенок, хорошо видна на рис.11, где представлено поле направлений векторов скорости для  $Re = 700, t = 50$  в начале канала.

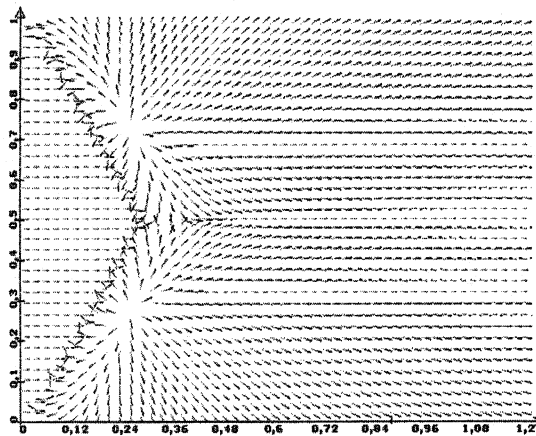


Рис. 11.  $Re = 700$ .

Развитие течения в канале длиной  $L_c = 5$  для  $Re = 700$ , когда входящий поток не параллелен стенкам, а имеет угол атаки  $\alpha = 45^\circ$ , приведено на рис.12, где показаны фрагменты полного поля направлений векторов скорости в начале канала для различных моментов времени.

Как и следовало ожидать, с первых же моментов времени решение развивается не симметрично. При  $t = 50$  сформировалась клинообразная область, где скорость близка к скорости входящего потока, происходит отрыв пограничных слоёв около стенок и возникновение несимметричных вихревых зон ( $t = 20$ ). Взаимодействие нижней и верхней вихревых структур ( $t = 30$ ) приводит к тому, что верхний вихрь пропадает, а нижний вихрь стабилизирует своё положение ( $t = 70$ ), которое

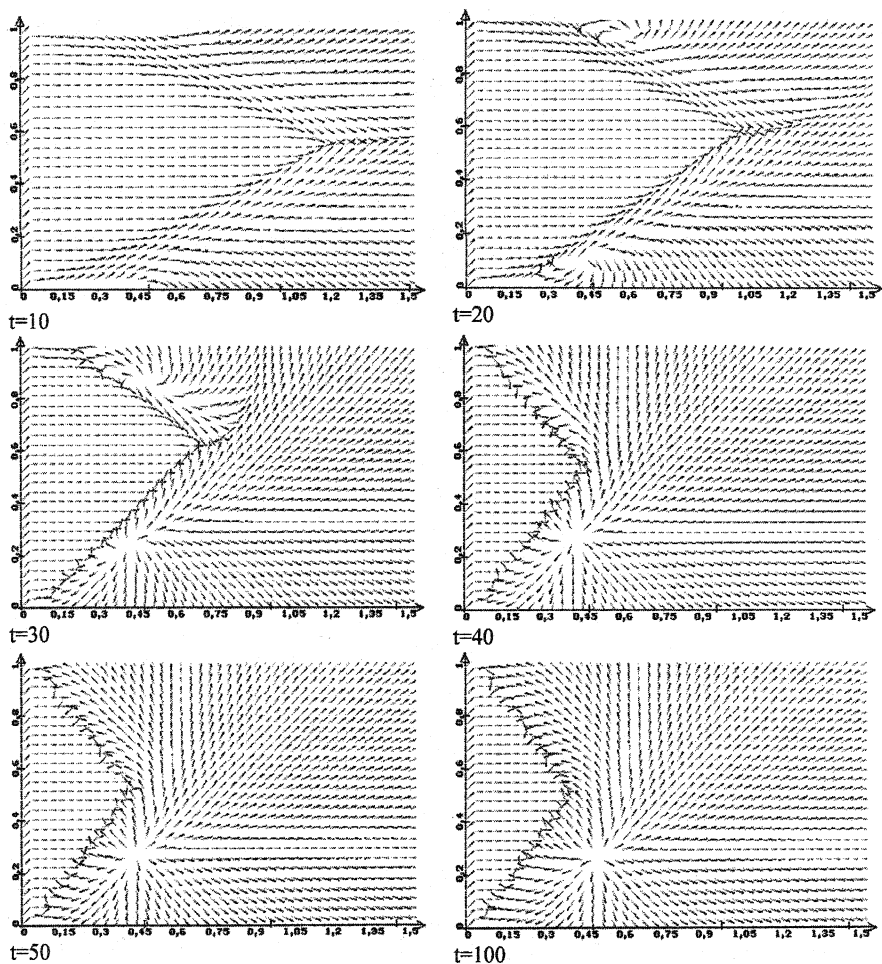


Рис. 12.  $Re = 700, \alpha = 45^\circ$ .

практически не меняется в последующие моменты времени. При этом нижний вихрь, который находится на подветренной стороне, выполняет роль своеобразного фильтра, направляя часть жидкости на поддержание клиновидной структуры стоячей волны, а другую часть – вниз по течению в канал. Заметим, что максимальное значение скорости в конце канала не превышает 0.07.

Для теоретического исследования течений вязкой жидкости в каналах наибольший интерес представляет получение решений для чисел

Рейнольдса, при которых экспериментальные исследования указывают на переходные режимы течений.

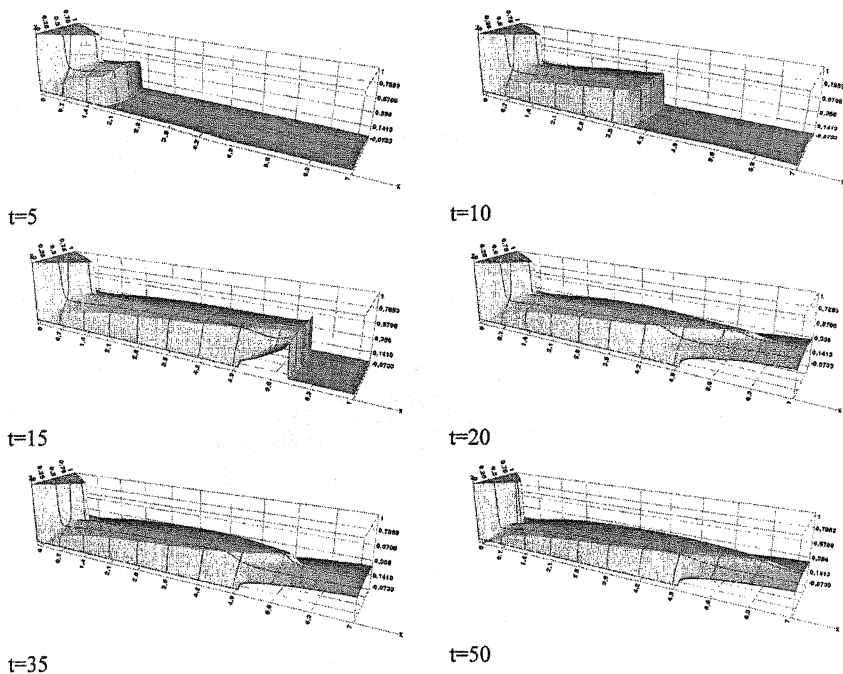


Рис. 13.  $Re = 1400$ .

Поэтому при дальнейшем изложении будет продолжено описание результатов в порядке увеличения чисел Рейнольдса 1400, 2800. Предварительно заметим, что нестационарный процесс развития течения в канале для указанных чисел Рейнольдса от начального равномерного профиля принципиально не отличается от описанных выше. На рис. 13 для канала длиной  $L_c = 5$  при длине расчётной области  $L_x = 7$  для  $Re = 1400$  показаны поверхности продольной составляющей вектора скорости. В первые моменты времени формируется клинообразная область, в которой скорость близка к скорости входящего потока, из этой области выделяется головная волна, которая начинает распространяться по каналу. ( $t = 5, 10$ ) После этого вблизи клинообразной области и около стенок образуются симметричные возвратно-циркуляционные вихри (значительно меньших разме-

ров, чем при  $Re = 700$ ), которые остаются вблизи стенок. В последующие моменты времени головная волна выходит из канала и внутри канала происходит установление решения в случае, если при  $x = 0$  граничное условие не зависит от времени.

На рис. 14 для  $Re = 1400$  в момент времени  $t = 50$  показаны на правом планшете поверхность продольной составляющей вектора скорости с несколькими секущими плоскостями, для которых на левом планшете даны соответствующие им профили продольной компоненты скорости. Отметим профиль в начале канала, у которого  $u < 0$  вблизи стенок, что указывает на возвратное течение в вихревой зоне.

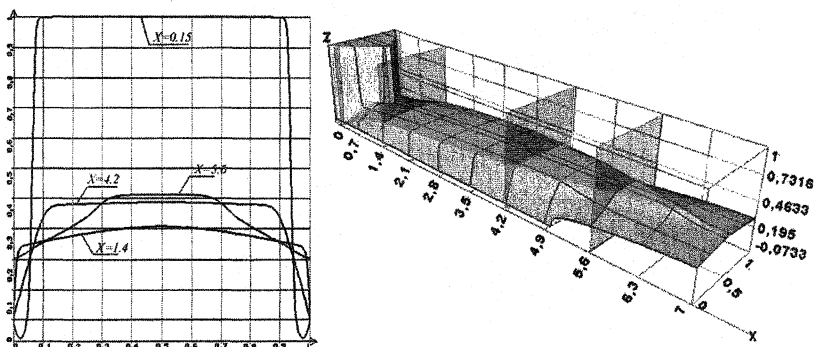


Рис. 14.  $Re = 1400$ .

Течение в ближнем следе за батареей каналов характеризуется существенной неравномерностью по координате  $y$  (см. сечение  $x = 5.6$ ), которая в конце расчётной области практически пропадает. Структура вихрей, центры которых расположены на расстоянии  $0.28$  от стенок, хорошо видна на рис.15, где представлен фрагмент поля направлений векторов скорости. На профилях продольной составляющей скорости в центре канала наблюдается плато ядра течения и симметричные области вблизи стенок, где скорость уменьшается до нуля. Максимальное значение скорости в конце канала составляет  $u = 0.4$ .



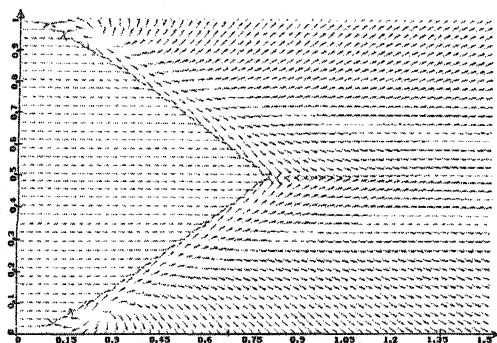


Рис. 15.  $Re = 1400$ .

Аналогичное поведение решения наблюдается при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса. На рис.16, который построен так же, как и рис.14, приводятся результаты расчёта для канала длиной  $L_c = 5$  при длине расчётной области  $L_x = 7$  для  $Re = 2800$  в момент времени  $t = 100$ , когда решение полностью установилось (практически не менялось с  $t = 70$ ).

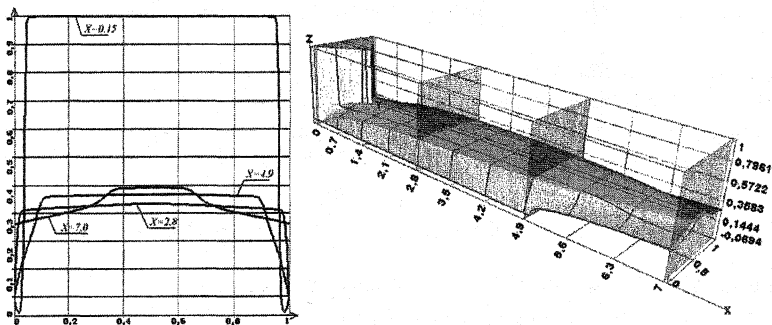


Рис. 16.  $Re = 2800, t = 100$ .

Здесь следует обратить внимание на профили продольной составляющей вектора скорости, которые фактически составлены из трёх прямых: ядра течения в канале и практически линейного изменения скорости вблизи стенок. Течение в ближнем следе за батареей каналов также существенно неравномерно по координате  $y$  (см. сечение  $x = 7.0$ ). Расчёт проведён на достаточно мелкой сетке (в расчётных координатах на единицу длины в продольном и поперечном направлениях приходилось 400 интервалов). При этом точность выполнения интегрального закона сохранения

массы была  $4 \cdot 10^{-5}$ . Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к аналогичным результатам. Такое поведение решения заставляет вспомнить известный факт: при теоретическом выводе уравнений Навье-Стокса сделано предположение о линейном изменении скорости в любом сколь угодно малом объёме [7]. Для системы уравнений Навье-Стокса, являющейся системой уравнений с малым параметром при старших производных для больших чисел Рейнольдса, указанное выше предположение порождает дополнительную “теоретическую” вязкость, которая искажает заказанное при расчёте число Рейнольдса и, фактически, стабилизирует решение. Один из возможных путей исключить влияние “теоретической” вязкости при решении подобных задач разностными методами предложен в работах [8,9].

## Литература

1. Березин С.Б., Пасконов В.М. Численное исследование вдува вязкого несжимаемого газа в плоский канал на основе уравнений Навье-Стокса “Вычислительные методы и программирование”, НИВЦ МГУ, т.4 (1), 2003, с.5-17.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974.
3. Schlichting H. Laminare kanalenlaufstromung. ZAMM, 14, 1934, 368-373
4. Кускова Т.В. Развитие течения в плоском канале. В сб.: “Вычислительные методы и программирование”, вып. XV. Изд-во МГУ, 1970, 31-39.
5. Морачевский А.Г., Сладков И.Б. Физико-химические свойства молекулярных неорганических соединений. Санкт-Петербург, “Химия”, 1996, 312 с.
6. Березин С.Б., Пасконов В.М. Компонентная система визуализации результатов расчётов на многопроцессорных вычислительных системах. Труды конференции “Высокопроизводительные вычисления и их приложения”, Черноголовка, 2000, 202-203.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1973.
8. Пасконов В.М. Модификация уравнений Навье-Стокса для расчёта вязких течений разностными методами. В кн. Обратные задачи естествознания. М, Московский университет, 1997, 189-198.
9. Paskonov V.M. Modified Navier-Stockes Equation for finite-difference Computation of Viscous Flow.. Comp.Math. and Modeling. V.8 , N. 4, 1997, 400-407.