

*Н.И.Березина, В.И.Дмитриев, Н.А.Мерщикова*

### КВАЗИОДНОМЕРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ\*.

#### Введение

В настоящее время широко используется магнитотеллурическое зондирование (МТЗ) для исследования строения земной коры. Возникающая при этом обратная задача связана с определением распределения электропроводности в земной коре по измерениям импеданса магнитотеллурического поля на земной поверхности в зависимости от координат точки измерения и частоты изменения поля. При применении любого метода решения обратной задачи необходимо многократно решать прямую задачу, что при численном решении многомерных обратных задачах требует больших затрат времени компьютера. Квазиодномерный метод решения обратных задач заключается в том, что при численном решении обратной задачи используется параметрическая одномерная модель, а многомерная модель используется только для коррекции полученного решения в итерационном процессе. В настоящей работе метод реализован на примере двумерной обратной задачи МТЗ.

#### 1. Постановка задачи

Рассмотрим постановку двумерной обратной задачи МТЗ [1] в случае  $E$ -поляризации поля. Пусть электропроводность  $\sigma$  в нижнем полупространстве ( $z > 0$ ) распределена следующим образом:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma(y, z) \text{ при } z \in [0, H], y \in [-l, l] \\ \sigma^N(z) \text{ при } z \in [0, H], |y| > l \\ \sigma_H = \text{const} \text{ при } z \in [H, \infty) \end{cases} \quad (1)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект 08-01-00189-а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы.

В верхнем полупространстве ( $z < 0$ ) проводимость  $\sigma = \sigma_0 \approx 0$ . Так как в двумерной задаче  $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ , то для  $E$ -поляризованного электромагнитного поля  $\bar{E} = (E_x, 0, 0)$ ,  $\bar{H} = (0, H_y, H_z)$ , причем магнитное поле выражается через электрическое

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}; \quad (2)$$

где  $\omega$  - частота поля,  $\mu = const$  - магнитная проницаемость. Зависимость от времени имеет вид  $e^{-i\omega t}$ .

Электрическое поле  $E_x$  непрерывно, имеет непрерывные частные производные и является решением уравнения

$$\Delta E_x + i\omega\mu\sigma E_x = 0. \quad (3)$$

На бесконечности выполняются условия

$$\begin{aligned} E_x(y, z) &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty \\ E_x(y, z) &\rightarrow E_x^N(z) \text{ при } |y| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E_x^N(z)$  — нормальное поле, которое является решением следующей одномерной задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 E_x^N}{dz^2} + k^2(z) E_x^N &= 0 \text{ при } z \in [0, H], \quad k^2 = i\omega\mu\sigma^N(z) \\ \frac{dE_x^N}{dz} + ik_0 E_x^N &= 2ik_0 E_0 \text{ при } z = 0, \quad k_0 = \sqrt{i\omega\mu\sigma_0} \\ \frac{dE_x^N}{dz} - ik_H E_x^N &= 0 \text{ при } z = H, \quad k_H = \sqrt{i\omega\mu\sigma_H} \end{aligned} \right. , \quad (5)$$

где  $E_0$  — амплитуда первичного магнитотеллурического поля.

Прямая задача МТЗ состоит в определении на земной поверхности ( $z = 0$ ) импеданса

$$Z_0(y, \omega) = \frac{E_x(y, z=0)}{H_y(y, z=0)} = i\omega\mu E_x \Big/ \frac{\partial E_x}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (6)$$

Обратная задача состоит в определении  $\sigma(y, z)$  по известному импедансу  $Z_0(y, \omega)$ .

## 2. Квазиодномерная задача

Пусть априори известно, что распределение электропроводности медленно изменяется вдоль земной поверхности  $\left(\left|\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right| \ll 1\right)$  Тогда при

$\left|\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right| \rightarrow 0$  двумерная обратная задача переходит в одномерную.

Рассмотрим параметрическую одномерную обратную задачу для  $\sigma(y, z)$ , в которой уявляется параметром задачи. Для этого введем следующую прямую задачу для  $E_x(y, z)$ .

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2(y, z)E_x = 0 \text{ при } z \in [0, H], \quad k^2 = i\omega\mu\sigma(y, z) \\ \frac{dE_x}{dz} + ik_0 E_x = 2ik_0 E_0 \text{ при } z = 0 \\ \frac{dE_x}{dz} - ik_H E_x = 0 \text{ при } z = H \end{cases} \quad (7)$$

Задачу (7) для  $E_x(y, z)$  можно свести к задаче Коши для импедансной функции

$$Z(y, z) = i\omega\mu E_x(y, z) / \frac{dE_x(y, z)}{dz}, \quad (8)$$

которая зависит от  $y$  как от параметра, а по  $z$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dZ(y, z)}{dz} - \sigma(y, z)Z^2(y, z) = i\omega\mu. \quad (9)$$

Согласно (7) начальное значение в задаче Коши задается при  $z = H$  и равно

$$Z(y, z = H) = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma_H}}. \quad (10)$$

Решив задачу Коши (8-9), находим импеданс при  $z = 0$ :

$$Z(y, z = 0) = Z_0(y, \omega). \quad (11)$$

Обозначим через  $I_1[\sigma(y, z)]$  оператор, который распределению электропроводности  $\sigma(y, z)$ , ставит в соответствие импеданс электромагнитного поля на земной поверхности, найденный как решение одномерной параметрической задачи (7). Одномерную обратную задачу сформулируем как решение нелинейной задачи определения  $\sigma(y, z)$  из уравнения

$$I_1[\sigma(y, z)] = Z_0(y, \omega), \quad (12)$$

решение которой будем искать из вариационной задачи

$$\inf_{\sigma} \{ \|I_1[\sigma] - Z_0(y, \omega)\|^2 + \alpha \Omega(\sigma) \}, \quad (13)$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации. При решении задачи (13) используется только решение одномерной прямой задачи, что существенно упрощает численное решение задачи. Однако, при этом получается сглаженное решение.

Возникает вопрос: как уточнить полученное решение. Обозначим через  $I_2[\sigma(y, z)]$  оператор двумерной прямой задачи (3-6)

$$I_2[\sigma(y, z)] = Z_0(y, \omega). \quad (14)$$

Двумерная обратная задача состоит в определении  $\sigma(y, z)$  по известному импедансу  $Z_0(y, \omega)$  из уравнения (14). Можно предположить, что при определенных ограничениях на изменения  $\sigma(y, z)$  в зависимости от  $y$ , оператор одномерной задачи близок к оператору двумерной задачи, т.е.

$$\|I_2 - I_1\| < 1 \quad (15)$$

Запишем уравнение (14) в виде

$$I_1[\sigma(y, z)] = Z_0(y, \omega) - I_2[\sigma(y, z)] + I_1[\sigma(y, z)] \quad (16)$$

и обозначим через  $\tilde{I}_1^{-1}$  алгоритм решения параметрической одномерной обратной задачи (13). Тогда на основании (15) можем построить следующий итерационный процесс

$$\sigma_{n+1}(y, z) = \tilde{I}_1^{-1}(Z_0(y, \omega) - I_2[\sigma_n(y, z)] + I_1[\sigma_n(y, z)]) \quad (17)$$

Если итерации сходятся, то это означает, что при  $n \rightarrow \infty$  имеем  $\|Z_0(y, \omega) - I_2[\sigma_n(y, z)]\| \rightarrow 0$ , а  $\sigma = \tilde{I}_1^{-1}(I_1[\sigma(y, z)])$ .

Отметим, что при таком подходе к решению двумерной обратной задачи двумерная прямая задача на каждой итерации решается только один раз, обычно достаточно 3-5 уточняющих итераций. При решении параметрической одномерной обратной задачи необходимо численное решение только прямых одномерных задач, что существенно упрощает решение обратной задачи. Рассмотрим применение квазиодномерного метода к решению обратной задачи зондирования квазислоистых сред.

### 3. Зондирование квазислоистых сред

Квазислоистой называется среда, которая состоит из заданного числа непересекающихся слоев переменной толщины с постоянными значениями электропроводности в каждом слое и медленно меняющейся в горизонтальном направлении толщиной слоев.

Рассмотрим следующую обратную задачу для квазислоистой среды. На поверхности среды вдоль профиля измерены значения кажущейся проводимости для серии периодов колебаний электромагнитного поля  $T_1, T_2, \dots, T_M$  (период колебаний электромагнитного поля связан с частотой колебаний соотношением  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ).

Кажущаяся проводимость  $\sigma_a$ , с которой обычно работают геофизики, вычисляется через импеданс электромагнитного поля (8) по формуле

$$\sigma_a(y, \omega) = \frac{\omega\mu}{|Z_0(y, \omega)|^2} \quad (18)$$

Обозначим через  $y_1, y_2, \dots, y_L$  координаты точек измерения электромагнитного поля на поверхности квазислоистой среды (точки наблюдения), через  $\sigma_a^{изм}(y_j, T_m)$  значение кажущейся проводимости электромагнитного поля для периода колебаний  $T_m$ , измеренное на поверхности среды в точке наблюдения с координатой  $y_j$ .

Обозначим через  $N$  число слоев квазислоистой среды, через  $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  - проводимость слоев ( $\sigma_N$  - проводимость подстилающего основания). Толщина слоев квазислоистой среды зависит от координаты  $y$  геоэлектрического разреза. Обозначим через  $\bar{h}_j = \{h_1^j, h_2^j, \dots, h_{N-1}^j\}$  толщину слоев для точки наблюдения, координата которой равна  $y_j$ .

При решении обратной задачи искомыми являются значения проводимости слоев  $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  и толщина слоев  $\bar{h} = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_L\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, L$  в точках наблюдения.

Обратная задача решается в квазиодномерном приближении – цель решения задачи состоит в нахождении значений проводимости слоев  $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  и толщины слоев  $\bar{h} = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_L\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, L$ , которые минимизируют функционал невязки

$$F(\bar{\sigma}, \bar{h}) = \sum_{j=1}^L \sum_{m=1}^M \left| A(\bar{\sigma}, \bar{h}_j, T_m) - f^{uzm}(y_j, T_m) \right|^2$$

$$A(\bar{\sigma}, \bar{h}_j, T_m) = \log_{10}(\sigma_a(\bar{\sigma}, \bar{h}_j, T_m)) \quad , \quad (19)$$

$$f^{uzm}(y_j, T_m) = \log_{10}(\sigma_a(y_j, T_m))$$

где  $\sigma_a(y_j, T_m)$  - измеренное в точке наблюдений  $y_j$  на поверхности двумерной квазислоистой среды значение кажущейся проводимости,  $\sigma_a(\bar{\sigma}, \bar{h}_j, T_m)$  - значение кажущейся проводимости для периода колебаний  $T_m$  на поверхности одномерной слоистой среды, состоящей из  $N$  слоев с проводимостью  $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  и толщиной  $\bar{h}_j = \{h_1^j, h_2^j, \dots, h_{N-1}^j\}$ .

Для одномерной слоистой среды, состоящей из  $N$  слоев с проводимостью  $\bar{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$  и толщиной слоев  $h_1, h_2, \dots, h_{N-1}$ , кажущаяся проводимость  $\sigma_a$  электромагнитного поля для периода колебаний  $T$  равна

$$\sigma_a = \sigma_1 \left| \frac{1 - R_0}{1 + R_0} \right|^2, \quad (20)$$

где коэффициент отражения  $R_0$  вычисляется по известным рекуррентным формулам

$$R_{N-1} = 0$$

$$R_{n-1} = \frac{d_n + R_n}{1 + d_n R_n} e^{2(i-1)\sqrt{\frac{\pi i \sigma_n}{T}} h_n}, \quad n = N-1, N-2, \dots, 1. \quad (21)$$

Коэффициенты  $d_n$  в (21) имеют вид  $d_n = \frac{1 - \sqrt{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}}}{1 + \sqrt{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}}}$ .

Так как толщина слоев  $h_n$  входит в выражения (21) только в комбинациях  $\sqrt{\sigma_n} h_n$ , и из физического смысла параметров  $h_n$  и  $\sigma_n$  следует, что их значения должны быть неотрицательны, при численном решении задачи перейдем к новым переменным  $w_1, w_2, \dots, w_N$  и  $q_1, q_2, \dots, q_{N-1}$ , которые связаны с переменными  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$  и  $h_1, h_2, \dots, h_{N-1}$  следующими соотношениями

$$\begin{aligned} q_n^2 &= \sqrt{\sigma_n} h_n, \quad n=1,2,\dots,N-1 \\ w_{n+1}^2 &= \sqrt{\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}}, \quad n=1,2,\dots,N-1 \\ w_1^2 &= \sigma_1 \end{aligned} \quad (22)$$

После замены переменных формулы (21) принимают вид

$$\begin{aligned} R_{N-1} &= 0 \\ R_{n-1} &= \frac{d_n + R_n}{1 + d_n R_n} e^{2(i-1)\sqrt{\frac{\pi\mu}{T}} q_n^2}, \quad n=N-1, N-2, \dots, 1 \end{aligned} \quad (23)$$

а коэффициенты  $d_n$  вычисляются по формулам  $d_n = \frac{1 - w_{n+1}^2}{1 + w_{n+1}^2}$ .

Замена (22) гарантирует, что независимо от знака значений переменных  $q_j$  и  $w_j$ , полученных при решении обратной задачи, соответствующие им значения проводимости  $\sigma_j$  и толщины слоев  $h_j$  будут неотрицательны.

Для численного решения задачи минимизации функционала невязки используется регуляризированный вариант итерационного метода Ньютона-Канторовича [2-3].

Обозначим через  $\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_J\}$  вектор всех параметров среды, которые необходимо найти при решении обратной задачи. Будем предполагать, что проводимость первого слоя  $\sigma_1$  известна. Число компонент вектора  $\bar{\xi}$  равно  $J = (L+1) \cdot (N-1)$ . Первые  $N-1$  компоненты вектора связаны с проводимостью слоев  $\xi_j = w_{j+1}$ ,  $j=1,2,\dots,N-1$ . Остальные компоненты отвечают новым переменным для толщины слоев в точках наблюдения  $\xi_{l+j(N-1)}^l = q_j^l$ ,  $j=1,2,\dots,L$ ;  $l=1,2,\dots,N-1$ .

Обозначим через  $\bar{\xi}^k = \{\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_J^k\}$  приближенное решение задачи (19), вычисленное на итерации с номером  $k$ .

Очередное приближение к решению обратной задачи вычисляется по формуле

$$\bar{\xi}^{k+1} = \bar{\xi}^k + \bar{\xi}^\delta. \quad (24)$$

Поправки  $\bar{\xi} = \{\xi_1^\delta, \xi_2^\delta, \dots, \xi_J^\delta\}$  для решения, найденного на предыдущей итерации, находятся из условия минимума функции

$$F_k(\bar{\xi}^\delta) = \sum_{j=1}^L \sum_{m=1}^M \left| A_j(\bar{\xi}^k, T_m) + \overline{A}_j(\bar{\xi}^k, T_m) \cdot \bar{\xi}^\delta - f^{изм}(y_j, T_m) \right|^2 + \alpha \sum_{j=1}^J (\xi_j^\delta)^2 \quad (25)$$

Здесь  $A_j(\bar{\xi}^k, T_m)$  - значение логарифма кажущейся проводимости для одномерной слоистой среды в точке наблюдений с номером  $j$ , параметры которой получены на предыдущей итерации. Значение  $A_j(\bar{\xi}^k, T_m)$  зависит только от  $2(N-1)$  компоненты вектора  $\bar{\xi}^k$ : от первых  $N-1$  компонент, которые определяют проводимость слоев, и от  $N-1$  компоненты, которые соответствуют толщине слоев в точке наблюдения с номером  $j$ .

В (25)  $\overline{A}_j(\bar{\xi}^k, T_m)$  - это вектор частных производных от функции  $A_j(\bar{\xi}^k, T_m)$  по переменным  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_J$ , вычисленный в точке  $\bar{\xi}^k = \{\xi_1^k, \xi_2^k, \dots, \xi_J^k\}$ .

Выражение  $A_j(\bar{\xi}^k, T_m) + \overline{A}_j(\bar{\xi}^k, T_m) \cdot \bar{\xi}^\delta$  с точностью до малых второго порядка аппроксимирует функцию  $A_j(\bar{\xi}^k + \bar{\xi}^\delta, T_m)$  в окрестности найденного на предыдущей итерации значения  $\bar{\xi}^k$ . За счет соответствующего выбора параметра регуляризации  $\alpha$  стабилизатор  $\alpha \sum_{j=1}^J (\xi_j^\delta)^2$  позволяет управлять нормой вектора поправки  $\bar{\xi}^\delta = \{\xi_1^\delta, \xi_2^\delta, \dots, \xi_J^\delta\}$ .

Функция  $F_k(\bar{\xi}^\delta)$  является квадратичной функцией от переменных  $\xi_1^\delta, \xi_2^\delta, \dots, \xi_J^\delta$ . Вектор  $\bar{\xi} = \{\xi_1^\delta, \xi_2^\delta, \dots, \xi_J^\delta\}$ , на котором достигается минимум функции, можно найти из системы линейных алгебраических уравнений. При этом получается симметричная положительно-определенная матрица специального вида. Матрица является блочной и состоит из клеток размером  $(N-1) \times (N-1)$ , отличны от нуля только клетки, расположенные на главной диагонали, в первом столбце и в первой строке. При этом все матрицы, расположенные на главной диагонали, являются положительно-определенными симметричными матрицами, а матрицы, которые находятся в первом столбце, являются транспонированными по отношению к матрицам, расположенным в соответствующих позициях первой строки.



Решение систем линейных уравнений с матрицами такого вида требует значительно меньше операций, чем решение систем уравнений с полной матрицей.

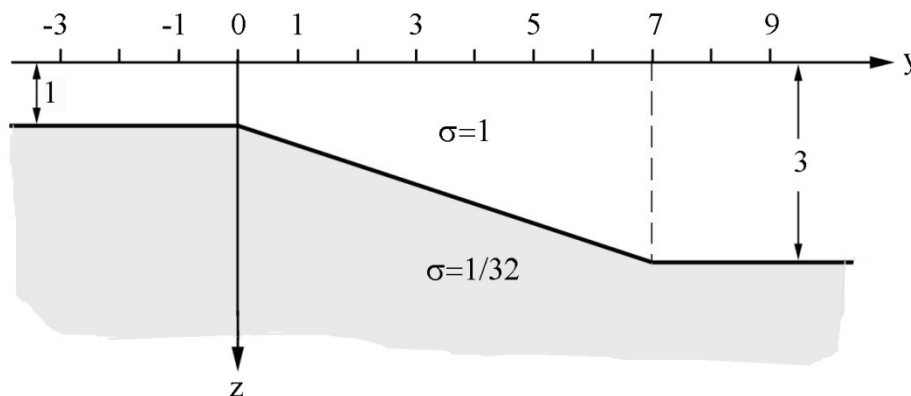


Рис. 1

Рассмотренный выше подход был применен в модельной обратной задаче для двумерной квазислоистой среды, изображенной на рис. 1. Моделируемая квазислоистая среда представляет собой слой переменной толщины с проводимостью  $\sigma_1 = 1$ , который слева от точки наблюдения с координатой 0 и справа от точки наблюдения с координатой 7 имеет постоянную толщину. Проводимость подстилающего основания равна  $1/32$ .

Для представленной на рисунке среды методом двумерных интегральных уравнений [4] была решена прямая задача и вычисленные вдоль профиля значения кажущейся проводимости использовались как входная информация для решения обратной задачи.

На поверхности среды были рассчитаны значения кажущейся проводимости для точек наблюдения в диапазоне от -7 до 31 с шагом 2. В каждой точке наблюдения кажущаяся проводимость была вычислена для 12 периодов колебаний электромагнитного поля. Минимальный период соответствует длине волны, равной 2, в слое с проводимостью 1 и толщиной 1. Каждая следующая длина волны в два раза больше.

На рисунках 2-3 для точек наблюдения с координатами -1 и 21 в билогарифмическом масштабе представлены два графика кажущейся проводимости. Сплошной линией изображена кажущаяся проводимость, полученная при решении прямой двумерной задачи методом интегральных уравнений, пунктирной линией – кажущаяся проводимость для параметрической одномерной слоистой среды в соответствующих точках наблюдения.

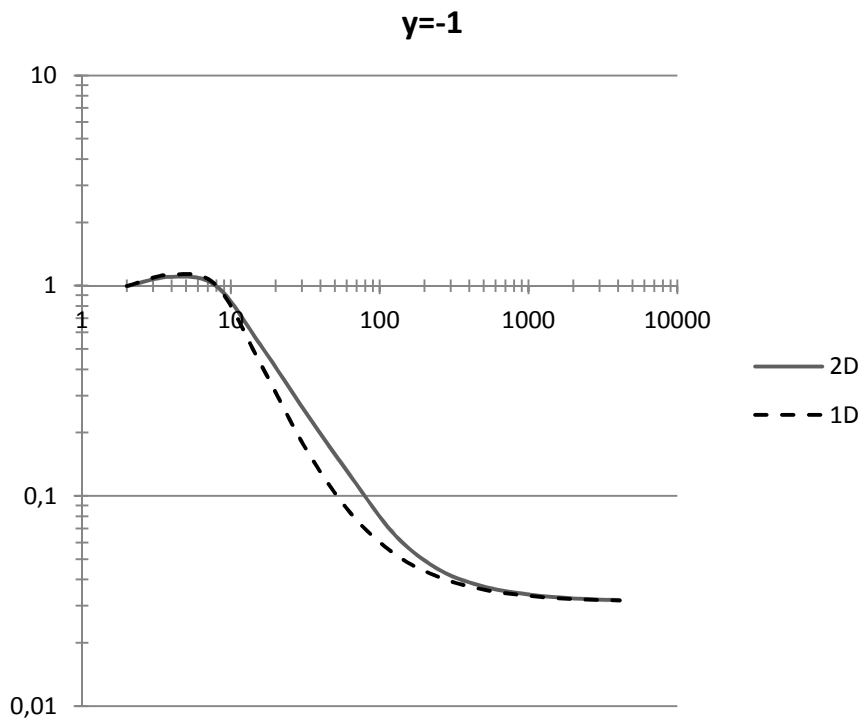


Рис. 2

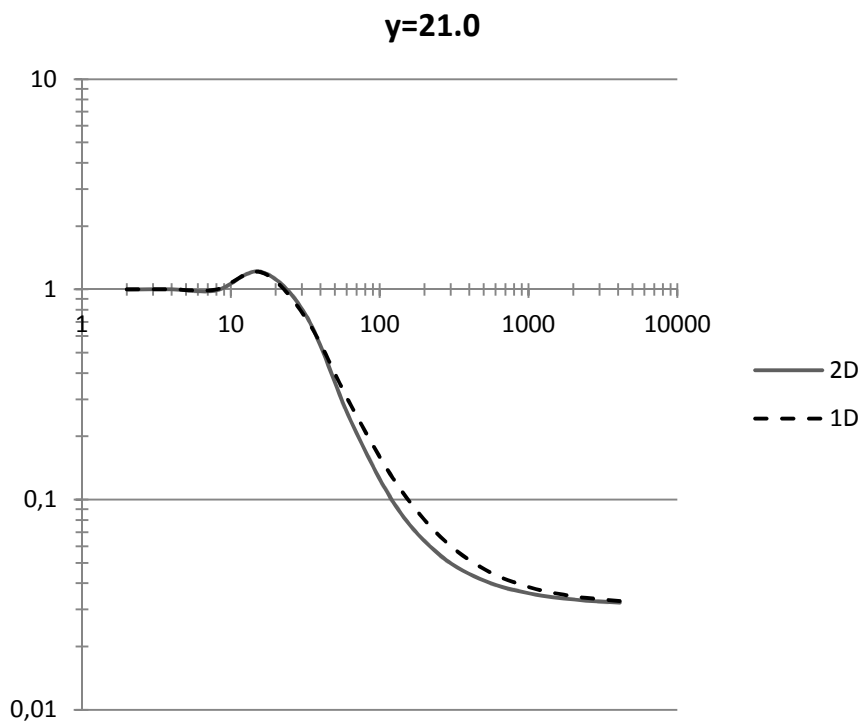


Рис. 3

На рисунке 4 пунктирной линией изображена граница слоя, которая была получена при численном решении параметрической одномерной

обратной задачи (19). Граница слоя для модельного разреза изображена точечной линией.

Затем по алгоритму (17) была выполнена одна уточняющая итерация. Методом интегральных уравнений для разреза, полученного при решении обратной одномерной задачи, была решена двумерная прямая задача. Вычисленные значения кажущейся проводимости были использованы для уточнения входных данных для обратной задачи. Согласно формулам (17) во входные данные для параметрической одномерной обратной задачи были внесены поправки и снова выполнена минимизация функционала невязки (19) для одномерной обратной задачи.

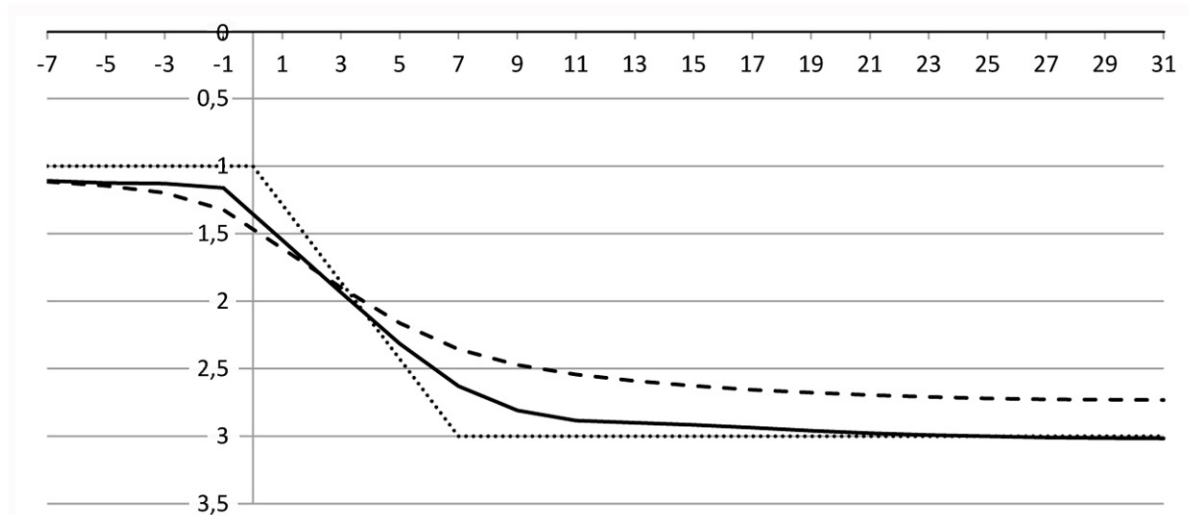


Рис. 4

Результат, полученный при решении второй параметрической одномерной обратной задачи, представлен сплошной линией на рисунке 4. Как видно из рисунка, в результате второй уточняющей итерации хорошо восстановилась толщина слоя справа от наклонного участка и значительно улучшилась аппроксимация квазислоистой среды в области наклона.

Численный эксперимент показал, что квазиодномерный метод решения обратной задачи позволяет значительно сократить объем вычислительной работы при решении двумерных обратных задач при зондировании квазислоистых сред.

## Литература

4. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009, 680 с.
5. А.Н.Тихонов, В.Б.Гласко, Н.И.Кулик. Регуляризирующие алгоритмы для нелинейных задач и обратная задача магнитотеллурического зондирования.// Вычислительные методы и программирование. Изд. Московского университета, 1973, вып. 20, стр. 158-174.
6. Н.И.Березина, Е.А.Круглова. Решение обратной задачи магнитотеллурического зондирования с использованием амплитудных и фазовых характеристик.// Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. Изд. Московского университета, 1986, стр. 215-223.
7. Дмитриев В.И., Барашков И.С., Мерщикова Н.А. Математическое моделирование магнитотеллурических полей в неоднородных средах. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1985, 88 с.