Раздел I.
УПРАВЛЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Н.А. Бобылев, С.В. Емельянов, С.К. Коровин

Аттракторы дискретных управляемых систем в метрических пространствах

1. Введение.

Пусть $\mathcal{M}$ — метрический компакт с метрикой $d(\cdot,\cdot)$ и $f_i : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ $(i = 1, \dots, k)$ — сжимающие отображения. Рассмотрим на $\mathcal{M}$ дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f_{m(n)}(x_n) \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{1}$$

где

$$m(\cdot) : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \{1, \dots, k\} \tag{2}$$

— некоторая функция. Функция $m(\cdot)$, участвующая в определении дискретной системы (1), трактуется в дальнейшем как программное управление, выбор которого вместе с выбором начального условия x_0 генерирует траекторию $\{x_n\}$ дискретной системы (1). Множество всех управляющих воздействий $m(\cdot)$, определенных формулой (2), обозначим через $\mathfrak{M}$.

В настоящей работе исследуются не конкретные задачи, возникающие в теории управления дискретными системами, а качественное поведение траекторий всех дискретных систем (1). Как оказывается, каждому управлению $m(\cdot) \in \mathfrak{M}$ отвечает компактный аттрактор $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ соответствующей дискретной системы, т.е. такое множество, к которому приближаются все траектории этой системы. Этот аттрактор не зависит от выбора управления $m(\cdot)$ и является общим для всех систем (1). При этом для "почти всех" управлений $m(\cdot) \in \mathfrak{M}$ траектории соответствующих систем (1) плотны в $\mathcal{A}$.

Как показывает компьютерное моделирование, геометрическая структура таких аттракторов является весьма сложной даже для дискретных систем, действующих в $\mathbb{R}^2$ и определяемых совсем простыми отображениями f_i. Свойства этих аттракторов во многом близки к свойствам "странных аттракторов", возникающих в задачах хаотической динамики.

2. Основная теорема.

Определим цилиндрические подмножества

$$\nu(i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_r) \qquad (0 \leqslant i_1 < \dots < i_r;\ 1 \leqslant j_s \leqslant k,\ 1 \leqslant s \leqslant r)$$

множества $\mathfrak{M}$ следующим образом: функция $m(\cdot)$ является элементом подмножества $\nu(i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_r)$ в том и только том случае, если

$$m(n) = \left\{ \begin{array}{ll} j_1 \ \text{при} & n = i_1, \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ j_r \ \text{при} & n = i_r. \end{array} \right\}$$

Совокупность всех цилиндрических подмножеств множества $\mathfrak{M}$ порождают борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{M}$. Определим на этих подмножествах меру μ, полагая

$$\mu(\nu(i_1, \dots, i_r; j_1, \dots, j_r)) = \frac{1}{k^r}.$$

Это равенство однозначно определяет вероятностную меру на всей σ-алгебре $\mathfrak{B}$, совпадающую с μ на цилиндрических подмножествах ν (см., например, [1]). За продолженной мерой сохраним обозначение μ.

Множество $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ назовем аттрактором дискретной системы (1), порожденной управлением $m(\cdot) \in \mathfrak{M}$, если для любого начального условия x_0 траектория $\{x_n\}$ этой системы стремится к $\mathcal{A}$:

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{y\in\mathcal{A}} d(y, x_n) = 0.$$

Теорема 1. *Для всех дискретных управляемых системы* (1) *существует общий компактный аттрактор* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ *такой, что для всех начальных условий* $x_0 \in \in \mathcal{M}$ *и почти всех относительно меры* μ *управлений* $m(\cdot) \in \mathfrak{M}$ *траектории дискретных систем* (1) *плотны в* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ совокупность всех непустых компактных подмножеств компакта $\mathcal{M}$ и введем на $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ хаусдорфову метрику $\chi(\cdot,\cdot)$: если K_0, $K_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$, то

$$\chi(K_0, K_1) = \max\{\delta(K_0, K_1), \delta(K_1, K_0)\},$$

где $\delta(K_0, K_1)$ и $\delta(K_1, K_0)$ — соответственно уклонения множества K_0 от K_1 и K_1 от K_0:

$$\begin{aligned} \delta(K_0, K_1) &= \max_{x_1\in K_1} \min_{x_0\in K_0} d(x_0, x_1), \\ \delta(K_1, K_2) &= \max_{x_0\in K_0} \min_{x_1\in K_1} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Относительно хаусдорфовой метрики $\chi(\cdot,\cdot)$ множество $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ является полным компактным метрическим пространством (см. [2]).

Рассмотрим на $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ многозначное отображение

$$\mathcal{F} : \mathcal{K}(\mathcal{M}) \to \mathcal{K}(\mathcal{M}),$$

определенное равенством

$$\mathcal{F}(K) = \bigcup_{i=1}^{k} M_i,$$

где

$$M_i = \{x \in \mathcal{M} : x = f_i(y),\ y \in K\} \qquad (i = 1, \dots, k).$$

Отображение $\mathcal{F}$ порождает на $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ дискретную многозначную динамическую систему

$$K_{n+1} = \mathcal{F}(K_n) \qquad (n = 0, 1, \dots), \tag{3}$$

определенную на компактных подмножествах пространства $\mathcal{M}$.

Пусть q_i — константы сжатия отображений f_i $(i = 1, \dots, k)$. Покажем, что отображение $\mathcal{F} : \mathcal{K}(\mathcal{M}) \to \mathcal{K}(\mathcal{M})$ является сжимающим с константой сжатия

$$q = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} q_i,$$

т.е. что для любых компактов $K_0,\ K_1 \subset \mathcal{M}$

$$\chi(\mathcal{F}(K_0), \mathcal{F}(K_1)) \leqslant q\chi(K_0, K_1). \tag{4}$$

Пусть z — некоторая точка множества $\mathcal{F}(K_1)$. Так как

$$\mathcal{F}(K_1) = \bigcup_{i=1}^{k} M_i,$$

где

$$M_i = \{x \in \mathcal{M} : x = f_i(y), y \in K_1\},$$

то при некотором i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ найдется точка $y \in K_1$, для которой

$$z = f_i(y).$$

Выберем такую точку $x_0 \in K_0$, чтобы

$$d(x, y) \leqslant \chi(K_0, K_1).$$

Тогда

$$d(f_i(x), z) = d(f_i(x), f_i(y)) \leqslant q_i d(x, y) \leqslant q_i\chi(K_0, K_1) \leqslant q\chi(K_0, K_1).$$

Таким образом, для произвольной точки $z \in \mathcal{F}(K_1)$ нашлась точка

$$u = f_i(x) \in \mathcal{F}(K_0),$$

для которой

$$d(u, z) \leqslant q\chi(K_0, K_1).$$

Поэтому

$$\delta(\mathcal{F}(K_0), \mathcal{F}(K_1)) \leqslant q\chi(K_0, K_1). \tag{5}$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\delta(\mathcal{F}(K_1), \mathcal{F}(K_0)) \leqslant q\chi(K_0, K_1). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) следует неравенство (4).

Итак, отображение $\mathcal{F} : \mathcal{K}(\mathcal{M}) \to \mathcal{K}(\mathcal{M})$ является сжимающим на $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ с константой q. В силу принципа сжимающих отображений (см., например [3]) отображение $\mathcal{F}$ имеет на $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ единственную неподвижную точку

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{M}),$$

к которой сходятся в хаусдорфовой метрике итерации K_n дискретной многозначной системы (3) при любом начальном условии $K_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$, т.е. справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \chi(\mathcal{F}^n(K_0), \mathcal{A}) = 0. \tag{7}$$

Покажем, что компакт $\mathcal{A}$ является искомым аттрактором, т.е. во-первых, для каждого начального условия $x_0 \in \mathcal{M}$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{y\in\mathcal{A}} d(y, x_n),$$

где $\{x_n\}$ — траектория дискретной системы (1), отвечающая произвольному управлению $m(\cdot) \in \mathfrak{M}$. И, во-вторых, для всех начальных условий и почти всех относительно вероятностной меры μ управлений $m(\cdot) \in \mathfrak{M}$ траектории дискретных систем (1) плотны в $\mathcal{A}$.

Первое утверждение непосредственно следует из определения многозначной дискретной системы (3) и соотношения (7). Для доказательства второго утверждения воспользуемся оценкой

$$\chi(\mathcal{A}, K_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\chi(K_0, \mathcal{F}(K_0)),$$

которая имеет место в условиях принципа сжимающих отображений. Из этой оценки и компактности $\mathcal{M}$ следует, что для любой точки $x \in \mathcal{M}$ справедлива оценка

$$\chi(\mathcal{A}, \mathcal{F}^n(x)) \leqslant C\frac{q^n}{1-q}, \tag{8}$$

где

$$C = \max_{x\in\mathcal{M}} \chi(x, \mathcal{F}(x)).$$

Рассмотрим монотонно убывающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\}$ и для каждого l построим в $\mathcal{A}$ конечную ε_l-сеть

$$N(\varepsilon_l) = \{x_1^l, \ldots, x_{r(l)}^l\}.$$

Не ограничивая общности можно считать выполненными включения

$$N(\varepsilon_1) \subset N(\varepsilon_2) \subset \ldots \subset N(\varepsilon_l) \subset \ldots$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathcal{M}$ и обозначим через $\mathfrak{M}_1$ подмножество множества $\mathfrak{M}$, состоящее из таких управлений $m(\cdot)$, для которых ε_1-окрестности траекторий дискретных систем (1), отвечающих этим управлениям, с начальным условием x содержат множество $N(\varepsilon_1)$. Для вычисления меры множества $\mathfrak{M}_1$ введем в рассмотрение описываемые ниже подмножества, содержащиеся в $\mathfrak{M}_1$.

В силу неравенства (8) для числа

$$m_1 = \left(\left[\,\left|\left(\frac{\varepsilon_1(1-q)}{C}\right)\Big/ lnq\right|\,\right]+1\right) r(1),$$

любого натурального l и любого набора индексов $\{j_1, \ldots, j_l\}$ из множества $\{1, \ldots, k\}$ найдется последовательность индексов $l_1\ (j_1, \ldots, j_l), \ldots$ $\ldots, l_{m_1}(j_1, \ldots, j_l)$ такая, что

$$\nu(1, 2, \ldots, m_1 + l; j_1, \ldots, j_l, l_1(j_1, \ldots, j_l), \ldots, l_{m_1}(j_1, \ldots, j_l) \subset \mathfrak{M}_1.$$

Поэтому

$$\bigcup_{l=0}^{\infty} \bigcup_{j_1, \ldots, j_l} \nu(1, 2, \ldots, m_1 + l; j_1, \ldots, j_l, l_1(j_1, \ldots, j_l), \ldots, l_{m_1}(j_1, \ldots, j_l)) \subset \mathfrak{M}_1.$$

Но

$$\mu\Big(\bigcup_{l=0}^{\infty} \bigcup_{j_1, \ldots, j_l} \nu(1, 2, \ldots, m_1 + l; j_1, \ldots, j_l, l_1(j_1, \ldots, j_l), \ldots, l_{m_1}(j_1, \ldots, j_l))\Big) = 1.$$

Следовательно,

$$\mu(\mathfrak{M}_1) = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ подмножество множества $\mathfrak{M}$, состоящее из таких управлений $m(\cdot)$, для которых ε_2-окрестности траекторий дискретных систем (1), отвечающих этим управлениям и удовлетворяющих начальному условию x содержат множество $N(\varepsilon_2)$. Очевидно,

$$\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$$

как и в предыдущем случае

$$\mu(\mathfrak{M}_2) = 1.$$

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность вложенных множеств

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_l \supset \ldots,$$

для которых

$$\mu(\mathfrak{M}_l) = 1 \qquad (l = 1, 2, \dots).$$

Пусть

$$\mathfrak{M}_* = \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathfrak{M}_l.$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_* \neq \emptyset,$$

$$\mu(\mathfrak{M}_*) = 1$$

и для любого управления $m(\cdot) \in \mathfrak{M}_*$ и любого натурального l ε_l-окрестность траектории дискретной системы (1), отвечающей управлению $m(\cdot)$ и удовлетворяющей начальному условию x содержит множество $N(\varepsilon_l)$. Отсюда следует, что эта траектория плотна в $\mathcal{A}$.

Теорема доказана.

3. Дополнительные замечания.

Изложенные в этой работе конструкции могут применяться для сжатия и хранения информации. Эта проблема весьма актуальна в связи с резким увеличением информации, передаваемой по линиям связи и с необходимостью ранения больших массивов данных. Поясним одну из возможных схем использования этих конструкций. Вначале создается библиотека дискретных динамических систем, обладающих описанными выше свойствами. Каждая такая система определяется конечным набором сжимающих отображений и ей соответствует аттрактор, лежащий в $\mathcal{M}$. Множество всех таких аттракторов плотно в множестве $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ и поэтому аттракторами из достаточно обширно библиотеки можно с нужной точностью приблизить любой компакт из $\mathcal{M}$. Набор сжимающих отображений, отвечающих аппроксимирующему аттрактору, кодирует аппроксимируемый компакт.

Изложенный выше подход обобщает метод фрактального сжатия изображений, предложенный Барнсли с Слоаном [4]. Математическое обоснование метода Барнсли и Слоана содержится в работе [5].

Литература.

1. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1968.

2. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. М.: Изд-во МГУ, 1988.

3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

4. Barnsley M.F., Sloan A.D. A better way to compress image //Byte. 1988, № 3.

5. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли–Слоану //Автоматика и телемеханика. №5. 1995.