Раздел II
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Богданов А.В.

Об условиях сходимости итерационного метода Брауна-Робинсон для биматричных игр.

1. Введение

В теории игр важную роль играет понятие равновесия Нэша. Одним из распространенных методов поиска равновесия Нэша является итерационный метод Брауна-Робинсон. Суть данного метода заключается в том, что игроки выбирают на каждом шаге T свою стратегию, предполагая, что частоты применения стратегий других игроков по результатам предыдущих (T-1) шагов соответствуют их смешанным стратегиям на шаге T.

Браун предположил, а Робинсон в [12] доказала сходимость такого процесса для биматричных игр. В работе [13] Дж.М.Данскин показал сходимость данного процесса для антагонистических игр с непрерывными выигрышами на произведениях произвольных компактных пространств. В работе [6] Фьюденберг и Крепс показали сходимость адаптивной игровой модели для неантагонистических биматричных игр 2x2 с одним чисто смешанным равновесием Нэша. В работе [10] Бенайм и Хирш распространили полученный результат для игр 2x2 с несколькими равновесиями Нэша (не обязательно чисто смешанными). Однако полученные результаты нельзя распространить для неантагонистических игр большой размерности. Неприменимость метода Брауна для биматричных игр наглядно демонстрирует следующий пример, заимствованный из работы [3].

П р и м е р 1.1 : (Шепли).

Пусть матрицы выигрыша игроков имеют вид:

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}$$

Если в качестве начальной точки игроки выберут пару чистых стратегий $(i_0, j_0) = (1,1)$, то выборы игроков в последующие моменты времени будут следовать по циклу из шести пар стратегий:

$$(1,1) \to (1,3) \to (3,3) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,1) \to (1,1)$$

При этом число периодов, которые процесс будет находиться в каждом из этих состояний, будет экспоненциально возрастать. Очевидно, что процесс Брауна-Робинсон не сходится. Однако в рассматриваемой игре имеется точка равновесия:

$$p^* = (1/3,\ 1/3,\ 1/3) \qquad q^* = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$$

В данной работе будет указан класс биматричных игр, для которых можно было бы утверждать сходимость. В качестве отправной точки берется доказанная В.З.Беленьким в работе [1] теорема о сходимости к равновесию Нэша игровых процессов. Цель настоящей работы - выяснить для каких биматричных игр выполнены условия этой теоремы.

Общий результат работы состоит в том, что *гарантировать сходимость игрового процесса на основе теоремы В.З.Беленького можно только для тех биматричных игр, которые сводятся к антагонистической* при помощи следующих эквивалентных преобразований:

- Добавление константы к столбцу платежной матрицы первого игрока
- Добавление константы к строке платежной матрицы второго игрока
- Домножение платежной матрицы на константу ? > 0

Известно, что указанные преобразования задают классы игр с одинаковыми множествами равновесий Нэша.

2. Определение игрового процесса.

Напомним вкратце основные понятия теории игр, использующиеся в данной работе.

Игрой N лиц (игроков) будем называть объект $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$, где X_k -множества возможных стратегий игроков, а функции φ_k заданы на прямом произведении этих множеств: $\varphi_k : \Omega \to R$, где $\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_N) : x_k \in X_k,\ k=1, \ldots, N\}$

Игра N лиц $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$ называется выпуклой, если:

1) Все X_k являются выпуклыми компактами евклидова пространства.
2) Функции выигрыша φ_k - непрерывны на Ω.
3) При любых фиксированных значениях аргументов $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, N, j \neq k$, $\varphi_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_N)$ - выпуклая вверх функция аргумента x_k.

Выпуклая игра N лиц $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$ называется выпукло-вогнутой, если кроме условий 1)-3) выполняется дополнительное условие:

4) При любом фиксированном значении $x_k \in X_k$, функция $\varphi_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_N)$ - выпуклая вниз функция аргументов x_j $j = 1, \ldots, N, j \neq k$.

Замечание: В работе [1] выпуклой игрой называлась именно выпукло-вогнутая игра и именно при наличии условия 4) удается доказать сходимость метода Брауна-Робинсон.

Обозначим $F(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x)$ - сумма выигрышей всех игроков. Игра называется игрой с нулевой суммой, если $F(x) = 0\ \forall x \in \Omega$

Обозначим $\varphi_k(y_k; x) = \varphi_k(x_1, \ldots, y_k, \ldots, x_N)$ - выигрыш k-го игрока, если он использует стратегию y_k , в то время как все остальные игроки используют соответствующие стратегии из вектора x. С учетом данного обозначения условие 3) в определении выпуклой игры означает, что $\varphi_k(y_k; x)$ должна быть выпукла вверх по y_k. А условие 4) означает выпуклость вниз по x. Отметим также тождество $\varphi_k(x_k; x) = \varphi_k(x)$

Равновесием Нэша для игры $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$ называется точка $x^* \in \Omega : \forall\ k = 1, \ldots, N$

$$\max_{y_k \in X_k} \varphi_k(y_k; x^*) = \varphi_k(x_k^*; x^*) \tag{2.1}$$

Определим точечно-множественные отображения $Z_k : \Omega \to X_k$:

$$Z_k(x) = \mathop{Arg\max}_{y_k \in X_k} \varphi_k(y_k; x), \qquad k = 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

Определим Z(x) как декартово произведение отображений $Z_k(x)$.

Нетрудно заметить, что множество $Z_k(x)$ - это множество наилучших ответов k-го игрока на набор стратегий $(x/x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N)$. Отображение Z(x) будем называть отображением, связанным с игрой $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$.

Обозначим $\Phi(y,x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(y_k; x)$, $x, y \in \Omega$.

Из определений непосредственно вытекает соотношение:

$$Z(x) = \underset{y \in \Omega}{Arg\max}\ \Phi(y,x)\ ,\quad x \in \Omega$$

Кроме того, условие равновесия Нэша можно переписать в виде:

А. x^* - равновесие Нэша $\Leftrightarrow x^* \in Z(x^*)$.

Б. x^* - равновесие Нэша $\Leftrightarrow \Phi(y, x^*) \le \Phi(x^*, x^*)$, $\forall\, y \in \Omega$.

Пусть R-ограниченное многозначное поле направлений, заданное на выпуклом компакте Ω. Непрерывная неотрицательная функция U, определенная на Ω, называется индикатрисой (сходимости) поля R, если всюду вне множества $m(U) = \{x \in \Omega : U(x) = 0\}$ она строго убывает вдоль интегральных кривых поля R. Индикатриса сходимости называется функцией Ляпунова для интегрального поля R, если множество $m(U)$ совпадает с множеством неподвижных точек поля R.

Пусть задана выпуклая игра N лиц $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}$. Пусть задана некоторая начальная точка $x^0 \in \Omega = X_1 \times \ldots \times X_N$. Игровым процессом Брауна-Робинсон мы будем называть итеративную процедуру, генерирующую последовательность $\{x^T\} = A(x^0)$ согласно следующему правилу:

$$x^{(T+1)} = x^{(T)} \times (1 - 1/T) + z^{(T)} \times 1/T,\ \text{где}\ z^{(T)} \in Z(x^{(T)}) \qquad (2.3)$$

где точечно-множественное отображение $Z(x)$ определяется из соотношения (2.2).

Будем говорить, что процесс (2.3) сходится (к равновесию Нэша), если $\rho(x^T, \aleph) \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0$, где $\aleph$-множество равновесий Нэша рассматриваемой игры $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}$. Из условий 1)-4) следует, что множество $\aleph$ выпуклый компакт.

3. Игра двух лиц с нулевой суммой.

В игре двух игроков с нулевой суммой $\varphi_1(x_1, x_2) = -\varphi_2(x_1, x_2)$, $\forall x_1 \in X_1$, $\forall x_2 \in X_2$. Поэтому обычно задают только одну функцию $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) = -\varphi_2(x_1, x_2)$. При этом первый игрок - максимизирующий, а второй игрок - минимизирующий. Точки равновесия Нэша для данной игры будут седловыми точками для функции $\varphi(x_1, x_2)$.

Для удобства будем обозначать стратегии первого и второго игроков буквами r и p соответственно. Множества допустимых стратегий будем обозначать R и P. Игра двух лиц $\{R, P, \varphi\}$ называется равноправной, если R=P и $\varphi(p,p) = 0$, $\forall p \in P$. Равноправная игра двух лиц $\{P, P, \varphi\}$ называется симметричной, если $\varphi(p,r) = -\varphi(r,p)$, $\forall p,r \in P$

Л е м м а 3.1.(О сведении игры N лиц к равноправной игре двух лиц).

Выпукло-вогнутая игра N лиц с нулевой суммой $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$ эквивалентна равноправной игре двух лиц $\bar{\gamma} = \{\Omega, \Phi\}$, где Ω и Φ определены в предыдущем разделе, в том смысле, что множество равновесных стратегий второго игрока в игре $\bar{\gamma}$ совпадает с множеством точек равновесия в игре γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о Для выпукло-вогнутой игры функция Φ всегда выпукло-вогнута. Условие равноправности выполняется, поскольку $\forall x \in \Omega$ $\Phi(x,x)=0$, так как γ - игра с нулевой суммой. Кроме того, условие оптимальности для второго игрока в $\bar{\gamma}$

совпадает с условием равновесия в $\gamma = \{X_k, \varphi_k\}_{k=1}^{N}$.

Лемма доказана.

4. Теорема сходимости.

Т е о р е м а 4.1. (теорема сходимости).

Пусть Ω - выпуклый компакт, функция Ф(y, x) определена и непрерывна на $\Omega\times\Omega$ и удовлетворяет условиям:

а) при каждом фиксированном $y\in\Omega$ функция Ф(y, x) выпукла вниз по x.

б) при каждом фиксированном $x\in\Omega$ множество оптимальных ответов

$$Z(x) = Arg\max_{y\in X} \Phi(y,x),\ x\in X, \tag{4.1}$$

-выпукло.

в) $\Phi(x,x) = 0,\ \forall x\in\Omega$.

Тогда игровой процесс (2.3) сходится (т.е. последовательность x^T при $T\to\infty$ сходится к множеству равновесий Нэша указанной игры) и функция

$$U(x) = \max_{y\in X} \Phi(y,x) = \Phi(z(x),x),\ \text{где } z(x)\in Z(x), \tag{4.2}$$

является функцией Ляпунова для поля R = Z - E, т.е. U - индикатриса сходимости для поля R и m(U) = stat(R).

5. Построение игрового процесса для биматричных игр.

Рассмотрим биматричную игру m×n.

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ & \dots & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix}$$

$A, B\in\Re^{m\times n}$

Первый игрок выбирает строку, второй - столбец. Тогда:

$p = (p_1,\dots,p_m)$ стратегия 1 игрока.

$q = (q_1,\dots,q_n)$ стратегия 2 игрока.

$\varphi_1(p,q) = pAq$ - функция выигрыша 1 игрока.

$\varphi_2(p,q) = pBq$ - функция выигрыша 2 игрока.

Теорема о сходимости, приведенная в предыдущем разделе, справедлива только для игр с нулевой суммой. В связи с этим мы вводим дополнительного “фиктивного” игрока, который сам никаких стратегий не выбирает, а только получает выигрыш в соответствии с выбранными p и q (так, чтобы получалась игра с нулевой суммой).

$\varphi_3(p,q) = -pAq - pBq$

Обозначим $\bar{x} = (p^x, q^x) = (p_1^x,\dots,p_m^x,q_1^x,\dots,q_n^x)\in\Delta^m\times\Delta^n$ - совокупный набор стратегий первого и второго игроков. Обозначим $\Omega = \Delta^m\times\Delta^n$ - множество всевозможных наборов смешанных стратегий (множество партий в игре).

Как и предыдущем разделе, мы можем определить функцию Ф:

$$\Phi(\bar{y},\bar{x}) = \varphi_1(p^y,q^x) + \varphi_2(p^x,q^y) + \varphi_3(p^x,q^x) \tag{5.1}$$

Определим теперь отображение $Z(\bar{x})$, связанное с данной биматричной игрой:

$$Z(\bar{x}) = \arg\max_{\bar{y}\in\Omega} \Phi(\bar{y},\bar{x}) \tag{5.2}$$

Обратите внимание, что добавление “фиктивного” игрока никак не повлияло на получившееся отображение $Z(\bar{x})$.

Обозначим $\tilde{A} = \begin{Vmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{Vmatrix}$

Тогда (5.1) можно переписать в виде

$$\Phi(\bar{y},\bar{x}) = p^y A q^x + p^x B q^y + p^x(-A-B)q^x = \bar{y}\tilde{A}\bar{x} - \bar{x}\tilde{A}\bar{x}$$

Найдем более простое представление для отображения $Z(\bar{x})$, указанного в (5.2). Это отображение строится как решение двух задач линейного программирования: $Z(\bar{x}) = (p^*, q^*)$, где p^* и q^* - решения задач А и Б.

А. $pAq^x \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ p_i \geq 0, i = 1,\ldots,m \end{cases} \tag{5.3}$$

Б. $p^x Bq \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} q_j = 1 \\ q_j \geq 0, j = 1,\ldots,n \end{cases} \tag{5.4}$$

Последнее представление $Z(\bar{x}) = (p^*, q^*)$, где p^* и q^* - решения (5.3) и (5.4), позволяет понять структуру данного поля. Необходимо взять множество компонент вектора (Aq^x), на которых достигается максимум и тогда в векторе p^* ненулевыми должны быть только компоненты из данного множества. Аналогично для q^*.

Очевидно, что функция Ф линейна по $\bar{y}$. Следовательно Ф выпукла вверх по $\bar{y}$. Однако Ф не является в общем случае выпуклой вниз по $\bar{x}$, как это требуется в теореме сходимости. Таким образом, биматричная игра $\Gamma = \langle A, B \rangle$ в смешанных стратегиях не будет выпукло-вогнутой. Следующий пример показывает, что упомянутая в Теореме 4.1 функция $U(\bar{x})$ не будет функцией Ляпунова для поля $Z(\bar{x})$.

Пример 5.1. (Семейный спор).

$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$

$\bar{x} = (p_1^x, p_2^x, q_1^x, q_2^x) \in \Delta^2 \times \Delta^2 = \Omega$ В данной модели существует три точки равновесия в смешанных стратегиях:

а) $p = (1,0)$, $q = (1,0)$.

б) $q = (0,1)$, $q = (0,1)$.

в) $p = (2/3, 1/3)$, $q = (1/3, 2/3)$

При любой смешанной стратегии второго игрока, отличающейся от в), первому выгодно выбрать чистую стратегию, указанную в а) или б). То же самое касается и второго игрока.

Поскольку $p_2^x = 1 - p_1^x$, $q_2^x = 1 - q_1^x$, то мы можем вместо вектора $\bar{x}$ использовать сокращенную запись:

$$\bar{x} \leftrightarrow x = (p_1^x, q_1^x) \in [0;1] \times [0;1]$$

Тогда

$$U(x) = \max_{y \in [0;1] \times [0;1]} \Phi(y, x) = \max\{2q_1^x; 1 - q_1^x\} + \max\{p_1^x; 2(1 - p_1^x)\} - 3p_1^x q_1^x - 3(1 - p_1^x)(1 - q_1^x) \quad (5.5)$$

Поэтому U принимает нулевые значения только в трех точках:

а) x = (1,1)

б) x = (0,0)

в) $x = (^2/_3, ^1/_3)$

Во всех остальных точках $x \in [0;1] \times [0;1]$ $U(x) > 0$.

Построим точечно-множественное отображение Z(x), используя соотношения (5.3) и (5.4):

$$Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x)), \quad (5.6)$$

где:

$$Z_1(x) = \begin{cases} 1, & 2q_1^x > (1 - q_1^x) \\ 0, & 2q_1^x < (1 - q_1^x) \\ [0;1], & 2q_1^x = (1 - q_1^x) \end{cases} \qquad Z_2(x) = \begin{cases} 1, & p_1^x > 2(1 - p_1^x) \\ 0, & p_1^x < 2(1 - p_1^x) \\ [0;1] & p_1^x = 2(1 - p_1^x) \end{cases} \quad (5.7)$$

Теперь находим отображение R(x), которое указано в Теореме 4.1:

R(x) = Z-E = (R_1 , R_2), где:

$$R_1(x) = \begin{cases} 1 - p_1^x, & q_1^x > 1/3 \\ -p_1^x, & q_1^x < 1/3 \\ [-p_1^x; 1 - p_1^x], & q_1^x = 1/3 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$R_2(x) = \begin{cases} 1 - q_1^x, & p_1^x > 2/3 \\ -q_{1x}, & p_1^x < 2/3 \\ [-q_1^x; 1 - q_1^x], & p_1^x = 2/3 \end{cases}$$

Из равенств $2q_1^x = (1 - q_1^x)$ и $p_1^x = 2(1 - p_1^x)$ находим $q_1^x = 1/3$, $p_1^x = 2/3$ (5.9)

Из (5.8) и (5.9) получаем следующие неподвижные точки для отображения R:

а) $p_1^x = 1$, $q_1^x = 1$.

б) $p_1^x = 0$, $q_1^x = 0$.

в) $p_1^x = 2/3$, $q_1^x = 1/3$.

Каждой неподвижной точке соответствует одна из точек равновесия.

Для интегральных кривых g(t) поля R имеем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dot{g}_1(t) \in R_1(g(t)) \\ \dot{g}_2(t) \in R_2(g(t)) \end{cases} \quad (5.10)$$

В соответствии (5.8), (5.9) и (5.10) интегральные кривые изображены на рисунке.

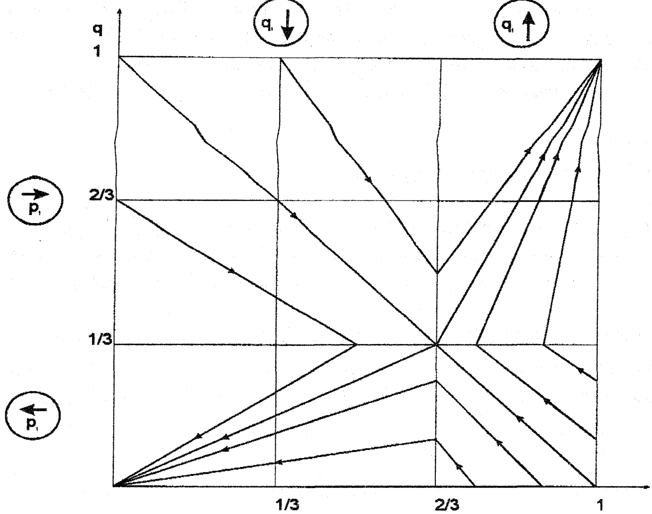

Рис.1. Интегральные кривые для модели 'Семейный спор'

Покажем, что функция U(x) не обязательно убывает вдоль траектории g(t). Будем для краткости вместо переменных p_1^x и q_1^x использовать обозначения p и q соответственно.

$$\dot{U}_t(g(t)) = \dot{U}_p g_1(t) + \dot{U}_q g_2(t) \tag{5.11}$$

Из (5.5) при $p \neq {}^2/_3$ и $q \neq {}^1/_3$ имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = I\left(p > \tfrac{2}{3}\right) - 2I\left(p < \tfrac{2}{3}\right) + 3 - 6q \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 2I\left(q > \tfrac{1}{3}\right) - I\left(q < \tfrac{1}{3}\right) + 3 - 6p \tag{5.13}$$

Предположим, что $p < {}^2/_3$ и $q < {}^1/_3$. Тогда в силу (5.8) $g_1(t) < 0$ и $g_2(t) < 0$. При этом (5.12) и (5.13) принимают вид:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = 1 - 6q \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 2 - 6p \tag{5.15}$$

Выражения (5.14) и (5.15) будут отрицательны при $q \in ({}^1/_6\,;\,{}^1/_3)$ и $p \in ({}^1/_3\,;\,{}^2/_3)$. Поэтому, в силу (5.11) и в силу $g_1(t) < 0$ и $g_2(t) < 0$ получаем:

$$\dot{U}_t(g(t)) > 0 \ \text{при}\ q \in ({}^1/_6\,;\,{}^1/_3)\ \text{и}\ p \in ({}^1/_3\,;\,{}^2/_3) \tag{5.16}$$

Таким образом, в указанной области функция U(x) не убывает вдоль интегральной кривой, что противоречит свойствам функции Ляпунова. Следовательно, функция U в Теореме 4.1 не является функцией Ляпунова для поля R, построенного нами. Отметим что в данной модели соблюдаются все условия теоремы кроме выпуклости вниз функции Φ(y,x) по x.

Покажем, что в модели "семейный спор" не существует функции Ляпунова для поля R=Z-E (Выше было показано, что функция U(x), определенная в (4.2) не является строго убывающей на итегральных кривых поля R. Теперь мы покажем, что такой функции не может существовать вовсе.) Допустим, что W(x) – функция Ляпунова. Тогда:

а) W(x) - непрерывна.

б) W(x) - строго убывает вдоль кривых поля R.

в) m(W) = stat(R)

На множестве $[0;1]\times[0;1]$ выделим отрезок $\Sigma = \{(p,q) : p = {}^1/_3,\ q\in[0;{}^1/_3]\}$ (см. рис. 1). Данный отрезок является замкнутым множеством и поэтому непрерывная функция W обязательно достигает на нем своего минимального значения L. Из в) вытекает, что L>0.

Любая интегральная кривая с началом в точке $(2/3-\varepsilon,\ 1/3)$ при достаточно малых $\varepsilon>0$ проходит через этот отрезок. Следовательно, в силу убывания вдоль интегральных кривых, должно выполняться $W(2/3-\varepsilon,\ 1/3)>L$. При $\varepsilon\to 0$ в силу непрерывности W(x) последнее неравенство принимает вид $W(2/3,\ 1/3)\geq L$, что противоречит условию $W(2/3,\ 1/3)=L$.

Таким образом, мы доказали, что в модели "семейный спор" вообще не может быть функции Ляпунова.

В Теореме 4.1 сходимость модели к решению вытекала из существования функции Ляпунова. В примере "семейный спор" функции Ляпунова не существует. В примере Шепли также не существует функции Ляпунова, что привело к тому, что метод Брауна не сходится.

Выводы:

В случае биматричной игры с ненулевой суммой матриц:

а) Для поля R=Z-E, построенного в предшествующем разделе, может не существовать функции Ляпунова. Может также не быть сходимости.

б) Можно гарантировать существование функции Ляпунова (а следовательно и сходимости), ограничив множество рассматриваемых моделей и предполагая, что Ф(y,x) выпукла вниз по x.

в) В общем случае можно искать равновесие Нэша, взяв для функции U другое поле.

6. Условия сходимости игровых процессов для биматричных игр.

Согласно Теореме 4.1. биматричная игра сходится, если функция Ф(y,x) выпукла вниз по x. Выясним, какие требования на матрицы выигрышей налагает данное условие.

Рассмотрим функцию Ф:

$$\begin{aligned}\Phi(y,x) &= \varphi_1(p^y,q^x)+\varphi_2(p^x,q^y)+\varphi_3(p^x,q^x) = \\ &= p^yAq^x+p^xBq^y+p^xCq^x\end{aligned} \qquad (6.1)$$

где $C=(-A-B)$, $\quad x=(p^x,q^x),\ y=(p^y,q^y)\in\Delta^m\times\Delta^n$

Как несложно заметить, первые два слагаемых линейны по x и y. Следовательно выпуклость полностью определяется третьим слагаемым. То есть: $\Phi(y,x)$ выпукла вниз по x в том и только в том случае, когда $\varphi_3(p^x,q^x)$ выпукла вниз по x. Выясним условия, при которых билинейная форма $\psi(x)=p^xCq^x$ выпукла вниз на множестве

$x \in \Delta^m \times \Delta^n$.

Матрицу F размера m×n будем называть *столбцовой,* если $\forall j \in \{1,\ldots,n\}$, $\forall i,k \in \{1,\ldots,m\}$ выполняется $f_{ij} = f_{kj}$; матрица D размера m×n называется *строковой,* если $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, $\forall j,s \in \{1,\ldots,n\}$ выполняется $d_{ij} = d_{is}$

Таким образом, столбцовая матрица представима в виде:

$$F = \begin{Vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1 & \cdots & f_n \end{Vmatrix}$$

Строковая матрица имеет вид:

$$D = \begin{Vmatrix} d_1 & \cdots & d_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_m & \cdots & d_m \end{Vmatrix}$$

Матрицу C размера m×n будем называть *столбцово-строковой,* если её можно представить в виде суммы столбцовой и строковой матриц.

Т е о р е м а 6.1. Билинейная форма

$$\psi(p,q) = p\,C\,q \qquad (6.2)$$

выпукла вниз на множестве $\Omega = \left\{x = (p^x, q^x) \middle| p^x \in \Delta^m, q^x \in \Delta^n\right.$ тогда и только тогда, когда матрица C является столбцово-строковой.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $x = (p^x, q^x)$, $y = (p^y, q^y) \in \Omega$.

$$\psi(x) = p^x C q^x$$

$$\psi(y) = p^y C q^y$$

Пусть $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in (0;1)$

Тогда $\psi(x)$ выпукла вниз $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in \Omega$, $\forall \lambda \in (0;1)$ выполняется

$$\lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y) - \psi(z) \geq 0 \qquad (6.3)$$

Преобразуем левую часть (6.3):

$$\begin{aligned} &\lambda\psi(x) + (1-\lambda)\psi(y) - \psi(z) = \\ &= \lambda p^x C q^x + (1-\lambda) p^y C q^y - \lambda^2 p^x C q^x - (1-\lambda)^2 p^y C q^y - \lambda(1-\lambda)\left\{p^x C q^y + p^y C q^x\right\} = \\ &= \lambda(1-\lambda)\left\{p^x C q^x + p^y C q^y - p^x C q^y - p^y C q^x\right\} = \lambda(1-\lambda)\left\{(p^x - p^y) C (q^x - q^y)\right\} \end{aligned} \qquad (6.4)$$

С учетом последнего соотношения, а также в силу $\lambda(1-\lambda) > 0$ $\forall \lambda \in (0;1)$ условие выпуклости $\psi(x)$ принимает вид:

$$\psi(x) \text{ выпукла вниз} \Leftrightarrow \forall x,y \in \Omega \ \left\{(p^x - p^y) C (q^x - q^y)\right\} \geq 0 \qquad (6.5)$$

Обозначим:

$$V = \left\{v = (v_1, \ldots, v_m) = p^x - p^y \mid p^x, p^y \in \Delta^m\right.$$

$$W = \left\{w = (w_1, \ldots, w_n) = q^x - q^y \mid q^x, q^y \in \Delta^n\right.$$

Поскольку из условия $v \in V$ вытекает $(-v) \in V$, то $\psi(x)$ выпукла вниз в том и только в том случае, когда для любых $v \in V$ и $w \in W$ выполняется строгое равенство:

$$vCw = 0 \qquad (6.6)$$

Для доказательства теоремы осталось показать справедливость следующего утверждения: для того чтобы выполнялось равенство

$$vCw = 0 \ \forall v \in V, w \in W \qquad (6.7)$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица C была столбцово-строковой.

Очевидно, что (6.7) автоматически выполняется для всякой столбцово-строковой матрицы. Покажем теперь, что из (6.7) следует, что C столбцово-строковая.

Пусть (6.7) выполняется для матрицы $C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ & \dots & \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{Vmatrix}$

Покажем, что существует представление C = F+D, где матрицы F и D имеют вид:

$$F = \begin{Vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1 & \cdots & f_n \end{Vmatrix} \qquad D = \begin{Vmatrix} d_1 & \cdots & d_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_m & \cdots & d_m \end{Vmatrix}$$

Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{11} = f_1 + d_1 \\ c_{12} = f_2 + d_1 \\ \quad\dots \\ c_{mn} = f_n + d_m \end{cases} \tag{6.8}$$

Возьмем:

$$d_i = c_{i1} \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\} \tag{6.9}$$

$$f_j = c_{1j} - c_{11} \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\} \tag{6.10}$$

Покажем, что (6.9), (6.10) является решением системы (6.8).

Действительно, имеем:

$$f_j + d_i = c_{i1} + c_{1j} - c_{11} = c_{ij} \tag{6.11}$$

Последнее из равенств (6.11) вытекает из (6.7), если взять v и w :

$v_1=1$, $v_i=-1$, $v_k=0$ при $k\neq 1, i$;

$w_1=1$, $w_j=-1$, $w_s=0$ при $s\neq 1, j$;

Таким образом, из (6.7) вытекает, что матрица C столбцово-строковая.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е: В доказательстве данной теоремы фактически описан метод нахождения разложения для столбцово-строковой матрицы. Если матрица C не является столбцово-строковой, то последнее из равенств (6.11) будет неверно и система (6.8) не должна иметь решения.

З а м е ч а н и е: Из условия (6.7) в доказательстве теоремы вытекает, что для любой столбцово-строковой матрицы необходимым и достаточным условием является выполнение равенства:

$$c_{ij} + c_{ks} = c_{is} + c_{kj} \, \forall i,k \in \{1,\dots,m\} \forall j,s \in \{1,\dots,n\} \tag{6.12}$$

Из Теорем 4.1 и 6.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 6.2: Для биматричной игры <A, B> игровой процесс (2.3) сходится, если C = A+B является столбцово-строковой матрицей. Более того, в данном случае будут выполняться все условия Теоремы 4.1 и функция U(x) будет функцией Ляпунова для поля R.

П р и м е р 6.1. Рассмотреть является ли матрица C = A+B в модели “семейный спор” столбцово-строковой.

Имеем: $A=\begin{Vmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{Vmatrix}$

Тогда: $D=\begin{Vmatrix}3 & 3\\0 & 0\end{Vmatrix}$, $F=C-D=\begin{Vmatrix}0 & -3\\0 & 3\end{Vmatrix}$

Таким образом, матрица C не является столбцово-строковой. Однако, как известно, метод Брауна всегда сходится для игр 2x2. Следовательно условие того что матрица C столбцово-строковая является достаточным для сходимости, но не необходимым.

7. Условия сходимости для биматричных игр, получаемые за счет эквивалентного преобразования биматричной игры.

Как Вы уже наверное заметили, в наших рассуждениях относительно биматричной игры в разделе 6 мы пытались выяснить сходимость только за счет введения нового "фиктивного" игрока и требуя, чтобы для него выполнялись условия Теоремы 4.1. Фактически в полученной нами Теореме 6.1 утверждается, что выигрыш третьего игрока в биматричной игре будет выпуклой функцией на множестве $\Omega = \{(p,q) : p\in\Delta^m, q\in\Delta^n\}$ допустимых пар смешанных стратегий в том и только в том случае, когда $\varphi_3(x)=0$ $\forall x\in\Omega$. Таким образом, мы получили, что биматричная игра после введения третьего игрока будет выпукло-вогнутой только в том случае, если сумма выигрышей первого и второго игроков будет нулевой. Обратите внимание: сумма платежных матриц при этом не обязательно нулевая.

Другой способ добиться применимости Теоремы 4.1 заключается в том, чтобы преобразовать биматричную игру таким образом, чтобы сохранилось то же самое поле направлений R = Z-E, где Z определяется формулой (2.2).

Как известно, на точки равновесия в биматричной игре не влияют следующие преобразования:

а) Добавление столбца к матрице выигрыша первого игрока и строки к матрице выигрыша второго игрока.

б) Домножение платежной матрицы одного из игроков на $\alpha > 0$.

Рассмотрим как преобразуется отображение R при таких преобразованиях биматричной игры.

а) Допустим, в матрице выигрыша первого игрока все элементы j столбца увеличены на α. Новые функции выигрыша первого, второго и третьего игроков обозначим соответственно φ_1', φ_2' и φ_3'. Тогда:

$$\begin{aligned}&\varphi_1'(x)=p^xA'q^x=p^xAq^x+\alpha=\varphi_1(x)+\alpha\\&\varphi_2'(x)=p^xB'q^x=p^xBq^x=\varphi_2(x)\\&\varphi_3'(x)=-\varphi_1'(x)-\varphi_2'(x)=\varphi_3(x)-\alpha\end{aligned}\tag{7.1}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\varphi_1'(y;x)=p^yA'q^x=p^yAq^x+\alpha=\varphi_1(y;x)+\alpha\\&\varphi_2'(y;x)=p^xB'q^y=p^xBq^y=\varphi_2(y;x)\\&\varphi_3'(y;x)=-\varphi_1'(x)-\varphi_2'(x)=\varphi_3(y;x)-\alpha\end{aligned}\tag{7.2}$$

Тогда, в соответствии с (2.2) имеем:

$$
\begin{aligned}
&Z_1'(x) = Arg\max_{p^y\in\Delta^m}\varphi_1'(p^y,x) = Z_1(x)\\
&Z_2'(x) = Arg\max_{q^y\in\Delta^n}\varphi_2'(q^y,x) = Z_2(x)\\
&Z_3'(x) = Z_3(x)
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Таким образом, отображение Z(x) не изменяется при данном преобразовании. Более того, при таком преобразовании платежной матрицы функция Ф(y,x) также остается без изменений. Если для игры $<A, B>$ справедливы условия Теоремы 6.2, то для преобразованной игры $<A',B'>$ условия Теоремы 6.2 также будут справедливы. Следовательно, такое преобразование никак не изменяет область применимости метода Брауна для биматричных игр, предложенную ранее.

б) Пусть теперь платежная матрица первого игрока домножается на число $\alpha>0$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1'(x) = p^x A' q^x = p^x(\alpha A)q^x = \alpha\varphi_1(x)\\
&\varphi_2(x) = p^x B' q^x = p^x B q^x = \varphi_2(x)\\
&\varphi_3'(x) = -\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = -\alpha\varphi_1(x) - \varphi_2(x)
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1'(y;x) = p^y A' q^x = p^y(\alpha A)q^x = \alpha\varphi_1(y;x)\\
&\varphi_2'(y;x) = p^x B' q^y = p^x B q^y = \varphi_2(y;x)\\
&\varphi_3'(y;x) = -\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = -\alpha\varphi_1(x) - \varphi_2(x)
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Тогда, в соответствии с (2.2) имеем:

$$
\begin{aligned}
&Z_1'(x) = Arg\max_{p^y\in\Delta^m}\varphi_1'(p^y,x) = Z_1(x)\\
&Z_2'(x) = Arg\max_{q^y\in\Delta^n}\varphi_2'(q^y,x) = Z_2(x)\\
&Z_3'(x) = Z_3(x)
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

Таким образом, отображение Z(x) осталось неизменным при данном преобразовании (следовательно множество неподвижных точек тоже не изменилось). Посмотрим теперь как изменились функции Ф(y,x) и U(x).

$$
\begin{aligned}
&\Phi'(y,x) = \varphi_1'(y,x) + \varphi_2'(y,x) + \varphi_3'(y,x) =\\
&= \alpha\varphi_1(y,x) + \varphi_2(y,x) - \alpha\varphi_1(x,x) - \varphi_2(x,x) =\\
&= (\alpha-1)(\varphi_1(y,x) - \varphi_1(x,x)) + \varphi_1(y,x) + \varphi_2(y,x) - \varphi_1(x,x) - \varphi_2(x,x) =\\
&= \Phi(y,x) + (\alpha-1)(\varphi_1(y,x) - \varphi_1(x,x))
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&U'(x) = \Phi'(Z(x),x) =\\
&= \max_{y\in\Omega}\Phi'(y,x) = \max_{p^y\in\Delta^m}\varphi_1'(p^y;x) + \max_{q^y\in\Delta^n}\varphi_2'(q^y;x) - \varphi_3'(x) =\\
&= \alpha\max_{p^y\in\Delta^m}\varphi_1(p^y;x) + \max_{q^y\in\Delta^n}\varphi_2(q^y;x) - \alpha\varphi_1(x) - \varphi_2(x) =\\
&= U(x) + (\alpha-1)\left[\max_{p^y\in\Delta^m}\varphi_1(p^y;x) - \varphi_1(x)\right]
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Как видим, функции Ф(y,x) и U(x) при данном преобразовании изменяются. (Но при этом $Z(x) = Arg\max_{y\in\Omega}\Phi(y,x)$ остается неизменным). Как несложно заметить, для преобразованной игры $<A',B'>$ траектории игрового процесса Брауна-Робинсон будут совпадать с траекториями игрового процесса для игры <A, B>. Таким образом, в силу неизменности основного поля R, из сходимости игрового процесса для игры $<A',B'>$ вытекает сходимость игрового процесса для игры <A, B> (верно и обратное). В то же время, если U(x) не была функцией Ляпунова для поля R=Z-E (и мы не могли дать утвердительного ответа о сходимости), то функция $U'(x) \neq U(x)$ может оказаться функцией Ляпунова (при определенных условиях). Если это так, то поле R является сходящимся.

При каких же условиях $U'(x)$ будет функцией Ляпунова? Очевидно, что для биматричной игры $<A',B'>$ справедливы все рассуждения о сходимости, которые излагались в предыдущих разделах. В частности, применима Теорема 6.2, дающая необходимое и достаточное условие применимости Теоремы 4.1. Сформулируем полученный результат в следующей теореме:

Теорема 7.1. Для биматричной игры <A, B> процесс Брауна сходится, если существуют такие α>0 и β>0, что $C(\alpha,\beta) = \alpha A + \beta B$ является столбцово-строковой матрицей. Более того, для биматричной игры $<\alpha A, \beta B>$ выполняются все условия Теоремы 4.1.

Для того чтобы применять Теорему 7.1 на практике, необходимо решать задачу поиска коэффициентов α>0 и β>0. Покажем, каким образом это делать.

Определение: Матрицы A и B будем называть *балансируемыми*, если существует хотя бы одна такая пара чисел α > 0 и β > 0 для которых $C(\alpha,\beta) = \alpha A + \beta B$ -столбцово-строковая матрица.

Таким образом, процесс Брауна будет сходиться для игры <A, B>, если платежные матрицы A и B - балансируемы.

Лемма 7.1. Если матрицы A и B - балансируемые с коэффициентами α и β, F и D - две произвольных столбцово-строковых матрицы, то матрицы (A+F) и (B+D) балансируемы с теми же коэффициентами α и β.

Доказательство:

$$\alpha(A+F)+\beta(B+D) = (\alpha A+\beta B)+\alpha F+\beta D \qquad (7.9)$$

В (7.9) все три слагаемых — столбцово-строковые матрицы. Поэтому и их сумма является столбцово-строковой матрицей.

Лемма доказана.

Лемма 7.2. Если матрицы A и B - балансируемые с коэффициентами α и β, то:

$$\alpha(a_{11} + a_{ij} - a_{i1} - a_{1j}) + \beta(b_{11} + b_{ij} - b_{i1} - b_{1j}) = 0$$
$$\forall i \in \{1,\dots,m\}, \forall j \in \{1,\dots,n\} \qquad (7.10)$$

Верно и обратное: из (7.10) вытекает балансируемость.

Доказательство:

Из (6.17) вытекает, что для любой столбцово-строковой матрицы C необходимым и достаточным условием является выполнение равенства:

$$c_{ij} + c_{11} = c_{i1} + c_{1j} \forall i \in \{1,\dots,m\} \forall j \in \{1,\dots,n\} \qquad (7.11)$$

Из (7.11) и вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Возьмем в Лемме 7.1 матрицы F и D:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= -(a_{i1} + a_{1j} - a_{11}) \\ d_{ij} &= -(b_{i1} + b_{1j} - b_{11}) \end{aligned} \qquad (7.12)$$

Легко проверить, что F и D-столбцово-строковые.

Обозначим:

$$\begin{aligned} S &= A + F \\ T &= B + D \end{aligned} \qquad (7.13)$$

В силу (7.12)

$s_{i1}=0$ и $s_{1j} = 0$ $\forall i\in\{1,\ldots,m\}$, $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ (7.14)

$t_{i1}=0$ и $t_{1j} = 0$ $\forall i\in\{1,\ldots,m\}$, $\forall j\in\{1,\ldots,n\}$ (7.15)

С учетом (7.14), (7,15) и Леммы 7.2 для балансируемости матриц A и B необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\lambda>0$, чтобы

$$s_{ij} = -\lambda t_{ij}, \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\} \qquad (7.16)$$

При этом, пара матриц A и B - балансируема с коэффициентами $\alpha=1$, $\beta=\lambda$.

Итак, мы получили <u>способ проверки балансируемости матриц</u>: сначала определяются F и D в соответствии с (7.12), затем вычисляем S и T. Если $S=-\lambda T$, то A и B - балансируемы и для них выполняются условия Теоремы 7.1.

Т е о р е м а 7.2. Для биматричной игры <A, B> метод Брауна будет сходится, если для матриц S и T:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= a_{ij} + a_{11} - a_{i1} - a_{1j}, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\} \\ t_{ij} &= b_{ij} + b_{11} - b_{i1} - b_{1j}, \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}, \forall j \in \{1,\ldots,n\} \end{aligned} \qquad (7.17)$$

существует такое $\lambda>0$, что $S+\lambda T=0$ (7.18)

При этом Теорема 4.1 применима для биматричной игры <A, λB>.

Заметим, что прибавление к платежным матрицам A и B столбцово-строковых матриц F и D и домножение платежной матрицы на положительную константу эквивалентно последовательному выполнению следующих действий.

I. Прибавление к элементам строки или столбца некоторой постоянной величины μ.

II. Домножение всех элементов платежной матрицы на постоянную величину $\alpha>0$.

В силу данного замечания, условие сходимости можно переформулировать следующим образом:

Т е о р е м а 7.3. Для биматричной игры <A, B> метод Брауна будет сходится, если в результате последовательного применения преобразований I и II мы сможем получить такие матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, что $\widetilde{A}+\widetilde{B}=0$.

8. Результаты.

Основной результат данной работы с формулирован в теоремах 7.2 и 7.3, которые дают достаточное условие применимости метода Брауна-Робинсон для биматричных игр. При этом для практического использования более удобна Теорема 7.2, которая дает алгоритм проверки сходимости.

Мы получили, что метод Брауна-Робинсон применим для поиска равновесия Нэша в биматричной игре <A, B>, если платежные матрицы можно при помощи уменьшения строк и столбцов на постоянную величину и домножения на положительную константу привести к матрицам $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ с нулевой суммой.

Литература.

1.Беленький В. З. ,Волконский, В. А. ,Иванков С. А. ,Поманский А. Б. , Шапиро А. Д. Итеративные методы в теории игр и программировании, Москва, "Наука", 1974.

2.Vasin, Stability of mixed equilibria in interactions between two populations, Instituto Valenciano de Investigatciones Economicas, 1994.

3.Jordan J.S., Tree problems in learning mixed-strategy Nash equilibria, Games and economic behavior 5, pp.368-386, 1993.

4.Jordan J.S., Bayessian learning in normal form games, Games and economic behavior 3, pp.60-81, 1991.

5.Jordan J.S., The exponential convergence of Beyesian learning in normal form games, Games and economic behavior 4, pp.202-217, 1992.

6.Fudenberg D., Kreps K., "Learning Mixed Equilibria", Games and economic behavior 5, pp.320-367, 1993.

7.Васин А. А. , Самойлова И. А. , Устойчивость точек равновесия эволюционных игровых моделей, 1996.

8.Ильин В. А. , Поздняк Э. Г. , Основы математического анализа, Москва, "Наука", 1975.

9.Jackson Mattew, Kalai Ehud. Sosial learning in recuring games, Discussion Paper No1138, Northwestern University, Department of Managerial Economics and Decision Sciences, 1995.

10.Benaim Micel,.Hirsch Morris W. Learning Processes, Mixed Equilibria and Dynamical Systems arising from Repeated Games, preprint, University of California at Berkely, 1994.

11.Ritzberger Klaus. The theory of normal form games from the differable viewpoint, preprint, Institute for Advanced Studies, Vienna, 1992.

12.Робинсон Дж., Итеративный метод решения игр., сб. "Матричные игры", Физматгиз, Москва, 1961.

13..Данскин Дж. М, Итеративный метод решения непрерывных игр, Сборник "Бесконечные антагонистические игры", Физматгиз, Москва, 1963.

14.Боненбласт Х. Ф. , Шепли Л.С. . Игры с непрерывной выпуклой функцией выигрыша, Сборник "Бесконечные антагонистические игры", Физматгиз, Москва, 1963.

15.Борисова Э.П., Магарик И.В. . О двух модификациях метода Брауна решения матричных игр, Физматгиз, Москва, 1962.

16.Gaunersdorfer Andrea. Fictitious *play,* Shapley polygons, and the Replicator Equation, Games and economic behavior 11, pp.279-303, 1995.