А. Борханифар, А.Г. Волков, В.А. Трофимов

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРЕХЧАСТОТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ В УСЛОВИЯХ ДИСПЕРСИИ ЕЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОТКЛИКА*

1. Введение

Анализ распространения фемтосекундных импульсов в различных средах представляет большой интерес для различных научных и прикладных задач [1-3] в связи с их уникальными свойствами: чрезвычайно короткой длительностью и возможностью достигать напряженность электрического поля, которая на несколько порядков превосходит внутриатомную напряженность электрического поля. Математически нелинейное распространение фемтосекундных импульсов описывается так называемым комбинированным нелинейным уравнением Шредингера (КНУШ). Оно отличается от обычного нелинейного уравнения Шредингера наличием производной по времени от нелинейного отклика среды (дисперсии нелинейного отклика). Присутствие этой производной приводит, в частности, к формированию оптических ударных волн, ограничению максимальной интенсивности при компрессии импульса в среде с керровской нелинейностью [4].

Следует подчеркнуть, что в литературе практически отсутствуют обоснованные разностные схемы для данного круга задач. Это было обусловлено, в частности, отсутствием инвариантов для данного класса задач. Данный пробел недавно был восполнен [4-6], что позволило использовать принцип консервативности [7] для построения разностных схем применительно к данному классу задач. Так в [8-9] проведено сравнение различных подходов для задачи взаимодействия трех импульсов без учета дисперсии второго порядка. В настоящей же работе рассматривается аналогичная [8-9]проблема, но в более общей постановке: учитывается также вторая производная по времени от комплексных амплитуд взаимодействующих импульсов.

2. Основные уравнения

Процесс трехчастотного взаимодействия лазерных импульсов во втором приближении теории дисперсии с учетом дисперсии нелинейного отклика среды описывается следующей системой безразмерных

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-727).

уравнений

$$\frac{\partial A_j}{\partial x}+v_j\frac{\partial A_j}{\partial t}+iD_j\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2}+F_j=0,\ 0<x,\ 0<t<L_t,\ j=1,2,3 \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$A_j\,|_{x=0}=A_{j0}(t), \qquad A_j\,|_{t=0,L_t}=\frac{\partial A_j}{\partial t}\,|_{t=0,L_t}=0, \qquad j=1,2,3. \quad (2)$$

Здесь $A_j(x,t)$ – нормированная на максимальное из взаимодействующих волн значение комплексной амплитуды j – го импульса, распространяющегося вдоль координаты x, t – нормированное на характерную длительность импульса время, D_j – коэффициенты, дисперсионного характеризующие расплывание, $v_j=u_j^{-1}-u_1^{-1}$ – расстройка обратных величин групповых скоростей первой и j – й гармоники, i – мнимая единица, u_j – произведение скорости отдельного импульса на время нормировки. L_t – безразмерный интервал времени, на котором анализируется решение задачи (1).

Вид функций F_j, учитывающих взаимную перекачку энергии волн, для трехчастотного взаимодействия, удовлетворяющих условиям $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ и $\Delta k=k_1+k_2-k_3$, имеют вид

$$F_j=\begin{cases}\gamma_1(A_3A_2^*+\dfrac{1}{\overline{\omega}_1}\dfrac{\partial}{\partial t}(A_3A_2^*))e^{i\Delta kx}, & j=1,\\ \gamma_2(A_3A_1^*+\dfrac{1}{\overline{\omega}_2}\dfrac{\partial}{\partial t}(A_3A_1^*)e^{i\Delta kx}, & j=2,\\ \gamma_3(iA_1A_2+\dfrac{1}{\overline{\omega}_3}\dfrac{\partial}{\partial t}(A_1A_2))e^{-i\Delta kx}, & j=3,\end{cases}$$

где $\overline{\omega}_j$ – произведение удвоенной частоты импульса на характерное время нормировки, $\overline{\omega}_3=\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2$, γ_j – безразмерные коэффициенты нелинейной связи взаимодействующих волн, ω_j, k_j – соответственно частота и волновое число взаимодействующих волн.

3. Преобразование уравнений

В процессе взаимодействия трех волн сохраняется их энергия

$$I(x)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\overline{\omega}_j}{\gamma_j}\int_0^{L_t}\left|A_j\right|^2 d\eta = const\,.$$

Для записи других инвариантов необходимо преобразовать уравнения (1) к более удобному для численного моделирования виду [5]. Для этого введем новые функции по правилу

$$E_j=\int_0^t A_j e^{i\overline{\omega}_j(\eta-t)}d\eta,\quad \text{j=1, 2, 3,}$$

которые также удовлетворяют релаксационным уравнениям

$\dfrac{\partial E_j}{\partial t}+i\overline{\omega}_j E_j=A_j$, j=1, 2, 3. (3) В новых переменных уравнения (1) преобразуются к виду, не содержащему производных по времени от нелинейного отклика,

$$\frac{\partial E_j}{\partial x}+v_j\frac{\partial E_j}{\partial t}+iD_j\frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2}+\overline{F_j}=0,\qquad 0<x,\qquad 0<t<L_t,\qquad j=1,2,3,\qquad (4)$$

а функции $\overline{F_j}$ выглядят следующим образом

$$\overline{F_j}=\begin{cases}\dfrac{\gamma_1}{\overline{\omega}_1}(A_3\,A_2^*\,)e^{i\Delta kx}, & j=1,\\[2ex] \dfrac{\gamma_2}{\overline{\omega}_2}(A_3\,A_1^*)e^{i\Delta kx}, & j=2,\\[2ex] \dfrac{\gamma_3}{\overline{\omega}_3}(A_1A_2)e^{-i\Delta kx}, & j=3.\end{cases}$$

Начальные и граничные условия для новых функций имеют вид

$$E_j\,|_{x=0}=E_{j0}(t),$$

$$E_j\,|_{t=0}=\frac{\partial E_j}{\partial t}\,|_{t=0}=(\frac{\partial E_j}{\partial t}+i\overline{\omega}_j E_j)\,|_{t=L_t}=(\frac{\partial E_j}{\partial x}-i(\overline{\omega}_j^2 D_j+\overline{\omega}_j v_j)E_j)\,|_{t=L_t}=0,\ \ j=1,2,3,$$

при этом начальные распределения функций E_j на входе в нелинейную среду вычисляются, используя формулу (3).

4. Построение разностной схемы

Введем в области $G=\{(x,t):0\le x\le L_x, 0\le t\le L_t\}$ равномерные сетки по x и t

$$\omega_x=\{x_n=nh, n=0,1,...,N_x, h=L_x/N_x\},\ \{t_k=k\tau, k=0,1,...,N_t, \tau=L_t/N_t\},$$
$$\omega=\omega_x\omega_t.$$

Определим сеточные функции A_h, E_h на ω и ведем также следующие безиндексные обозначения

$$A_{jh}=A_{jh}(x_n,t_k),\hat{A}_{jh}=A_{jh}(x_n+h,t_k),(A_{jh})_{\pm l}=A_{jh}(x_n,t_k\pm l\tau),\overset{0.5}{A}_{jh}=0.5(\hat{A}_{jh}+A_{jh}),E_{jh}=E_{jh}(x_n,t_k),$$
$$\hat{E}_{jh}=E_{jh}(x_n+h,t_k),(\hat{E}_{jh})_{\pm l}=E_{jh}(x_n+h,t_k\pm l\tau),(E_{jh})_{\pm l}=E_{jh}(x_n,t_k\pm l\tau),\overset{0.5}{E}_{jh}=0.5(\hat{E}_{jh}+E_{jh}). \qquad (5)$$

В дальнейшем для простоты индекс h у сеточных функций опустим.

Задаче (3),(4) поставим в соответствие следующую нелинейную двухслойную схему, записываемую во внутренних узлах сетки,

$$(\hat{E}_j-E_j)/h+v_j((\overset{0.5}{E}_j)_{+1}-(\overset{0.5}{E}_j)_{-1})/\tau+iD_j((\overset{0.5}{E}_j)_{+1}-2\overset{0.5}{E}_j+(\overset{0.5}{E}_j)_{-1})/\tau^2+\overline{\overline{F_j}}=0, j=1,2,3, \qquad (6)$$

$$\overline{\overline{F_j}}=\begin{cases}\dfrac{\gamma_1}{2\overline{\omega}_1}\overset{0.5}{A}_3\overset{0.5}{A}{}_2^*(e^{i\Delta k(x+h)}+e^{i\Delta kx}), & j=1,\\ \dfrac{\gamma_2}{2\overline{\omega}_2}\overset{0.5}{A}_3\overset{0.5}{A}{}_1^*(e^{i\Delta k(x+h)}+e^{i\Delta kx}), & j=2,\\ \dfrac{\gamma_3}{2\overline{\omega}_3}\overset{0.5}{A}_1\overset{0.5}{A}_2(e^{-i\Delta k(x+h)}+e^{-i\Delta kx}), & j=3.\end{cases}$$

Комплексная амплитуда A_j в этих же точках определяется через функцию E_j из решения следующего сеточного уравнения

$$\overset{0.5}{A}_j=((\overset{0.5}{E}_j)_{+1}-(\overset{0.5}{E}_j)_{-1})/(2\tau)+i\overline{\omega}_j\overset{0.5}{E}_j, \qquad j=1,2,3. \qquad (7)$$

В граничных точках записываются следующие уравнения

$$\overset{0.5}{E}_{j0}=\overset{0.5}{E}_{j1}=0,$$

$$(\hat{E}_{jN_t}-E_{jN_t})/h-i(D_j+v_j/\overline{\omega}_j)((\overset{0.5}{E}_{jN_t}-\overset{0.5}{E}_{jN_t-1})/\tau+i\overline{\omega}_j\overset{0.5}{E}_{jN_t})/\tau=0, \qquad j=1,2,3.$$

Следует подчеркнуть, что только предложенная аппроксимация правого краевого условия гарантирует консервативность построенной схемы.

Так как построенная схема нелинейная, то для ее разрешения будем использовать следующий итерационный процесс

$$(\overset{s+1}{\hat{E}}_j - E_j)/h + v_j((\overset{s+1}{\underset{}{\overset{0.5}{E}}}_j)_{+1} - (\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j)_{-1})/\tau + iD_j((\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j)_{+1} - 2\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j + (\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j)_{-1})/\tau^2 + \overline{\overline{F}}_j = 0, j = 1,2,3, \quad (8)$$

$$\overset{s+1}{\overset{0.5}{A}}_j = ((\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j)_{+1} - (\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j)_{-1})/(2\tau) + i\overline{\omega}_j \overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_j, \qquad j = 1,2,3,$$

$$\overline{\overline{F}}_j = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1}{2\overline{\omega}_1} \overset{s}{\overset{0.5}{A}}_3 \overset{s}{\overset{0.5}{A}}{}^*_2 (e^{i\Delta k(x+h)} + e^{i\Delta kx}), & j = 1, \\ \dfrac{\gamma_2}{2\overline{\omega}_2} \overset{s}{\overset{0.5}{A}}_3 \overset{s}{\overset{0.5}{A}}{}^*_1 (e^{i\Delta k(x+h)} + e^{i\Delta kx}), & j = 2, \\ \dfrac{\gamma_3}{2\overline{\omega}_3} \overset{s}{\overset{0.5}{A}}_1 \overset{s}{\overset{0.5}{A}}_2 (e^{-i\Delta k(x+h)} + e^{-i\Delta kx}), & j = 3. \end{cases}$$

В граничных точках соответственно запишем уравнения

$$\begin{aligned} &\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{j0} = \overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{j1} = 0, \\ &(\overset{s+1}{\hat{E}}_{jN_t} - E_{jN_t})/h - i(D_j + v_j/\overline{\omega}_j)((\overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{jN_t} - \overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{jN_t-1})/\tau + i\overline{\omega}_j \overset{s+1}{\overset{0.5}{E}}_{jN_t})/\tau = 0, \quad j = 1,2,3. \end{aligned} \quad (9)$$

В (8)-(9) s=0,1,2,3… – номер итерации. В качестве начального приближения (значения сеточных функций на верхнем слое на нулевой итерации) берутся значения сеточных функций с предыдущего слоя по продольной координате

$$\overset{s=0}{\hat{A}}_j = A_j, \quad \overset{s=0}{\hat{E}}_j = E_j, \qquad j = 1,2,3.$$

Итерационный процесс прекращается, если выполнены условия

$$\max_{t_k} \left| \overset{s+1}{\hat{E}}_j - E_j \right| < \varepsilon_1 \max_{t_k} \left| \overset{s}{\hat{E}}_j \right| + \varepsilon_2, \qquad \mathrm{j} = 1,2,3,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – положительные числа, например равные 0.001, 0.0001 соответственно.

5. Исследование порядка аппроксимации схемы

Для исследования порядка аппроксимации построенной схемы подставим решение дифференциальной задачи в разностные уравнения (6), (7) и разложим его в ряд Тейлора относительно точки (x+h/2,t). В результате получим, что записанная выше схема обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространственной координате во внутренних узлах сетки. Однако, правое краевое условие в точке L_t аппроксимируется с первым порядком по времени. Это необходимо для достижения консервативности разностной схемы. Таким образом, записанные выше схемы обладают вторым порядком аппроксимации по пространственной координате и первым порядком по времени. Следует подчеркнуть, что рассматриваемые режимы взаимодействия оптического импульса с нелинейной средой анализируются на трассах, вдоль которых импульс не успевает достичь границ временного интервала. Поэтому аппроксимация правого краевого условия с первым порядком на практике не оказывает принципиального влияния на точность решения.

6. Метод решение разностных уравнений

Учитывая, что в литературе практически отсутствует запись решения уравнений, подобных (8), (9), приведем его ниже для случая $\Delta k = 0$, что не ограничивает общности результатов, а лишь сокращает размер соответствующих формул. С этой трехточечные уравнения (8) перепишем в матричном виде. В качестве примера рассмотрим лишь первое уравнение (j=1) . Для краткости введем следующие обозначения

$$a_1 = \frac{v_1 h}{2\tau},\ b_1 = \frac{D_1 h}{2\tau^2},$$

матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ -b_1, & a_1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1\ , & 2b_1 \\ -2b_1, & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -a_1\ , & b_1 \\ -b_1\ , & -a_1 \end{pmatrix},$$

а также вектора

$$Y_{-1} = \begin{pmatrix} (\overset{s+1}{\hat{E}}_{R1})_{-1} \\ (\overset{s+1}{\hat{E}}_{I1})_{-1} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \overset{s+1}{\hat{E}}_{R1} \\ \overset{s+1}{\hat{E}}_{I1} \end{pmatrix}, \qquad Y_{+1} = \begin{pmatrix} (\overset{s+1}{\hat{E}}_{R1})_{+1} \\ (\overset{s+1}{\hat{E}}_{I1})_{+1} \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} F_{R1} \\ F_{I1} \end{pmatrix}.$$

Тогда трехточечные уравнения (8) можно переписать в виде

$$-\mathrm{A}Y_{k-1} + CY_k - BY_{k+1} = F_k, 1 \le k \le N_t - 1, \ (10)$$

где правая часть с учетом выше сделанного выше замечания имеет вид

$$\begin{aligned} F_{R1} &= E_{R1} - a_1((E_{R1})_{+1} - (E_{R1})_{-1}) + b_1((E_{I1})_{+1} - 2E_{I1} + (E_{I1})_{-1}) - \frac{\gamma_1 h}{\bar{\omega}_1}((\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}_{R3})(\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}{}^{*}_{R2}) - (\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}_{I3})(\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}{}^{*}_{I2})), \\ F_{I1} &= E_{I1} - a_1((E_{I1})_{+1} - (E_{I1})_{-1}) - b_1((E_{R1})_{+1} - 2E_{R1} + (E_{R1})_{-1}) - \frac{\gamma_1 h}{\bar{\omega}_1}((\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}_{R3})(\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}{}^{*}_{I2}) + (\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}{}^{*}_{R2})(\overset{s}{\overset{0.5}{\hat{A}}}_{I3})). \end{aligned} \qquad (11)$$

В граничных точках $k=0,N_t$ задаются соответственно следующие уравнения

$$Y_0=F_0,\quad -\hat{A}Y_{N_t-1}+\hat{C}Y_{N_t}=F_{N_t},$$

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & ,\ b_1+\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1}\\ -b_1-\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1}, & 0\end{pmatrix},\ \hat{C}=\begin{pmatrix}1+a_1+b_1\tau\bar{\omega}_1 & ,\ b_1+\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1}\\ -b_1-\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1} & ,1+a_1+b_1\tau\bar{\omega}_1\end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$F_0=0,\ F_{N_t}=\begin{pmatrix}(1-a_1-b_1\tau\bar{\omega})(E_{R1})_{N_t}-(b_1+\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1})((E_{I1})_{N_t}+(b_1+\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1})(E_{I1})_{N_t-1})\\ (b_1+\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1})((E_{R1})_{N_t}+(1-a_1-b_1\tau\bar{\omega})(E_{I1})_{N_t}-(b_1+\dfrac{2a_1}{\tau\bar{\omega}_1})(E_{R1})_{N_t-1})\end{pmatrix}.$$

Решение задачи (12) будем искать в виде [7]

$$Y_k=\alpha_{k+1}Y_{k+1}+\beta_{k+1},k=N_t-1,N_t-2,...,0, \qquad (13)$$

где α_{k+1} – матрица размером 2×2

$$\alpha_{k+1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{(k+1)},\alpha_{12}^{(k+1)}\\ \alpha_{21}^{(k+1)},\alpha_{22}^{(k+1)}\end{pmatrix},$$

а β_{k+1} – вектор размерности 2

$$\beta_{k+1}=\begin{pmatrix}\beta_1^{(k+1)}\\ \beta_2^{(k+1)}\end{pmatrix}.$$

Они вычисляются через рекуррентные соотношения

$$\alpha_{k+1}=(C-A\alpha_k)^{-1}B,\beta_{k+1}=(C-A\alpha_k)^{-1}(F_k+A\beta_k),k=1,2,...,N_t-1. \qquad (14)$$

Значения матрицы α_1 и вектора β_1 определяются левым краевым условием, и они имеют вид

$$\alpha_1=C^{-1}B=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{(1)},\alpha_{12}^{(1)}\\ \alpha_{21}^{(1)},\alpha_{22}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,0\\ 0,0\end{pmatrix},\beta_1=C^{-1}F_0=\begin{pmatrix}\beta_1^{(1)}\\ \beta_2^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что дальнейший анализ показывает справедливость следующего соотношения $\alpha_{11}^{(k)}=\alpha_{22}^{(k)},\alpha_{21}^{(k)}=-\alpha_{12}^{(k)}$. Поэтому для вычисления α - коэффициентов достаточно записать выражения только для двух из них

$$\alpha_{11}^{(k+1)}=\alpha_{22}^{(k+1)}=\frac{(|C|+a_1^2-b_1^2)\alpha_{11}^{(k)}-2a_1b_1\alpha_{12}^{(k)}}{(1-a_1\alpha_{11}^{(k)}+b_1\alpha_{12}^{(k)})^2+(2b_1-a_1\alpha_{12}^{(k)}-b_1\alpha_{11}^{(k)})^2},$$

$$\alpha_{12}^{(k+1)}=\alpha_{21}^{(k+1)}=\frac{(|C|+b_1^2-a_1^2)\alpha_{12}^{(k)}-2a_1b_1\alpha_{11}^{(k)}}{(1-a_1\alpha_{11}^{(k)}+b_1\alpha_{12}^{(k)})^2+(2b_1-a_1\alpha_{12}^{(k)}-b_1\alpha_{11}^{(k)})^2},\; k=2,\ldots,N_t-1, \tag{15}$$

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{(2)},\alpha_{12}^{(2)}\\ \alpha_{21}^{(2)},\alpha_{22}^{(2)}\end{pmatrix}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}-a_1+2b_1^2, & \mathrm{b}_1+2a_1b_1\\ -\mathrm{b}_1-2a_1b_1, & -a_1+2b_1^2\end{pmatrix}, |C|=1+4b_1^2$$

и

$$\beta_1^{(k+1)}=\frac{(1-a_1\alpha_{11}^{(k)}+b_1\alpha_{12}^{(k)})(F_{R1}+a_1\beta_1^{(k)}+b_1\beta_2^{(k)})+(-2b_1+a_1\alpha_{12}^{(k)}+b_1\alpha_{11}^{(k)})(F_{I1}-b_1\beta_1^{(k)}+a_1\beta_2^{(k)})}{(1-a_1\alpha_{11}^{(k)}+b_1\alpha_{12}^{(k)})^2+(2b_1-a_1\alpha_{12}^{(k)}-b_1\alpha_{11}^{(k)})^2},$$

$$\beta_2^{(k+1)}=\frac{(1-a_1\alpha_{11}^{(k)}+b_1\alpha_{12}^{(k)})(F_{I1}-b_1\beta_1^{(k)}+a_1\beta_2^{(k)})-(-2b_1+a_1\alpha_{12}^{(k)}+b_1\alpha_{11}^{(k)})(F_{R1}+a_1\beta_1^{(k)}+b_1\beta_2^{(k)})}{(1-a_1\alpha_{11}^{(k)}+b_1\alpha_{12}^{(k)})^2+(2b_1-a_1\alpha_{12}^{(k)}-b_1\alpha_{11}^{(k)})^2},$$

$$k=2,\ldots,N_t-1,\;\; \beta_2=\begin{pmatrix}\beta_1^{(2)}\\ \beta_2^{(2)}\end{pmatrix}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}F_{R1}-2b_1F_{I1}\\ 2b_1F_{R1}+F_{I1}\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Подставим теперь (15) и (16) в (13) и используем введенные обозначения для Y_k. В результате получим следующие формулы для вычисления компонент функции E_1 на верхнем слое:

$$(\overset{s+1}{\hat{E}}_{R1})_k=\alpha_{11}^{(k+1)}(\overset{s+1}{\hat{E}}_{R1})_{k+1}+\alpha_{12}^{(k+1)}(\overset{s+1}{\hat{E}}_{I1})_{k+1}+\beta_1^{(k+1)}, \qquad \mathrm{k}=N_t-1,\ldots,1,$$

$$(\overset{s+1}{\hat{E}}_{I1})_k=\alpha_{21}^{(k+1)}(\overset{s+1}{\hat{E}}_{R1})_{k+1}+\alpha_{22}^{(k+1)}(\overset{s+1}{\hat{E}}_{I1})_{k+1}+\beta_2^{(k+1)}, \tag{17}$$

$$(\overset{s+1}{\hat{E}}_{R1})_{N_t}=\frac{(p+q\alpha_{12}^{(N_t)})(F_{R1})_{N_t}+q(1-\alpha_{11}^{(N_t)})(F_{I1})_{N_t}+q^2(1-\alpha_{11}^{(N_t)})\beta_1^{(N_t)}+(pq+q^2\alpha_{12}^{(N_t)})\beta_2^{(N_t)}}{(p+q\alpha_{12}^{(N_t)})^2+q^2(1-\alpha_{11}^{(N_t)})^2},$$

$$(\overset{s+1}{\hat{E}}_{I1})_{N_t}=\frac{-q(1-\alpha_{11}^{(N_t)})(F_{R1})_{N_t}+(p+q\alpha_{12}^{(N_t)})(F_{I1})_{N_t}+q^2(1-\alpha_{11}^{(N_t)})\beta_2^{(N_t)}-(pq+q^2\alpha_{12}^{(N_t)})\beta_1^{(N_t)}}{(p+q\alpha_{12}^{(N_t)})^2+q^2(1-\alpha_{11}^{(N_t)})^2},$$

$$p=1+a_1+\mathrm{b}_1\tau\overline{\omega}_1\;,\; q=b_1+\frac{2a_1}{\tau\overline{\omega}}.$$

Аналогичные выражения справедливы для функций E_2, E_3.

7. Выводы

Таким образом, в настоящей работе предложена консервативная разностная схема для системы трех комбинированных нелинейных уравнений Шредингера, описывающих взаимодействие трех фемтосекундных импульсов в среде с квадратичной нелинейностью с учетом производной по времени от нелинейного отклика среды. Для ее реализации записан метод простой итерации в сочетании с алгоритмом матричной прогонки для решения соответствующей системы трехточечных уравнений.

Литература

1. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
2. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир,1996.
3. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.
4. Trofimov V.A., Volkov A.G., Varentsova S.A. Influence of dispersion of nonlinear response on self-focusing of femtosecond pulse propagation in optical fiber. In “Laser Physics and Photonics, Spectroscopy and Modeling II”/ Eds. Derbov V.L. et. al. // Proceeding of SPIE. 2002. V. 4706. P. 88-97.
5. Варенцова С.А., Трофимов В.А. Инварианты нелинейного взаимодействия фемтосекундных лазерных импульсов с учетом дисперсии третьего порядка. // ЖВМ и МФ. 2002. Т.42. N5. С. 709-715.
6. Трофимов В.А ЖВМ и МФ. О новом подходе к моделированию нелинейного распространения сверхкоротких лазерных импульсов. // 1998. Т.38. N5. С. 835-839.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. Борханифар А., Трофимов В.А. Сравнение эффективности различных подходов к компьютерному моделированию нелинейного взаимодействия трех фемтосекундных импульсов в оптическом волокне. // Вестник московского университета. Серия вычислительная математика и кибернетика. 2004. N2.
9. Trofimov V.A., Borhanifar A. Conservative difference schemes for three waves interaction of femtosecond pulses in optical fiber. // Mathematical Modeling and Analysis. Trokai, Lituania, 2003. P. 76.