

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Введение

Методы математической физики в настоящее время активно используются в обработке изображений. Одним из важных направлений приложений методов математической физики является диффузионная фильтрация изображений. Методы диффузионной фильтрации основаны на решении начально-краевой задачи для уравнения диффузии, в которой начальным условием является функция представляющая фильтруемое изображение. Результатом работы такого фильтра является решение начально-краевой задачи $u(x, y, t)$, взятое в некоторый фиксированный момент времени $t = T$. Разнообразие существующих методов диффузионной фильтрации изображений определяется многообразием способов выбора коэффициента диффузии [1]. В тех случаях, когда коэффициент диффузии зависит от решения $u(x, y, t)$, получаются адаптивные алгоритмы фильтрации изображений [1-3]. В работе [2] был предложен новый вариант метода диффузионной фильтрации, ориентированный на повышение эффективности удаления шума с изображений за счет введения в коэффициент диффузии зависимости от локальной интенсивности изображения. Данная работа посвящена анализу разностного метода решения начально-краевой задачи, соответствующей предложенному в [2] методу диффузионной фильтрации, вопросам его численной реализации и анализу эффективности работы этого метода на модельных и практических изображениях.

Метод диффузионной фильтрации

Пусть в прямоугольной области $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ определена функция $f \in C^2(\bar{\Omega})$, задающая монохромное изображение. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения диффузии:

$$u_t = \text{div}(g(x, y, t; u)\nabla u), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t > 0, \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

где коэффициент диффузии $g(x, y, t; u)$ определяется следующим образом:

$$g(x, y, t; u) = \left(1 + \lambda^2 |\nabla f|^2 \int_{O(x, y)} \bar{u}(s, p, t) dsdp \right)^{-1/2}, \quad (\lambda > 0);$$

$$\bar{u}(s, p, t) = \begin{cases} u(s, p, t) & (s, p) \in \bar{\Omega} \\ 0 & (s, p) \notin \bar{\Omega} \end{cases}$$
(4)

а область интегрирования $O(x, y)$, представляет собой квадрат с центром в точке (x, y) и стороной $2h$. Начально-краевая задача (1)-(3) определяет метод диффузионной фильтрации изображений, в котором функция $f(x, y)$, представляющая исходное фильтруемое изображение, является начальным условием.

В настоящее время для ослабления шума на изображении, как правило, используют линейный гауссовский фильтр, либо адаптивный алгоритм, в котором коэффициент диффузии зависит от модуля градиента исходного изображения [3]. Введение в коэффициент диффузии (4) зависимости от интеграла текущего решения мотивировано тем, что скорость размытия прямо пропорциональна величине значения коэффициента, и если суммарная интенсивность изображения в некоторой фиксированной окрестности точки мала, то эта точка вероятнее всего является шумом, и должна размываться. Если же суммарная интенсивность велика, то считаем точку принадлежащей объекту, размытия которого мы пытаемся избежать. Введение в коэффициент диффузии зависимости от интеграла решения по локальной области позволяет уменьшить степень размытия полезных объектов и ускорить фильтрацию шума.

Численный метод решения задачи

Рассмотрим численный метод решения задачи (1)-(3). Введем в $[0, a] \times [0, b] \times [0, T]$ равномерную сетку с шагом h по пространственным переменным и τ по времени

$$\omega_{hh} = \{x_i = ih, y_j = jh\}, \quad i = 0..N, j = 0..M;$$

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau\}, \quad n = 0..K;$$

$$\omega_{hh\tau} = \omega_{hh} \times \omega_\tau =$$

$$= \{x_i = ih, y_j = jh, t_n = n\tau\}, \quad i = 0..N, j = 0..M, n = 0..K.$$
(5)

Пусть решение задачи (1)–(3) $u \in C^{4,1}([0, a] \times [0, b] \times [0, T])$. Рассмотрим значения $u(x, y, t)$ на сетке $\omega_{h\tau}$

$$u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n) \quad (6)$$

и построим разностную аппроксимацию коэффициента диффузии (4). Для двукратного интеграла построим на квадрате $[-h, h] \times [-h, h]$ кубатурную формулу второго порядка аппроксимации, воспользовавшись формулой трапеций [4]

$$\int_{O(x,y)} u(s, p, t) dsdp = \frac{h^2}{9} \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 C_k C_l u_{i+k-1, j+l-1}^n + O(h^2), \quad (7)$$

$$C_0 = 1, C_1 = 4, C_2 = 1.$$

Заменив производные, входящие в градиент ∇f , разностными отношениями, получим для коэффициента диффузии (4) следующее представление:

$$g_{i,j}^n = g(x_i, y_j, t_n; u^n) =$$

$$= \left[1 + \lambda^2 \frac{\left(\left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \right)^2 + \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h} + O(h^2) \right)^2 \right)^{-1/2}}{\left(\frac{h^2}{9} \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 C_k C_l u_{i+k-1, j+l-1}^n + O(h^2) \right)^{-1}} \right] = \quad (8)$$

$$= \left[1 + \lambda^2 \frac{\left(\left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h} \right)^2 \right)^{-1/2}}{\left(\frac{h^2}{9} \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 C_k C_l u_{i+k-1, j+l-1}^n \right)} \right] + O(h^2),$$

где $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$.

Разностный аналог уравнения (1) запишем, используя консервативную разностную схему [5], взяв значения решения, входящие в коэффициент диффузии, на предыдущем слое:

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\tau} = \\ & = \frac{1}{h} \left(\left(\frac{k_{i+1,j}^n + k_{i,j}^n}{2} \right) \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{h} - \left(\frac{k_{i,j}^n + k_{i-1,j}^n}{2} \right) \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{h} \right) + \\ & + \frac{1}{h} \left(\left(\frac{k_{i,j+1}^n + k_{i,j}^n}{2} \right) \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{h} - \left(\frac{k_{i,j}^n + k_{i,j-1}^n}{2} \right) \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{h} \right), \end{aligned} \quad \begin{array}{l} i = 1..N-1, \\ j = 1..M-1, \\ n = 1..K \end{array} \quad (9)$$

где

$$k_{i,j}^n = \left(1 + \frac{\lambda^2}{4h^2} \left((f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2 + (f_{i,j+1} - f_{i,j-1})^2 \right) \left(\frac{h^2}{9} \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 C_k C_l v_{i+k-1,j+l-1}^n \right) \right)^{-1/2} \quad (10)$$

Граничные условия (2) аппроксимируем следующим образом

$$\begin{aligned} v_{i,0}^n &= v_{i,M}^n = 0 \quad i = 1..N-1; \\ v_{0,j}^n &= v_{N,j}^n = 0 \quad j = 0..M, \end{aligned} \quad (11)$$

а начальные условия (3)

$$v_{i,j}^n = f_{i,j}, \quad i = 0..N, j = 0..M. \quad (12)$$

Обозначим $L_n(v_{i,j}^n)$ правую часть уравнения (9) и рассмотрим разность

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_n(u_{i,j}^n). \quad (13)$$

Заменяем разностную производную по времени, используя разложение функции u в ряд Тейлора в точке t_{n+1} , и, учитывая (8), получим

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_h(u_{i,j}^n) = (u_{i,j})^{n+1} + O(\tau) - \\ & - \frac{1}{h} \left(\left(\frac{g_{i+1,j}^n + g_{i,j}^n}{2} + O(h^2) \right) \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h} - \left(\frac{g_{i,j}^n + g_{i-1,j}^n}{2} + O(h^2) \right) \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h} \right) - \\ & - \frac{1}{h} \left(\left(\frac{g_{i,j+1}^n + g_{i,j}^n}{2} + O(h^2) \right) \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h} - \left(\frac{g_{i,j}^n + g_{i,j-1}^n}{2} + O(h^2) \right) \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Раскроем скобки и, с учетом ограниченности функции u , (12) переписется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_h(u_{i,j}^n) = (u_{i,j})^{n+1} + O(\tau) + O(h^2) - \\ & - \frac{g_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^{n+1} - g_{i+1,j}^n u_{i,j}^{n+1} + g_{i,j}^n u_{i+1,j}^{n+1} - g_{i,j}^n u_{i,j}^{n+1}}{2h^2} + \\ & + \frac{g_{i,j}^n u_{i,j}^{n+1} - g_{i,j}^n u_{i-1,j}^{n+1} + g_{i-1,j}^n u_{i,j}^{n+1} - g_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^{n+1}}{2h^2} - \\ & - \frac{g_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^{n+1} - g_{i,j+1}^n u_{i,j}^{n+1} + g_{i,j}^n u_{i,j+1}^{n+1} - g_{i,j}^n u_{i,j}^{n+1}}{2h^2} + \\ & + \frac{g_{i,j}^n u_{i,j}^{n+1} - g_{i,j}^n u_{i,j-1}^{n+1} + g_{i,j-1}^n u_{i,j}^{n+1} - g_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^{n+1}}{2h^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Перегруппируем слагаемые и заменим левую и правую разностные производные функции u на непрерывные аналоги

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_h(u_{i,j}^n) = (u_{i,j})^{n+1} + O(\tau) - \\ & - \left(\frac{(g_{i+1,j}^n - g_{i-1,j}^n)(u_x)_{i,j}^{n+1} + O(h)}{2h} + \frac{g_{i,j}^n (u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1})}{2h^2} + O(h^2) \right) - \\ & - \left(\frac{(g_{i,j+1}^n - g_{i,j-1}^n)(u_y)_{i,j}^{n+1} + O(h)}{2h} + \frac{g_{i,j}^n (u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1})}{2h^2} + O(h^2) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом аппроксимации разностных отношений и ограниченности функций g , u_x и u_y получим

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_h(u_{i,j}^n) = \\ & = (u_t)_{i,j}^{n+1} + O(\tau) - \left((g_x)_{i,j}^n (u_x)_{i,j}^{n+1} + g_{i,j}^n (u_{xx})_{i,j}^{n+1} + O(h^2) \right) - \\ & - \left((g_y)_{i,j}^n (u_y)_{i,j}^{n+1} + g_{i,j}^n (u_{yy})_{i,j}^{n+1} + O(h^2) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_h(u_{i,j}^n) = (u_t - \operatorname{div}(g \nabla u))_{i,j}^{n+1} + O(h^2 + \tau). \quad (18)$$

Учитывая то, что u является решением уравнения (1), имеем

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} - L_h(u_{i,j}^n) = O(h^2 + \tau), \quad (19)$$

что и означает аппроксимацию исходного уравнения (1) разностным (9) с порядком $h^2 + \tau$. Данная разностная схема является неявной и линейной относительно $v_{i,j}^{n+1}$. Решение задачи (9)–(12) находится методом матричной прогонки.

Анализ вычислительного эксперимента

Проанализируем результаты фильтрации изображений методом, задаваемым задачей (1)–(3). Для этого мы используем специальное модельное изображение и реальное изображение, шумы на котором появились как побочный эффект обработки алгоритмом сжатия. В качестве альтернативного метода фильтрации выберем линейный гауссовский фильтр [1], как наиболее часто используемый в приложениях.

Область расчета интеграла $O(x, y)$ выбиралась как квадрат 3×3 пикселя. Параметр λ полагался равным 0,1. Корректность сравнения методов достигалась тем, что время фильтрации, являющееся основным параметром методов, выбиралось следующим образом. На оригинале выбирается область G свободная от полезных объектов, в которой расположено множество шумов, которые необходимо удалить. Выполняется подсчет суммарного значения модуля градиента в выбранной области (объем шума).

$$V(t) = \int_G |\nabla u(x, y, t)| dx. \quad (20)$$

Устанавливается значение желаемого уровня объема шума \bar{V} . Процесс диффузии продолжается до тех пор, пока объем шума в выбранной области на фильтруемом изображении не снизится до требуемого значения.

$$V(\bar{t}) = \bar{V}. \quad (21)$$

Как результат фильтрации выбирается решение задачи (1)–(3), взятое в момент времени \bar{t} . В качестве основного свойства данного метода диффузионной фильтрации необходимо отметить способность удалять высококонтрастный шум, при этом сохраняя границы полезных объектов. Это демонстрируют результаты расчетов на модельных изображениях.

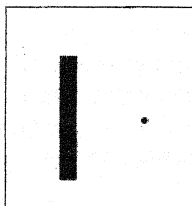


Рис. 1 Оригинальное модельное изображение

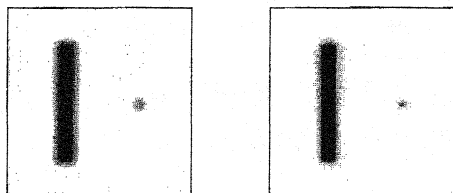


Рис. 2 Гауссовский фильтр (слева) и фильтр, задаваемый задачей (1)–(3) (справа). $\bar{V} = 2000$.

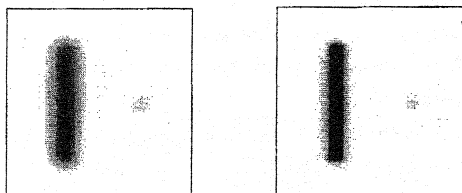


Рис. 3 Гауссовский фильтр (слева) и фильтр, задаваемый задачей (1)–(3) (справа). $\bar{V} = 1000$.

На рисунке 1 располагается исходное модельное изображение. Толстая вертикальная черта моделирует полезный объект, а точка – высококонтрастный шум. На рисунке 2 представлены изображения, отфильтрованные двумя сравниваемыми фильтрами в моменты времени, когда «объем» шума в некоторой фиксированной области G , представляющей собой прямоугольник, обрамляющий точку, на каждом изображении установился равным $\bar{V} = 2000$. Слева расположен результат фильтрации линейным гауссовским фильтром, а справа изображение, полученное с использованием модифицированного фильтра. Четко различима разница между результатами фильтрации. Фильтр, задаваемый задачей (1)–(3), сохранил границы полезного объекта значительно более адекватно, по сравнению с фильтром Гаусса. С течением времени в моменты, когда «объем» шума на обоих изображениях стал равным $\bar{V} = 1000$, различие становится все более очевидным. Рисунок 3 демонстрирует, что модифицированный фильтр сохранил границы полезного объекта достаточно хорошо, а гауссовский фильтр их практически полностью размыл.

Аналогичный эффект можно наблюдать и на реальных изображениях. На рисунке 4 представлено оригинальное изображение. Прямоугольником отмечена область G , в которой ведется подсчет величины «объема шума», используемой в критерии останова.

$$\begin{aligned}
 s_1(t) + s_2(t) &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos [\Phi_1(t) + \Delta(t)] = \\
 &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Delta(t) \cos \Phi_1(t) - \\
 &- A_2 \sin \Delta(t) \sin \Phi_1(t) = [A_1 + A_2 \cos \Delta(t)] \cos \Phi_1(t) - \\
 &- A_2 \sin \Delta(t) \sin \Phi_1(t) = \\
 &= \sqrt{[A_1 + A_2 \cos \Delta(t)]^2 + A_2^2 \sin^2 \Delta(t)} \cos [\Phi_1(t) + \Psi(t)], \\
 \text{где } \Psi(t) &= \arctg \frac{-A_2 \sin \Delta(t)}{A_1 + A_2 \cos \Delta(t)}.
 \end{aligned}$$

Рис.4 Оригинальное изображение

$$\begin{aligned}
 s_1(t) + s_2(t) &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos [\Phi_1(t) + \Delta(t)] = \\
 &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Delta(t) \cos \Phi_1(t) - \\
 &- A_2 \sin \Delta(t) \sin \Phi_1(t) = [A_1 + A_2 \cos \Delta(t)] \cos \Phi_1(t) - \\
 &- A_2 \sin \Delta(t) \sin \Phi_1(t) = \\
 &= \sqrt{[A_1 + A_2 \cos \Delta(t)]^2 + A_2^2 \sin^2 \Delta(t)} \cos [\Phi_1(t) + \Psi(t)], \\
 \text{где } \Psi(t) &= \arctg \frac{-A_2 \sin \Delta(t)}{A_1 + A_2 \cos \Delta(t)}.
 \end{aligned}$$

Рис.5 Гауссовский фильтр $\bar{V} = 50000$

$$\begin{aligned}
s_1(t) + s_2(t) &= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos [\Phi_1(t) + \Delta(t)] = \\
&= A_1 \cos \Phi_1(t) + A_2 \cos \Delta(t) \cos \Phi_1(t) - \\
&- A_2 \sin \Delta(t) \sin \Phi_1(t) = [A_1 + A_2 \cos \Delta(t)] \cos \Phi_1(t) - \\
&- A_2 \sin \Delta(t) \sin \Phi_1(t) = \\
&= \sqrt{[A_1 + A_2 \cos \Delta(t)]^2 + A_2^2 \sin^2 \Delta(t)} \cos [\Phi_1(t) + \Psi(t)], \\
\text{где } \Psi(t) &= \arctg \frac{-A_2 \sin \Delta(t)}{A_1 + A_2 \cos \Delta(t)}.
\end{aligned}$$

Рис.6 Фильтр, задаваемый задачей (1)–(3). $\bar{V} = 50000$.

На рисунке 5 представлены результаты работы гауссовского фильтра. В то время как на изображении осталось достаточное количество шума, информация о полезных объектах существенно повреждена. Рисунок 6 демонстрирует результаты работы модифицированного фильтра, задаваемого задачей (1)–(3) в момент времени, когда «объем шума» стал равным объему шума, достигнутому в области G для изображения на рисунке 5.

Хорошо видно, что полезные объекты изменены в значительно меньшей степени. Наибольшее отличие в эффективности заметно на левом нижнем углу изображения, где предложенный нами фильтр отработал наиболее четко. Тем не менее, часть мелких полезных объектов, таких, например, как точки над «i», была отнесена фильтром к категории шума и повреждена в большей степени. Также часть крупных шумовых пятен, которые, несмотря на размеры, необходимо удалить, была отнесена к полезным объектам и сохранилась в отфильтрованном изображении.

Рассмотренные результаты расчетов позволяют говорить об обоснованности применения предложенного в [2] метода диффузионной фильтрации изображений для эффективного удаления шума. Данный метод обладает большей вычислительной сложностью по сравнению с гауссовским фильтром, однако обладает рядом преимуществ, в особенности при фильтрации изображений с высококонтрастным шумом.

Литература

1. Weickert, J., A review of nonlinear diffusion filtering. Lecture Notes in Computer Science; Vol. 1252, 1997. Pages: 3 - 28
2. Г.В.Борисенко, А.М.Денисов, А.С.Крылов. Об одном методе диффузионной фильтрации изображений. Программирование, 2004, №5, с. 43-47.
3. Perona, P., Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12, 1990, pp. 629-639.
4. Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов. Вестник МГУ: Сер.математики, физики, астрономии.1959.№4,с.3-18.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.:Научный мир, 2000, 316 с.