Е.В. Чернокожин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА НЕРАССЕИВАЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Введение

Проблема обеспечения невидимости в радиодиапазоне представляет как теоретический, так и практический интерес [1, 2]. Основные достижения в этой области связаны с приданием телам специфической формы и использованием поглощающих и интерференционных покрытий, что позволяет на несколько порядков уменьшить эффективную площадь рассеяния. Чаще всего решается задача максимального ослабления обратного рассеяния без учета рассеяния в других направлениях. Идеальным объектом в этом смысле является «черное», т.е. неотражающее тело. Однако при достаточно высоких частотах черное тело является хорошим рассеивателем вперед и поэтому хорошо видимо «на просвет» [3]. Альтернативой черному телу является «прозрачное» тело, которое характеризуется полным (в идеальном случае) или почти полным отсутствием рассеянного электромагнитного поля независимо от направления рассеяния.

Задача синтеза прозрачного тела формулируется следующим образом [4]: без изменения формы и размеров тела, а также без существенного изменения характера его внешней поверхности требуется модифицировать внутреннее заполнение тела так, чтобы энергия $W_{мод}$ поля, рассеиваемого модифицированным телом, была в заданное число раз меньше энергии W_0 поля, рассеиваемого исходным телом. Степень прозрачности тела характеризуется коэффициентом ослабления K, определяемым как $K = 10\lg(W_{мод}/W_0)$ [дБ]. В частных случаях можно говорить о прозрачности по отношению к определенному типу падающего поля (например, плоские волны ограниченного частотного диапазона, определенного направления, поляризации и т.п.).

В данной работе решается задача синтеза цилиндрической структуры, прозрачной по отношению к *TE*-поляризованной плоской волне, падающей перпендикулярно оси структуры. Исходным телом является идеально проводящий круговой цилиндр, а требуемый эффект достигается за счет выбора подходящей системы резонаторов внутри цилиндра и системы узких продольных щелей в цилиндрической поверхности для связи резонаторов с внешним пространством. Рассмотрение проводится на основе результатов строгой математической теории дифракции на проводящих тонких экранах [5].

1. Постановка задачи

Рассмотрим находящуюся в свободном пространстве цилиндрическую структуру (рис. 1), ограниченную идеально проводящим бесконечно тонким цилиндрическим экраном радиусом R с N одинаковыми продольными щелями угловой ширины $2l$, расположенными с равным угловым шагом $2\pi/N$. Число N будем называть порядком структуры, предполагая его четным, но не кратным четырем (случай N, кратного четырем, отличается лишь незначительным изменением в выкладках).

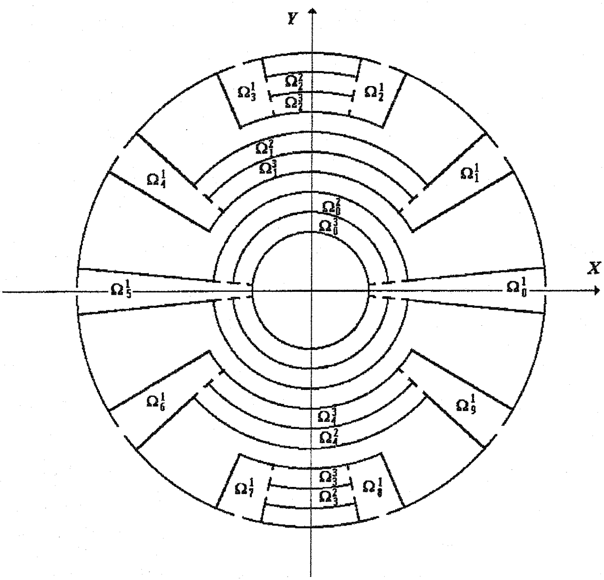

Рис. 1. Поперечное сечение синтезируемой структуры при $N = 10$

Введем декартову систему координат (x, y, z) и цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) следующим образом: общая ось z совпадает с осью структуры, ось x проходит через середину одной из щелей, а угол ϕ отсчитывается от оси x в положительном направлении. Тогда щели можно задать в виде множеств $S_j^1 = \{(r,\phi,z) : r = R;\ p_j - l < \phi < p_j + l\}$, где $p_j = \dfrac{2\pi j}{N}$, $j = 0,1,2,\ldots,N-1$.

Щели, расположенные симметрично относительно оси OY, будем называть сопряженными, а номер щели, сопряженной к j-й будем обозначать через j^*. Тогда

$$j^* = \begin{cases} N/2 - j, & j \le N/2, \\ 3N/2 - j, & j > N/2. \end{cases}$$

Очевидно, $(j^*)^* = j$.

Предположим также, что каждая пара (j, j^*) сопряженных щелей связывает внешнее пространство с отдельным резонатором, структура которого будет определена ниже. Таким образом, внутренность цилиндра можно условно разбить на $N/2$ слоев, каждый из которых содержит один резонатор и две сопряженные щели, связывающие резонатор с внешним пространством. Слои нумеруются следующим образом: номер n слоя, соответствующего паре (j, j^*) определяется как

$$n(j, j^*) = \begin{cases} \min(j, j^*), & j \le N/2, \\ \max(j, j^*) - N/2, & j > N/2. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$\Omega_j^1 = \{(r,\phi,z) : \rho_j < r < R;\ p_j - d_j/2 < \phi < p_j + d_j/2\}$,

$\Omega_j^n = \{(r,\phi,z) : R_{n,j} - h_j/2 < r < R_{n,j} + h_j/2; (\pi - T_j)/2 < \phi < (\pi + T_j)/2\}$,

$S_j^{n\mp} = \{(r,\phi,z) : R_{n,j} - w < r < R_{n,j} + w; \phi = (\pi \mp T_j)/2\}$, $n = 2,3$

(при этом предполагается, что $p_j \pm d_j/2 = (\pi \mp T_j)/2$).

Множества Ω_j^n $(n = 1,2,3)$ представляют собой цилиндрические кольцевые секторы, а множества $S_j^{n\pm}$ соответствуют щелям в их боковых границах.

Резонатор j-го слоя при $j \le [N/4]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа, состоит из двух одинаковых цилиндрических кольцевых секторов Ω_j^1 и $\Omega_{j^*}^1$, связанных между собой посредством примыкающих к ним секторов Ω_j^2 и Ω_j^3 через щели S_j^{2-}, S_j^{2+}, S_j^{3-} и S_j^{3+} (рис. 2). При $j > [N/4]$ резонатор j-го слоя состоит из секторов $\Omega_{j+N/2}^1$ и $\Omega_{(j+N/2)^*}^1$, связанных посредством секторов Ω_j^2 и Ω_j^3 через щели S_j^{2+}, S_j^{2-}, S_j^{3+} и S_j^{3-}.

Стенки всех секторов считаем идеально проводящими и бесконечно тонкими, а их заполнение — однородным, изотропным, диэлектрическим и немагнитным. Диэлектрическую проницаемость заполнения всех секторов Ω_j^1 и $\Omega_j^{1,*}$ независимо от j считаем равной ε_1. Диэлектрические проницаемости заполнения областей Ω_j^2 и Ω_j^3 обозначим соответственно через $\varepsilon_{2,j}$ и $\varepsilon_{3,j}$. Заполнение областей, симметричных относительно оси OX, считаем одинаковым.

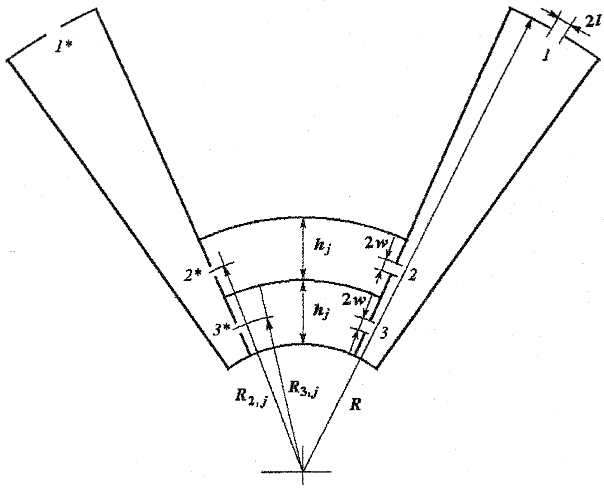

Рис. 2. Примерная структура используемых резонаторов

Пусть на рассматриваемую структуру перпендикулярно ее оси падает плоская *TE*-поляризованная волна, определяемая магнитной компонентой

$$H_z^{пад}(x,y,z) = Ae^{-ik_0(x\cos\theta + y\sin\theta)}, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}.$$

В дальнейшем достаточно рассматривать плоскую задачу, опуская зависимость от z во всех обозначениях.

Представим вторичное поле $H_z^{вт}$ области $\Omega^0 = \{(r,\phi): r > R\}$ вне цилиндра в виде суммы

$$H_z^{вт} = H_z^0 + H_z^{рас}, \tag{1}$$

где $H_z^{рас}$ – поле, рассеянное сплошным идеально проводящим цилиндром, а H_z^0 – возмущение, вызванное наличием щелей.

Поле $H_z^{рас}$ известно [6]. Его диаграмма направленности есть

$$\Phi^{рас}(\phi) = -2Ae^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\delta_n J_n'(k_0R)}{H_n^{(1)'}(k_0R)}\cos n(\theta-\phi), \tag{2}$$

где J_n и $H_n^{(1)}$ — функции Бесселя и Ханкеля соответственно, а

$$\delta_n = \begin{cases} 1/2, & n=0, \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

Поле H_z^0 является решением краевой задачи, формулируемой ниже.

Обозначим через $H_z^{1,j}$, $H_z^{2,j}$ и $H_z^{3,j}$ поля внутри областей Ω_j^1, Ω_j^2 и Ω_j^3 соответственно. Внутри своих областей поля H_z^0, $H_z^{1,j}$, $H_z^{2,j}$ и $H_z^{3,j}$ должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца с коэффициентами $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$, $k_1^2 = \omega^2\varepsilon_1\mu_0$, $k_{2,j}^2 = \omega^2\varepsilon_{2,j}\mu_0$ и $k_{3,j}^2 = \omega^2\varepsilon_{3,j}\mu_0$ соответственно, а на идеально проводящих участках границы их нормальные производные должны обращаться в ноль.

На щелях S_j^1 должны выполняться условия сопряжения

$$H_z^{1,j}\Big|_{S_j^1} = (H_z^0 + H_z^{пад} + H_z^{рас})\Big|_{S_j^1}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z^{1,j}}{\partial r}\bigg|_{S_j^1} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_z^0}{\partial r}\bigg|_{S_j^1}; \tag{4}$$

при $j \le [N/4]$ на щелях S_j^{2-}, S_j^{2+}, S_j^{3-} и S_j^{3+} – условия

$$H_z^{n,j}\Big|_{S_j^{n-}} = H_z^{1,j}\Big|_{S_j^{n-}}; \quad H_z^{n,j}\Big|_{S_j^{n+}} = H_z^{1,j^*}\Big|_{S_j^{n+}}; \quad n=2,3; \tag{5}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{n,j}}\frac{\partial H_z^{n,j}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n-}} = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z^{1,j}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n-}}; \frac{1}{\varepsilon_{n,j}}\frac{\partial H_z^{n,j}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n+}} = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z^{1,j^*}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n+}}; \quad n=2,3 \tag{6}$$

(при $j > [N/4]$ – аналогичные условия);
в окрестности краев щелей выполняются условия Мейкснера [6]

$$\left|H_z^0\right| \le C, \left|H_z^{n,j}\right| \le C, \left|\nabla H_z^0\right| \le C\delta^{-\alpha}, \left|\nabla H_z^{n,j}\right| \le C\delta^{-\alpha}, \delta \to 0, 0 \le \alpha < 1, \tag{7}$$

где δ — расстояние от края границы до точки наблюдения;
на бесконечности выполняется условие излучения Зоммерфельда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial H_z^0}{\partial r} - ik_0H_z^0\right) = 0. \tag{8}$$

Прямая задача определения полей H_z^0, $H_z^{1,j}$, $H_z^{2,j}$ и $H_z^{3,j}$ при заданных параметрах резонаторов представляет собой задачу дифракции.

Задача синтеза прозрачного тела относится к разряду обратных задач и состоит в определении параметров резонаторов, обеспечивающих выполнение условия

$$\left\|\Phi_0(\phi) + \Phi^{рас}(\phi)\right\|^2 < \varepsilon\left\|\Phi^{рас}(\phi)\right\|^2, \tag{9}$$

в евклидовой норме, где Φ_0 – диаграмма направленности поля H_z^0, а ε — заданная точность, связанная с коэффициентом ослабления K формулой $\varepsilon = 10^{K/10}$. При выбранной геометрии резонаторов варьируемыми параметрами будут относительные диэлектрические проницаемости $\hat{\varepsilon}_{2,j} = \varepsilon_{2,j} / \varepsilon_0$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j} = \varepsilon_{3,j} / \varepsilon_0$, которые предполагаются действительными и удовлетворяющими ограничениям $\hat{\varepsilon}_{2,j} \geq 1$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j} \geq 1$. Величину ε_1 считаем фиксированной и равной ε_0. Параметры d_j, T_j, ρ_j, $R_{n,j}$ и h_j могут изменяться в узких пределах, определяемых геометрией структуры. Секторы Ω_j^1 предполагаются узкими (d_j малы), а секторы Ω_j^2 и Ω_j^3 — тонкими (h_j малы). Размеры щелей l и w считаем произвольно малыми.

2. Редукция краевой задачи к системе интегральных уравнений

Обозначим через G_0, G_1^j, G_2^j и G_3^j функции Грина второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца с коэффициентами k_0^2, k_1^2, $k_{2,j}^2$ и $k_{3,j}^2$ в областях Ω^0, Ω_j^1, Ω_j^2 и Ω_j^3 соответственно.

Поле в области Ω^0 представимо интегралом

$$H_z^0(r,\phi) = -R\sum_{j=0}^{N-1}\int_{p_j-l}^{p_j+l} G_0(r,\phi,R,\phi_0)\frac{\partial H_z^0}{\partial r_0}\bigg|_{r_0=R}(\phi_0)d\phi_0 . \qquad (10)$$

В областях Ω_j^1, Ω_j^2 и Ω_j^3 поля $H_z^{1,j}$, $H_z^{2,j}$ и $H_z^{3,j}$ также могут быть выражены через значения их нормальных производных на щелях.

Учитывая условие сопряжения (4) и (6), введем на щелях в цилиндрическом экране неизвестную функцию

$$\chi_{1,j}(\phi) = \frac{R}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_z^{1,j}}{\partial r}\bigg|_{S_j^1} = \frac{R}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_z^0}{\partial r}\bigg|_{S_j^1} = i\omega R\, E_\phi^0(R,\phi_0), j = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (11)$$

а на щелях S_j^{2-}, S_j^{2+}, S_j^{3-} и S_j^{3+} соответственно — неизвестные функции $\chi_{2,j}$, $\chi_{3,j}$, $\chi_{2,j}^*$ и $\chi_{3,j}^*$:

$$\chi_{n,j}(r) = -\frac{1}{\varepsilon_{n,j} r}\frac{\partial H_z^{n,j}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n-}} = -\frac{1}{\varepsilon_1 r}\frac{\partial H_z^{1,j}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n-}}, \quad n = 2,3;$$

$$\chi_{n,j}^*(r) = \frac{1}{\varepsilon_{n,j} r}\frac{\partial H_z^{n,j}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n+}} = \frac{1}{\varepsilon_1 r}\frac{\partial H_z^{1,j*}}{\partial \phi}\bigg|_{S_j^{n+}}, \quad n = 2,3.$$

Удовлетворяя условиям сопряжения (3) и (5) на S_j^1, S_{j*}^1, S_j^{2-}, S_j^{2+}, S_j^{3-} и S_j^{3+} при $j \leq [N/4]$, получаем уравнения

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int_{p_k-l}^{p_k+l}\varepsilon_0 G_0(R,\phi,R,\phi_0)\chi_{1,k}(\phi_0)d\phi_0+\int_{p_j-l}^{p_j+l}\varepsilon_1 G_1^j(R,\phi,R,\phi_0)\chi_{1,k}(\phi_0)d\phi_0-$$
$$-\sum_{m=2}^{3}\int_{R_{m,j}-w}^{R_{m,j}+w}\varepsilon_1 G_1^j(R,\phi,r_0,b_j^-)\chi_{m,j}(r_0)dr_0=f(\phi),\quad \phi\in(p_j-l,p_j+l); \tag{12}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int_{p_k-l}^{p_k+l}\varepsilon_0 G_0(R,\phi,R,\phi_0)\chi_{1,k}(\phi_0)d\phi_0+\int_{p_{j^*}-l}^{p_{j^*}+l}\varepsilon_1 G_1^{j^*}(R,\phi,R,\phi_0)\chi_{1,j^*}(\phi_0)d\phi_0-$$
$$-\sum_{m=2}^{3}\int_{R_{m,j}-w}^{R_{m,j}+w}\varepsilon_1 G_1^{j^*}(R,\phi,r_0,b_{j^*}^+)\chi_{m,j}^*(r_0)dr_0=f(\phi),\quad \phi\in(p_{j^*}-l,p_{j^*}+l); \tag{13}$$

$$\int_{R_{n,j}-w}^{R_{n,j}+w}\varepsilon_{n,j}\left[G_n^j\left(r,b_j^-,r_0,b_j^+\right)\chi_{n,j}^*(r_0)+G_n^j\left(r,b_j^-,r_0,b_j^-\right)\chi_{n,j}(r_0)\right]dr_0+$$
$$+\sum_{m=2}^{3}\int_{R_{m,j}-w}^{R_{m,j}+w}\varepsilon_1 G_1^j\left(r,b_j^-,r_0,b_j^-\right)\chi_{m,j}(r_0)dr_0- \tag{14}$$
$$-\int_{p_j-l}^{p_j+l}\varepsilon_1 G_1^j\left(r,b_j^-,R,\phi_0\right)\chi_{1,j}(\phi_0)d\phi_0=0,\ r\in(R_{n,j}-w,R_{n,j}-w),\, n=2,3;$$

$$\int_{R_{n,j}-w}^{R_{n,j}+w}\varepsilon_{n,j}\left[G_n^j\left(r,b_j^+,r_0,b_j^+\right)\chi_{n,j}^*(r_0)+G_n^j\left(r,b_j^+,r_0,b_j^-\right)\chi_{n,j}(r_0)\right]dr_0+$$
$$+\sum_{m=2}^{3}\int_{R_{m,j}-w}^{R_{m,j}+w}\varepsilon_1 G_1^{j^*}\left(r,b_{j^*}^+,r_0,b_{j^*}^+\right)\chi_{m,j}^*(r_0)dr_0- \tag{15}$$
$$-\int_{p_{j^*}-l}^{p_{j^*}+l}\varepsilon_1 G_1^{j^*}\left(r,b_{j^*}^+,R,\phi_0\right)\chi_{1,j^*}(\phi_0)d\phi_0=0,\quad r\in(R_{n,j}-w,R_{n,j}+w),\, n=2,3,$$

где $b_j^+=\dfrac{\pi+T_j}{2}$, $b_j^-=\dfrac{\pi-T_j}{2}$, $f(\phi)=H_z^{пад}(R,\phi)+H_z^{рас}(R,\phi)$.

Для слоев с номерами $j>[N/4]$ получаем аналогичные уравнения. Полная система содержит $3N$ уравнений с $3N$ неизвестными.

В силу симметрии структуры в случае падения плоской волны достаточно рассматривать только слои верхней половины ($j\le[N/4]$). Решения для слоев нижней половины ($j>[N/4]$) получаются простым пересчетом.

3. Приближенное сведение интегральных уравнений к алгебраическим

Предполагая размеры щелей малыми, будем искать неизвестные функции $\chi_{1,j}$, $\chi_{2,,j}$, $\chi_{3,j}$, χ_{2,j^*} и χ_{3,j^*} в виде

$$\chi_{1,j}(\phi)=\frac{q_j}{\sqrt{(p_j+l-\phi)(\phi-p_j+l)}}, \tag{16}$$

$$\chi_{n,j}(r)=\frac{z_{n,j}}{\sqrt{(R_{n,j}+w-r)(r-R_{n,j}+w)}},\quad n=2,3,$$

$$\chi^*_{n,j}(r)=\frac{z^*_{n,j}}{\sqrt{(R_{n,j}+w-r)(r-R_{n,j}+w)}},\quad n=2,3,$$

где q_j, $z_{2,j}$, $z^*_{2,j}$, $z_{3,j}$, $z^*_{3,j}$ — неизвестные комплексные числа.

Заметим, что числа q_j можно выразить в виде дискретного преобразования Фурье

$$q_j=\sum_{n=0}^{N/2}\hat{q}_n\cos np_j+\sum_{n=1}^{N/2-1}\hat{q}^s_n\sin np_j, \tag{17}$$

где коэффициенты $\hat{q}_n$ и $\hat{q}^s_n$ определяются единственным образом.

Функция G_0 представима в виде

$$G_0(R,\phi,R,\phi_0)=-\frac{1}{\pi}\ln\left|2\sin\frac{\phi-\phi_0}{2}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos n(\phi-\phi_0),$$

$$\alpha_n=-\frac{\delta_n}{\pi k_0R}\frac{H_n^{(1)}(k_0R)}{H_n^{(1)\prime}(k_0R)}-\frac{1-\hat{\delta}_{n,0}}{\pi}\frac{1}{n}=O(n^{-3}),\quad n\to\infty,$$

где $\hat{\delta}_{n,0}$ – символ Кронекера.

Введем в рассмотрение интегральный оператор L с ядром $-\frac{1}{\pi}\ln\left|2\sin\frac{\phi-\phi_0}{2}\right|$, а также функцию

$$\chi(\phi)=\begin{cases}0, & \phi\notin\bigcup\limits_{j=0}^{N-1}(p_j-l,p_j+l),\\ \chi_j(\phi), & \phi\in(p_j-l,p_j+l).\end{cases}$$

Определив скалярное произведение в смысле интегрирования по интервалу $(0,2\pi)$, получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int_{p_k-l}^{p_k+l}\varepsilon_0G_0(R,\phi,R,\phi_0)\chi_k(\phi_0)d\phi_0=\varepsilon_0L\chi+\varepsilon_0\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left[(\chi,\varphi_n)\varphi_n+(\chi,\psi_n)\psi_n\right],$$

где $\varphi_n=\cos n\phi$, $\psi_n=\sin n\phi$.

Используя преобразование рядов Фурье функций вида (16), полученное в [4] для случая узких щелей, получаем

$$\varepsilon_0 L\chi + \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left[(\chi,\varphi_n)\varphi_n + (\chi,\psi_n)\psi_n\right] =$$

$$= \varepsilon_0 L\chi + \frac{\pi N}{2}\sum_{m=0}^{N/2}\hat{q}_m\left(\delta_m^{-1}\alpha_m\varphi_m + \sum_{k=1}^{\infty}J_0(lNk)\left(\alpha_{Nk+m}\varphi_{Nk+m} + \alpha_{Nk-m}\varphi_{Nk-m}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\pi N}{2}\sum_{m=1}^{N/2-1}\hat{q}_m^s\left(\alpha_m\psi_m + \sum_{k=1}^{\infty}J_0(lNk)\left(\alpha_{Nk+m}\psi_{Nk+m} - \alpha_{Nk-m}\psi_{Nk-m}\right)\right).$$

Кроме того, как показано в [7],

$$L\chi = \sum_{n=0}^{N/2}\hat{q}_n L_n\varphi_n + \sum_{n=1}^{N/2-1}\hat{q}_n^s L_n\psi_n + O(l), \quad l \to 0,$$

где

$$L_n = \ln\frac{2}{l} - \sum_{j=1}^{N-1}\cos np_j \ln\left|2\sin\frac{p_j}{2}\right|.$$

Заметив, что в точках p_j

$$\varphi_{Nk\pm m} = \varphi_m, \quad \psi_{Nk\pm m} = \pm\psi_m,$$

и вводя обозначение

$$\mathrm{A}_m = \frac{\pi N\varepsilon_0}{2}\left(\delta_m^{-1}\alpha_m + \sum_{k=1}^{\infty}J_0(lNk)\left(\alpha_{Nk+m} + \alpha_{Nk-m}\right)\right), \tag{18}$$

получаем в узлах сетки $\{p_j\}$ приближенное равенство

$$\begin{gathered}\varepsilon_0 L\chi + \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left[(\chi,\varphi_n)\varphi_n + (\chi,\psi_n)\psi_n\right] = \\ = \sum_{n=0}^{N/2}\hat{q}_n(\varepsilon_0 L_n + \mathrm{A}_n)\varphi_n + \sum_{n=1}^{N/2-1}\hat{q}_n^s(\varepsilon_0 L_n + \mathrm{A}_n)\psi_n.\end{gathered} \tag{19}$$

Погрешность равенства (19) в пределах щелей есть величина $O(l)$, которой мы в дальнейшем будем пренебрегать, поскольку рассматриваем случай произвольно узких (в том числе «экспоненциально узких») щелей.

Функции Грина G_0, G_1^j, G_2^j и G_3^j имеют на соответствующих щелях логарифмическую особенность при совпадении аргументов. Так, на щелях S_j^1 справедливы представления

$$G_0(R,\phi,R,\phi_0) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\phi-\phi_0|} + M_0(\phi-\phi_0),$$

$$G_1^j(R,\phi,R,\phi_0) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\phi-\phi_0|} + M_{1,j}(\phi,\phi_0),$$

где $M_0(\phi-\phi_0)$, $M_{1,j}(\phi,\phi_0)$ – непрерывные функции.

На щелях S_j^{2-}, S_j^{2+}, S_j^{3-} и S_j^{3+} справедливы представления

$$G_1^j\left(r,b_j^{\mp},r_0,b_j^{\mp}\right)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{R}{|r-r_0|}+N_{1,j}^{n\pm}(r,r_0),\quad r,r_0\in(R_{n,j}-w,R_{n,j}-w),\quad n=2,3;$$

$$G_n^j\left(r,b_j^{\pm},r_0,b_j^{\pm}\right)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{R}{|r-r_0|}+M_{n,j}^{\pm}(r,r_0),\quad r,r_0\in(R_{n,j}-w,R_{n,j}-w),\quad n=2,3,$$

где $N_{1,j}^{n\pm}(r,r_0)$, $M_{n,j}^{\pm}(r,r_0)$ – непрерывные функции.

Если аргументы функций Грина принадлежат разным интервалам, функции Грина бесконечно гладкие в пределах этих интервалов.

Введем следующие обозначения:

$$g_0(0)=\pi\varepsilon_0 M_0(0);\quad g_0(i-j)=\pi\varepsilon_0 G_0(R,p_i,R,p_j);\quad i\neq j;$$

$$g_{1,j}(1\to 1)=\pi\varepsilon_1 M_{1,j}(p_j,p_j);\, g_{1,j}(n\to 1)=\pi\varepsilon_1 G_1^j(R,p_j,R_{n,j},b_j^{\mp}),\, n=2,3;$$

$$g_{n,j}(n^*\to n)=\pi\varepsilon_{n,j}G_2^j\left(R_{n,j},b_j^{\mp},R_{n,j},b_j^{\mp}\right),\quad n=2,3;$$

$$g_{n,j}(n\to n)=\pi\varepsilon_{n,j}M_{n,j}^{\pm}\left(R_{n,j},b_j^{\pm},R_{n,j},b_j^{\pm}\right),\quad n=2,3;$$

$$g_{1,j}(n\to n)=\pi\varepsilon_1 N_{1,j}^{n+}\left(R_{n,j},b_j^{-},R_{n,j},b_j^{-}\right),\quad n=2,3;$$

$$g_{1,j}(n\to m)=\pi\varepsilon_1 G_1^j\left(R_{m,j},b_j^{-},R_{n,j},b_j^{-}\right),\quad n,m=2,3;\quad n\neq m;$$

$$\varphi_{m,j}=\varphi_m(p_j);\quad \psi_{m,j}=\psi_m(p_j).$$

В результате система интегральных уравнений (12)–(15) сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Для слоев с номерами $j\leq[N/4]$ эти уравнения имеют вид

$$\sum_{n=0}^{N/2}\hat{q}_n(\varepsilon_0 L_n+\mathrm{A}_n)\varphi_{n,j}+\sum_{n=1}^{N/2-1}\hat{q}_n^s(\varepsilon_0 L_n+\mathrm{A}_n)\psi_{n,j}+\left[\varepsilon_1\ln\frac{2}{l}+g_{1,j}(1\to 1)\right]q_j-$$
$$-g_{1,j}(2\to 1)z_{2,j}-g_{1,j}(3\to 1)z_{3,j}=f(p_j),\tag{20}$$

$$\sum_{n=0}^{N/2}\hat{q}_n(\varepsilon_0 L_n+\mathrm{A}_n)\varphi_{n,j^*}+\sum_{n=1}^{N/2-1}\hat{q}_n^s(\varepsilon_0 L_n+\mathrm{A}_n)\psi_{n,j^*}+\left[\varepsilon_1\ln\frac{2}{l}+g_{1,j^*}(1^*\to 1^*)\right]q_{j^*}-$$
$$-g_{1,j^*}(2^*\to 1^*)z_{2,j}^*-g_{1,j^*}(3^*\to 1^*)z_{3,j}^*=f(p_{j^*}),\tag{21}$$

$$g_{2,j}(2^*\to 2)z_{2,j}^*+\left[\varepsilon_{2,j}\ln\frac{2R}{w}+g_{2,j}(2\to 2)\right]z_{2,j}-g_{1,j}(1\to 2)q_j+$$
$$+\left[\varepsilon_1\ln\frac{2R}{w}+g_{1,j}(2\to 2)\right]z_{2,j}+g_{1,j}(3\to 2)z_{3,j}=0\tag{22}$$

$$g_{3,j}(3^*\to 3)z_{3,j}^*+\left[\varepsilon_{3,j}\ln\frac{2R}{w}+g_{3,j}(3\to 3)\right]z_{3,j}-g_{1,j}(1\to 3)q_j+$$
$$+\left[\varepsilon_1\ln\frac{2R}{w}+g_{1,j}(3\to 3)\right]z_{3,j}+g_{1,j}(2\to 3)z_{2,j}=0\tag{23}$$

$$\left[\varepsilon_{2,j}\ln\frac{2R}{w}+g_{2,j}(2^*\to 2^*)\right]z^*_{2,j}+g_{2,j}(2\to 2^*)z_{2,j}-g_{1,j^*}(1^*\to 2^*)q_{j^*}+$$
$$+\left[\varepsilon_1\ln\frac{2R}{w}+g_{1,j^*}(2^*\to 2^*)\right]z^*_{2,j}+g_{1,j^*}(3^*\to 2^*)z^*_{3,j}=0 \quad (24)$$
$$\left[\varepsilon_{3,j}\ln\frac{2R}{w}+g_{3,j}(3^*\to 3^*)\right]z^*_{3,j}+g_{3,j}(3\to 3^*)z_{3,j}-g_{1,j^*}(1^*\to 3^*)q_{j^*}+$$
$$+\left[\varepsilon_1\ln\frac{2R}{w}+g_{1,j^*}(3^*\to 3^*)\right]z^*_{3,j}+g_{1,j^*}(2^*\to 3^*)z^*_{2,j}=0 \quad (25)$$

Аналогичные уравнения получаются и для слоев с номерами $j>[N/4]$.

Вместо представления (19) можно использовать эквивалентное ему представление

$$\varepsilon_0 L\chi+\varepsilon_0\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left[(\chi,\varphi_n)\varphi_n+(\chi,\psi_n)\psi_n\right]=\left[\varepsilon_0\ln\frac{2}{l}+g_0(0)\right]q_j+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N-1}g_0(k-j)q_k \quad .(26)$$

4. Решение задачи дифракции

Преобразуем систему (20)–(25). Для этого вначале попарно сложим уравнения: (20) с (21), (22) с (23), а (24) с (25). Затем попарно вычтем уравнения: (21) из (20), (23) из (22), а (25) из (24). В результате получаем две независимые системы: одну относительно неизвестных $\xi_{n,j}=z_{n,j}+z^*_{n,j}$, $n=2,3$, а вторую – относительно неизвестных $\eta_{n,j}=-i(z_{n,j}-z^*_{n,j})$, $n=2,3$. Разрешая эти системы, после элементарных преобразований получаем

$$z_{n,j}=\frac{1}{2}\left(Q^+_{n,j}+Q^-_{n,j}\right)q_j+\frac{1}{2}\left(Q^+_{n,j}-Q^-_{n,j}\right)q_{j^*},\quad n=2,3, \quad (27)$$

где

$$Q^{\pm}_{2,j}=\frac{g_{1,j}(1\to 2)T^{\pm}_{3,j}-g_{1,j}(1\to 3)g_{1,j}(3\to 2)}{T^{\pm}_{2,j}T^{\pm}_{3,j}-g^2_{1,j}(3\to 2)};$$

$$Q^{\pm}_{3,j}=\frac{g_{1,j}(1\to 3)T^{\pm}_{2,j}-g_{1,j}(2\to 3)g_{1,j}(1\to 2)}{T^{\pm}_{2,j}T^{\pm}_{3,j}-g^2_{1,j}(3\to 2)};$$

$$T^{\pm}_{n,j}=(\varepsilon_1+\varepsilon_{n,j})\frac{1}{\tau}+g^{\pm}_{n,j}+g_{1,j}(n\to n),\quad n=2,3;$$

$$g^{\pm}_{n,j}=g_{n,j}(n\to n)\pm g_{n,j}(n^*\to n),\quad n=2,3;$$

$$\tau=\left(\ln\frac{2R}{w}\right)^{-1}.$$

Таким образом, мы исключили неизвестные $z_{2,j}$, $z_{3,j}$ из системы (20)–(25).

Подставляя выражения (27) в уравнения (20) при каждом $j=0,1,\dots,N-1$, и избавляясь от коэффициентов Фурье $\hat{q}_n$ и $\hat{q}_n^s$ с помощью представления (26), получаем систему N линейных алгебраических уравнений

$$\left((\varepsilon_0+\varepsilon_1)\ln\frac{2}{l}+g_0(0)+g_{1,j}(1\to 1)\right)q_j+\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{N-1}g_0(k-j)q_k-$$
$$-\frac{1}{2}g_{1,j}(2\to 1)\left(Q_{2,j}^{+}+Q_{2,j}^{-}\right)q_j-\frac{1}{2}g_{1,j}(2\to 1)\left(Q_{2,j}^{+}-Q_{2,j}^{-}\right)q_{j^*}- \qquad (28)$$
$$-\frac{1}{2}g_{1,j}(3\to 1)\left(Q_{3,j}^{+}+Q_{3,j}^{-}\right)q_j-\frac{1}{2}g_{1,j}(3\to 1)\left(Q_{3,j}^{+}-Q_{3,j}^{-}\right)q_{j^*}=f(p_j),$$
$$j=0,1,\dots,N-1,$$

относительно N неизвестных q_j.

Теорема 1. Для любого значения k_0R существует такое число N_0, что при любом порядке $N>N_0$ система (28) однозначно разрешима при любой правой части f.

Доказательство. Фактически надо показать, что оператор K системы (28) при достаточно больших N невырожден.

Введем на множестве функций, заданных на сетке $\{p_j\}$ скалярное произведение

$$<f,g>=\sum_{j=0}^{N-1}f_j\overline{g}_j,$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Покажем, что $\operatorname{Im}<\mathrm{K}q,q>\neq 0$, если $q\neq 0$.

Поскольку все коэффициенты системы (28) за исключением $g_0(k-j)$ действительны, получаем

$$\operatorname{Im}\langle \mathrm{K}q,q\rangle=\frac{N}{2\widetilde{\delta}_n}\sum_{n=0}^{N/2}\operatorname{Im}\mathrm{A}_n\left|\hat{q}_n\right|^2+\frac{N}{2}\sum_{n=1}^{N/2-1}\operatorname{Im}\mathrm{A}_n\left|\hat{q}_n^s\right|^2.$$

Но

$$\operatorname{Im}\mathrm{A}_n=\frac{\pi N\varepsilon_0}{2}\left(\delta_n^{-1}\operatorname{Im}\alpha_n+\sum_{k=1}^{\infty}J_0(lNk)\left(\operatorname{Im}\alpha_{Nk+n}+\operatorname{Im}\alpha_{Nk-n}\right)\right), \qquad (29)$$

причем

$$\operatorname{Im}\alpha_n=\frac{2\delta_n}{(\pi k_0R)^2\left|H_n^{(1)\prime}(k_0R)\right|^2}>0$$

– величина, убывающая с ростом n быстрее любой экспоненты. Следовательно, за счет выбора достаточно большого N бесконечная сумма в (29) может быть сделана сколь угодно малой. При этом

$$\mathrm{A}_n \approx \frac{\pi N \varepsilon_0}{2} \delta_n^{-1} \alpha_n . \tag{30}$$

Таким образом, $\mathrm{Im}\langle \mathrm{K}q, q \rangle > 0$, что и доказывает теорему.

Разрешая систему (28) и подставляя найденное решение в представления (10) и (17), получаем представление магнитного поля вне цилиндра. Диаграмма направленности этого поля есть

$$\Phi_0(\phi) = \frac{\varepsilon_0 N e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2k_0 R} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{n=0}^{N/2} \hat{q}_n \left[\frac{e^{-\frac{i\pi n}{2}} \varphi_n}{H_n^{(1)\prime}(k_0 R)} + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(lNm) \left(\frac{e^{-\frac{i\pi(Nm+n)}{2}} \varphi_{Nm+n}}{H_{Nm+n}^{(1)\prime}(k_0 R)} + \frac{e^{-\frac{i\pi(Nm-n)}{2}} \varphi_{Nm-n}}{H_{Nm-n}^{(1)\prime}(k_0 R)} \right) \right] + \right. \tag{31}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N/2-1} \hat{q}_n^s \left[\frac{e^{-\frac{i\pi n}{2}} \psi_n}{H_n^{(1)\prime}(k_0 R)} + \sum_{m=1}^{\infty} J_0(lNm) \left(\frac{e^{-\frac{i\pi(Nm+n)}{2}} \psi_{Nm+n}}{H_{Nm+n}^{(1)\prime}(k_0 R)} - \frac{e^{-\frac{i\pi(Nm-n)}{2}} \psi_{Nm-n}}{H_{Nm-n}^{(1)\prime}(k_0 R)} \right) \right] \right\}.$$

5. Решение задачи синтеза

В задаче синтеза нерассеивающего тела касательное электрическое поле на щелях в цилиндрическом экране считается известным и должно удовлетворять условиям прозрачности, полученным в [4]. Для структуры порядка N при нулевом угле падения ($\theta = 0$) эти условия имеют вид

$$\begin{gathered} \hat{q}_n = \frac{4\tilde{\delta}_n k_0 R A}{\varepsilon_0 N} e^{-\frac{i\pi n}{2}} J_n'(k_0 R), \quad n = 0,1,\ldots,N/2; \\ \hat{q}_n^s = 0, \quad n = 1,\ldots,N/2-1, \end{gathered} \tag{32}$$

где

$$\tilde{\delta}_n = \begin{cases} 1/2, & n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, N/2); \\ 1, & n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, N/2). \end{cases}$$

Вернемся к системе уравнений (20)–(25). Смысл ее изменился: система стала переопределенной как система $3N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N$ неизвестных $z_{2,j}$ и $z_{3,j}$. Для разрешимости системы необходимо выполнение N дополнительных условий, которые могут быть использованы для определения неизвестных параметров слоев (резонаторов).

Заметим, что поскольку величины $\hat{q}_n$ и $\hat{q}_n^s$ фиксированы, система (20)–(25) распадается на независимые друг от друга системы для каждого из слоев. Отсюда следует важный вывод: параметры различных слоев в задаче синтеза определяются независимо.

Фиксируем некоторый номер $j \le [N/4]$ и рассмотрим задачу определения параметров j-го слоя. Данному слою соответствует система из шести уравнений (20)–(25) при фиксированном j. Как и в предыдущем разделе, сведем эту систему к двум независимым системам, содержащим по три уравнения. Используя обозначения

$$\mathrm{H}_j^+ = \sum_{n=0}^{N/2} \hat{q}_n (\varepsilon_0 L_n + \mathrm{A}_n)(\varphi_{n,j} + \varphi_{n,j^*}) +$$
$$+\left[\varepsilon_1 \ln\frac{2}{l} + g_{1,j}(1\to 1)\right](q_j + q_{j^*}) - f(p_j) - f(p_{j^*}),$$
$$\mathrm{H}_j^- = -i\left\{\sum_{n=0}^{N/2} \hat{q}_n (\varepsilon_0 L_n + \mathrm{A}_n)(\varphi_{n,j} - \varphi_{n,j^*}) +\right.$$
$$\left.+\left(\varepsilon_1 \ln\frac{2}{l} + g_{1,j}(1\to 1)\right)(q_j - q_{j^*}) - f(p_j) + f(p_{j^*})\right\},$$

эти системы можно записать в виде

$$\begin{gathered} g_{1,j}(2\to 1)\xi_{2,j} + g_{1,j}(3\to 1)\xi_{3,j} = \mathrm{H}_j^+, \\ \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_{2,j})\frac{1}{\tau} + g_{2,j}^+ + g_{1,j}(2\to 2)\right)\xi_{2,j} + g_{1,j}(3\to 2)\xi_{3,j} = g_{1,j}(1\to 2)(q_j + q_{j^*}), \\ g_{1,j}(2\to 3)\xi_{2,j} + \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_{3,j})\frac{1}{\tau} + g_{3,j}^+ + g_{1,j}(3\to 3)\right)\xi_{3,j} = g_{1,j}(1\to 3)(q_j + q_{j^*}), \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} g_{1,j}(2\to 1)\eta_{2,j} + g_{1,j}(3\to 1)\eta_{3,j} = \mathrm{H}_j^-, \\ \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_{2,j})\frac{1}{\tau} + g_{2,j}^- + g_{1,j}(2\to 2)\right)\eta_{2,j} + g_{1,j}(3\to 2)\eta_{3,j} = \\ = -ig_{1,j}(1\to 2)(q_j - q_{j^*}), \\ g_{1,j}(2\to 3)\eta_{2,j} + \left((\varepsilon_1 + \varepsilon_{3,j})\frac{1}{\tau} + g_{3,j}^- + g_{1,j}(3\to 3)\right)\eta_{3,j} = -ig_{1,j}(1\to 3)(q_j - q_{j^*}). \end{gathered} \tag{34}$$

В отличие от исходной системы (20)–(25), которая является комплексной, системы (33) и (34) являются асимптотически (при $N \to \infty$) действительными, что дает возможность обеспечить приближенную совместность этих систем путем варьирования действительных коэффициентов. Покажем, что это на самом деле так.

Как непосредственно следует из условий прозрачности (32), величины $q_j + q_{j^*} = 2\operatorname{Re} q_j$ и $-i(q_j + q_{j^*}) = 2\operatorname{Im} q_j$ действительны.

Функция f при нулевом угле падения вычисляется следующим образом:

$$f = \sum_{n=0}^{N/2} \hat{f}_n \varphi_n = \sum_{n=0}^{N/2} \tilde{\delta}_n \left(\delta_n^{-1} \tilde{f}_n + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_{Nk+n} + \tilde{f}_{Nk-n}) \right) \varphi_n ,$$

где

$$\tilde{f}_n = \frac{4iA\delta_n e^{-in\frac{\pi}{2}}}{\pi k_0 R_0 H_n^{(1)'}(k_0 R_0)} .$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{N/2} \hat{q}_n (\varepsilon_0 L_n + \mathrm{A}_n)(\varphi_{n,j} + \varphi_{n,j^*}) - (f(p_j) + f(p_{j^*})) =$$
$$= 2 \sum_{n=0}^{[N/4]} \left[\hat{q}_{2n} (\varepsilon_0 L_{2n} + \mathrm{A}_{2n}) - \hat{f}_{2n} \right] \varphi_{2n,j} .$$

При достаточно больших N справедлива формула (30). В этом приближении, используя известные свойства цилиндрических функции, получаем

$$\mathrm{Im}(\hat{q}_{2n} \mathrm{A}_{2n} - \hat{f}_{2n}) = 0 .$$

Таким образом, величина $\hat{q}_{2n} \mathrm{A}_{2n} - \hat{f}_{2n}$ является асимптотически действительной в том смысле, что величина $\mathrm{Im}(\hat{q}_{2n} \mathrm{A}_{2n} - \hat{f}_{2n})$ становится сколь угодно малой с ростом N.

Аналогично доказывается, что $\hat{q}_{2n+1} \mathrm{A}_{2n+1} - \hat{f}_{2n+1}$ — асимптотически чисто мнимая величина в том смысле, что $\mathrm{Re}(\hat{q}_{2n+1} \mathrm{A}_{2n+1} - \hat{f}_{2n+1})$ сколь угодно мало при $N \to \infty$.

В дальнейшем при решении задачи синтеза будем считать число N достаточно большим, чтобы можно было пренебречь величинами $\mathrm{Im}(\hat{q}_{2n} \mathrm{A}_{2n} - \hat{f}_{2n})$ и $\mathrm{Re}(\hat{q}_{2n+1} \mathrm{A}_{2n+1} - \hat{f}_{2n+1})$. В этих предположениях системы (33) и (34) являются действительными. Качество используемого приближения проверяется при решении задачи дифракции и определяется достигаемой степенью ослабления рассеянного поля.

Рассмотрим систему (33). Формально разрешим ее первое и последние уравнения относительно ξ_2 и ξ_3:

$$\xi_{2,j} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_{3,j})\mathrm{H}_j^+ + \tau\left(\mathrm{H}_j^+\left(g_{3,j}^+ + g_{1,j}(3 \to 3)\right) - 2\mathrm{Re}\, q_j g_{1,j}^2(1 \to 3)\right)}{g_{1,j}(2 \to 1)\left((\varepsilon_1 + \varepsilon_{3,j}) + \tau\left(g_{3,j}^+ + g_{1,j}(3 \to 3)\right)\right) - \tau g_{1,j}(2 \to 3) g_{1,j}(3 \to 1)},$$
$$\xi_{3,j} = \frac{\tau\left(2\mathrm{Re}\, q_j g_{1,j}(1 \to 3) g_{1,j}(2 \to 1) - g_{1,j}(2 \to 3)\mathrm{H}_j^+\right)}{g_{1,j}(2 \to 1)\left((\varepsilon_1 + \varepsilon_{3,j}) + \tau\left(g_{3,j}^+ + g_{1,j}(3 \to 3)\right)\right) - \tau g_{1,j}(2 \to 3) g_{1,j}(3 \to 1)}. \qquad (35)$$

После этого, выразим $g_{2,j}^+$ из второго уравнения (33):

$$g_{2,j}^{+}=-\left((\varepsilon_1+\varepsilon_{2,j})\frac{1}{\tau}+g_{1,j}(2\to 2)\right)+\frac{2\operatorname{Re} q_j g_{1,j}(1\to 2)-g_{1,j}(3\to 2)\xi_{3,j}}{\xi_{2,j}}. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь систему (34). Разрешим ее первые два уравнения относительно $\eta_{2,j}$ и $\eta_{3,j}$:

$$\begin{aligned}\eta_{2,j}&=\frac{\tau\left(2\operatorname{Im} q_j g_{1,j}(1\to 2)g_{1,j}(3\to 1)-\mathrm{H}_j^{-}g_{1,j}(3\to 2)\right)}{g_{1,j}(3\to 1)\left((\varepsilon_1+\varepsilon_{2,j})+\tau\left(g_{2,j}^{-}+g_{1,j}(2\to 2)\right)\right)-\tau g_{1,j}(2\to 1)g_{1,j}(3\to 2)},\\ \eta_{3,j}&=\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_{2,j})\mathrm{H}_j^{-}+\tau\left(\mathrm{H}_j^{-}\left(g_{2,j}^{-}+g_{1,j}(2\to 2)\right)-2\operatorname{Im} q_j g_{1,j}^2(1\to 2)\right)}{g_{1,j}(3\to 1)\left((\varepsilon_1+\varepsilon_{2,j})+\tau\left(g_{2,j}^{-}+g_{1,j}(2\to 2)\right)\right)-\tau g_{1,j}(2\to 1)g_{1,j}(3\to 2)}.\end{aligned} \quad (37)$$

Далее выразим $g_{3,j}^{-}$ из третьего уравнения (34):

$$g_{3,j}^{-}=\frac{2\operatorname{Im} q_j g_{1,j}(1\to 3)-g_{1,j}(2\to 3)\eta_{2,j}}{\eta_{3,j}}-\left((\varepsilon_1+\varepsilon_{3,j})\frac{1}{\tau}+g_{1,j}(3\to 3)\right). \quad (38)$$

Равенства (36) и (38) представляют собой условия совместности систем (33) и (34), а следовательно — системы (20)–(25) при условии, что касательное электрическое поле на щелях в цилиндрическом экране задано. Если это поле удовлетворяет еще условиям прозрачности (32), то, выбрав параметры слоев (резонаторов) из условий (36) и (38), мы тем самым решим задачу синтеза нерассеивающего тела.

Докажем, что решение задачи синтеза существует при достаточно малых значениях w.

Теорема 2. При любом фиксированном допустимом наборе параметров d_j, T_j, ρ_j, $R_{n,j}$, h_j и l существует число $w_0>0$, что при всех $w<w_0$ можно найти такие значения $\hat{\varepsilon}_{2,j}\ge 1$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j}\ge 1$, при которых выполняются условия (36) и (38).

Доказательство. Каждую из функций Грина G_2^j и G_3^j соответственно в секторах Ω_j^2 и Ω_j^3 можно представить в виде

$$G(r,\phi,r_0,\phi_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u_{nm}(r,\phi)u_{nm}(r_0,\phi_0)}{\lambda_{nm}},$$

где u_{nm} — нормированные собственные функции оператора Гельмгольца в кольцевом секторе, а λ_{nm} — соответствующие им собственные значения. При этом собственные функции с четными номерами n являются четными по ϕ (относительно точки $\phi=\pi/2$), а собственные функции с нечетными номерами n — нечетными. В результате множество собственных значений распадается на два непересекающихся множества: соответствующих четным и нечетным по ϕ собственным функциям.

Пусть ρ и Р — соответственно внутренний и внешний радиусы сектора, а c — его угловая ширина. Тогда каждое собственное значение связано с коэффициентом k^2 уравнения Гельмгольца следующим соотношением:

$$\lambda_{nm} = \frac{x_{nm}^2}{\rho^2} - k^2,$$

где x_{nm} — m-й корень уравнения

$$Y'_{\frac{\pi n}{c}}(x) J'_{\frac{\pi n}{c}}\left(\frac{\mathrm{P}}{\rho}x\right) - J'_{\frac{\pi n}{c}}(x) Y'_{\frac{\pi n}{c}}\left(\frac{\mathrm{P}}{\rho}x\right) = 0. \tag{39}$$

Как уже было отмечено выше, параметры различных слоев определяются независимо. Фиксируем некоторый номер j. Для сектора Ω_j^2 положим в уравнении (39) $\mathrm{P} = R_{2,j} + h_j/2$, $\rho = R_{2,j} - h_j/2$ и $c = T_j$. Рассмотрим уравнение (39) при всевозможных четных n и выберем среди всех его корней x_{nm} минимальный, удовлетворяющий условию

$$\frac{x_{nm}}{k_0(R_{2,j} - h_{2,j}/2)} \geq 1. \tag{40}$$

Обозначим этот корень через x_2.

Для сектора Ω_j^3 выберем среди корней x_{nm} уравнения (39) при всевозможных нечетных n минимальный, удовлетворяющий условию, аналогичному (40). Обозначим этот корень через x_3.

Введем обозначения

$$\zeta_n = \left(\frac{x_n}{k_0(R_{n,j} - h_{n,j}/2)}\right)^2, \quad n = 2,3.$$

Будем искать неизвестные $\hat{\varepsilon}_{2,j}$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j}$ в некоторых достаточно малых окрестностях точек ζ_2 и ζ_3 соответственно. В этих окрестностях функции $g_{2,j}^{+}(\hat{\varepsilon}_{2,j})$ и $g_{3,j}^{-}(\hat{\varepsilon}_{3,j})$ представимы виде

$$g_{2,j}^{+}(\hat{\varepsilon}_{2,j}) = \frac{b_2}{\hat{\varepsilon}_{2,j} - \zeta_2} + a_2(\hat{\varepsilon}_{2,j}), \tag{41}$$

$$g_{3,j}^{-}(\hat{\varepsilon}_{3,j}) = \frac{b_3}{\hat{\varepsilon}_{3,j} - \zeta_3} + a_3(\hat{\varepsilon}_{3,j}), \tag{42}$$

где b_2 и b_3 — некоторые константы, а a_2 и a_3 — непрерывные функции. Функции же $g_{2,j}^{-}(\hat{\varepsilon}_{2,j})$ и $g_{3,j}^{+}(\hat{\varepsilon}_{3,j})$ непрерывны в некоторых окрестностях точек ζ_2 и ζ_3.

Фиксируем все параметры j-го слоя за исключением $\hat{\varepsilon}_{2,j}$, $\hat{\varepsilon}_{3,j}$ и w. Позволим теперь величине w неограниченно стремиться к нулю, так что $\tau \to 0$. Тогда равенства (35) и (37) принимают вид

$$\xi_{2,j} = \frac{\mathrm{H}_j^+}{g_{1,j}(2\to 1)} + O(\tau), \quad \xi_{3,j} = O(\tau), \quad \tau\to 0, \tag{43}$$

$$\eta_{2,j} = O(\tau), \quad \eta_{3,j} = \frac{\mathrm{H}_j^-}{g_{1,j}(3\to 1)} + O(\tau), \quad \tau\to 0. \tag{44}$$

Необходимо отметить, что величины H_j^+ и H_j^- отличны от нуля по крайней мере при всех достаточно малых l.

Подставляя выражения (43), (44) в условия (36) и (38), рассматриваемые теперь как уравнения относительно $\hat{\varepsilon}_{2,j}$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j}$, получаем

$$g_{2,j}^+(\hat{\varepsilon}_{2,j}) = -\frac{1}{\tau}\varepsilon_0(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_{2,j}) + \frac{2\operatorname{Re} q_j g_{1,j}^2(1\to 2)}{\mathrm{H}_j^+} - g_{1,j}(2\to 2) + O(\tau), \tag{45}$$

$$g_{3,j}^-(\hat{\varepsilon}_{3,j}) = -\frac{1}{\tau}\varepsilon_0(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_{3,j}) + \frac{2\operatorname{Im} q_j g_{1,j}^2(1\to 3)}{\mathrm{H}_j^-} - g_{1,j}(3\to 3) + O(\tau). \tag{46}$$

В правой части каждого из уравнений (45) и (46) содержится бесконечно большое слагаемое порядка τ^{-1}. Для его компенсации аргумент каждой из функций в левой части должен быть достаточно близок к соответствующему полюсу. Представим уравнения (45) и (46) с учетом представлений (36) и (37) после очевидных преобразований в виде

$$\hat{\varepsilon}_{2,j} = \zeta_2 - \frac{\tau b_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_{2,j} - \tau\left(\dfrac{2\operatorname{Re} q_j g_{1,j}^2(1\to 2)}{\mathrm{H}_j^+} - g_{1,j}(2\to 2) - a_2(\hat{\varepsilon}_{2,j}) + O(\tau)\right)}, \tag{47}$$

$$\hat{\varepsilon}_{3,j} = \zeta_3 - \frac{\tau b_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_{3,j} - \tau\left(\dfrac{2\operatorname{Im} q_j g_{1,j}^2(1\to 3)}{\mathrm{H}_j^-} - g_{1,j}(3\to 3) - a_3(\hat{\varepsilon}_{3,j}) + O(\tau)\right)}, \tag{48}$$

При достаточно малых τ правая часть системы уравнений (47) и (48) представляет собой сжимающее отображение. Следовательно, в рассматриваемой малой окрестности точек ζ_2 и ζ_3 решение уравнений (47) и (48) существует и единственно. Вместе с тем разрешимы и уравнения (36) и (38). Теорема доказана.

Доказанная теорема гарантирует, что решение задачи синтеза существует по крайней мере при достаточно узких щелях, связывающих секторы Ω_j^1, Ω_j^2 и Ω_j^3. При этом требуется, чтобы малой была не столько ширина щелей, сколько логарифм этой величины. Более удобным может оказаться другое достаточное условие разрешимости задачи синтеза.

Теорема 3. При любом фиксированном допустимом наборе параметров d_j, T_j, ρ_j, $R_{n,j}$ и l существует такое число $h > 0$, что при всех

$h_j < h$ и $w < h_j$ можно найти значения $\hat{\varepsilon}_{2,j} \geq 1$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j} \geq 1$, при которых выполняются условия (36) и (38).

Доказательство. Для достаточно тонких кольцевых секторов ($h_j \ll 1$) функции $g^+_{n,j}(\hat{\varepsilon}_{n,j})$ и $g^-_{n,j}(\hat{\varepsilon}_{n,j})$ ($n = 2,3$) приближенно описывается следующими формулами:

$$g^+_{n,j}(\hat{\varepsilon}_{n,j}) = -\frac{\pi\varepsilon_0\sqrt{\hat{\varepsilon}_{n,j}}\operatorname{ctg}\dfrac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_{n,j}}k_0T_jR_{n,j}}{2}}{k_0h_j} + \varepsilon_0\hat{\varepsilon}_{n,j}\ln\frac{h_j}{2\pi R}, \qquad (49)$$

$$g^-_{n,j}(\hat{\varepsilon}_{n,j}) = \frac{\pi\varepsilon_0\sqrt{\hat{\varepsilon}_{n,j}}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\hat{\varepsilon}_{n,j}}k_0T_jR_{n,j}}{2}}{k_0h_j} + \varepsilon_0\hat{\varepsilon}_{n,j}\ln\frac{h_j}{2\pi R}. \qquad (50)$$

При $h_j \to 0$ функции $g^+_{n,j}(\hat{\varepsilon}_{n,j})$ и $g^-_{n,j}(\hat{\varepsilon}_{n,j})$ есть бесконечно большие величины $O(h_j^{-1})$ за исключением случаев, когда их аргумент $\hat{\varepsilon}_{n,j}$ не находится в малой окрестности точек $\varsigma^+_{n,j,m} = \dfrac{(2m+1)^2\pi^2}{(k_0T_jR_{n,j})^2}$ или $\varsigma^-_{n,j,m} = \dfrac{4\pi^2m^2}{(k_0T_jR_{n,j})^2}$ соответственно, где m — целые числа.

Из всевозможных чисел $\varsigma^+_{n,j,m}$ и $\varsigma^-_{n,j,m}$ выберем минимальные, удовлетворяющие условиям $\varsigma^+_{n,j,m} \geq 1$, $\varsigma^-_{n,j,m} \geq 1$. Обозначим их через ς^+_n и ς^-_n ($n = 2,3$).

Будем искать неизвестные $\hat{\varepsilon}_{2,j}$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j}$ в малых окрестностях точек ς^+_2 и ς^-_3 соответственно. Величина τ уже не рассматривается как малый параметр. Тогда равенства (35) и (37) принимают вид

$$\xi_{2,j} = \frac{\mathrm{H}^+_j}{g_{1,j}(2 \to 1)} + O(h_j), \quad \xi_{3,j} = O(h_j), \quad h_j \to 0, \qquad (51)$$

$$\eta_{2,j} = O(h_j), \quad \eta_{3,j} = \frac{\mathrm{H}^-_j}{g_{1,j}(3 \to 1)} + O(h_j), \quad h_j \to 0. \qquad (52)$$

Подставляя выражения (51), (52) в условия (36) и (38), получаем уравнения

$$g^+_{2,j} = \frac{2\operatorname{Re} q_j g^2_{1,j}(1 \to 2)}{\mathrm{H}^+_j} - \varepsilon_0(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_{2,j})\frac{1}{\tau} - g_{1,j}(2 \to 2) + O(h_j), \quad (53)$$

$$g^-_{3,j} = \frac{2\operatorname{Im} q_j g^2_{1,j}(1 \to 3)}{\mathrm{H}^-_j} - \varepsilon_0(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_{3,j})\frac{1}{\tau} - g_{1,j}(3 \to 3) + O(h_j). \quad (54)$$

Используя представления (51) и (52) преобразуем уравнения (53) и (54) к виду

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_{2,j} &= \varsigma_2^+ + F_1(\hat{\varepsilon}_{2,j}) - \frac{2h_j}{\pi\varepsilon_0 T_j R_{2,j}}\left(\frac{2\operatorname{Re} q_j g_{1,j}^2(1\to 2)}{\mathrm{H}_j^+} - \varepsilon_1 \ln\frac{2R}{w} - \right.\\
&\left. - \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_{2,j} \ln\frac{h_j}{\pi w} - g_{1,j}(2\to 2) + O(h_j)\right), \quad h_j \to 0,\\
\hat{\varepsilon}_{3,j} &= \varsigma_3^- + F_2(\hat{\varepsilon}_{3,j}) + \frac{2h_j}{\pi\varepsilon_0 T_j R_{3,j}}\left(\frac{2\operatorname{Im} q_j g_{1,j}^2(1\to 3)}{\mathrm{H}_j^-} - \varepsilon_1 \ln\frac{2R}{w} - \right.\\
&\left. - \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}_{3,j} \ln\frac{h_j}{\pi w} - g_{1,j}(3\to 3) + O(h_j)\right), \quad h_j \to 0,
\end{aligned} \tag{55}$$

где функции $F_1(\hat{\varepsilon}_{2,j})$ и $F_2(\hat{\varepsilon}_{3,j})$ характеризуются тем, что $F_1(\hat{\varepsilon}_{2,j}) = O\left((\hat{\varepsilon}_{2,j} - \varsigma_2^+)^3\right)$ и $F_2(\hat{\varepsilon}_{3,j}) = O\left((\hat{\varepsilon}_{3,j} - \varsigma_3^-)^3\right)$ соответственно при $\hat{\varepsilon}_{2,j} \to \varsigma_2^+$ и $\hat{\varepsilon}_{3,j} \to \varsigma_3^-$.

Заметим, что поскольку единственным ограничением на параметр w теперь является неравенство $w < h_j$, всегда можно добиться того, что величина $\hat{\varepsilon}_1 \ln\dfrac{2R}{w} + \hat{\varepsilon}_{2,j} \ln\dfrac{h_j}{\pi w}$ будет ограниченной при $h_j \to 0$. Таким образом, правая часть системы уравнений (55) представляет собой сжимающее отображение. Следовательно, решение $(\hat{\varepsilon}_{2,j}, \hat{\varepsilon}_{3,j})$ существует и единственно в некоторой окрестности точки $(\varsigma_2^+, \varsigma_3^-)$. Теорема доказана.

6. Численные результаты

На основе описанного выше метода разработан численный алгоритм, позволяющий решать задачу синтеза прозрачного тела для различных значений частотного параметра $k_0 R$ в диапазоне $0.1 \le k_0 R \le 10$.

Как следует из физических соображений, для структур описанного типа эффект прозрачности может наблюдаться в узком диапазоне в окрестности некоторой центральной частоты $(k_0 R)_{пр}$ (частоты прозрачности). Как показано в работе [4], при $(k_0 R)_{пр} \le 18$ для достижения ослабления $K = -30$ дБ достаточным является порядок структуры $N = 2(k_0 R)_{пр} + 4$. Всякое повышение порядка усиливает ослабление, хотя несколько сужает полосу прозрачности.

Решение задачи синтеза заключается в следующем. На предварительном этапе для заданной частоты прозрачности $(k_0 R)_{пр}$ выбирается порядок структуры как минимальное целое число, удовлетворяющее условиям $N \geq 2(k_0R)_{np} + 4$ и $N \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, после чего фиксируются геометрические параметры d_j, T_j, ρ_j, $R_{n,j}$ и h_j. Далее находится численное решение системы уравнений (36), (38), из которой определяются векторы величин $\hat{\varepsilon}_{2,j}$, $\hat{\varepsilon}_{3,j}$.

В качестве примера ниже приведены результаты решения задачи синтеза для $(k_0R)_{np} = 3$, 6 и 10. Порядок структуры N соответственно выбирался равным 10, 18 и 26. Величины d_j полагались равными 0.1, 0.2 и 0.2 соответственно. Величины h_j полагались равными соответственно 0.083, 0.026 и 0.011. Во всех трех случаях величины w/R и l были равны 0.001. Полученные векторы диэлектрических проницаемостей приведены в таблицах 1–3.

Таблица 1. Параметры резонаторов для $(k_0R)_{np} = 3$

Параметры	Номер слоя j		
	1	2	3
$\hat{\varepsilon}_{2,j}$	1.81	2.63	21.9
$\hat{\varepsilon}_{3,j}$	3.72	7.4	10.3

Таблица 2. Параметры резонаторов для $(k_0R)_{np} = 6$

Параметры	Номер слоя j				
	1	2	3	4	5
$\hat{\varepsilon}_{2,j}$	1.21	1.82	1.20	3.29	8.79
$\hat{\varepsilon}_{3,j}$	1.86	1.22	2.19	1.72	29.4

Таблица 3. Параметры резонаторов для $(k_0R)_{np} = 10$

Параметры	Номер слоя j						
	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\varepsilon}_{2,j}$	1.20	1.64	145	1.22	2.54	3.09	25.8
$\hat{\varepsilon}_{3,j}$	1.53	1.32	1.08	1.82	1.65	1.47	115.7

Параметры, найденные в результате решения задачи синтеза фиксируются, после чего решается задача дифракции при различных значениях частотного параметра k_0R, изменяющегося с очень мелким шагом в некотором диапазоне в окрестности $(k_0R)_{np}$. Необходимость использования мелкого шага обусловлена резким изменением рассеивающих свойств синтезированного тела в окрестности частоты прозрачности.

Вначале система (28) разрешается методом Гаусса относительно вектора неизвестных q_j. Получаемое из q_j преобразование Фурье $\hat{q}_n$ используется для вычисления диаграммы направленности Φ_0 по формуле (31). Сумма $\Phi_0 + \Phi^{рас}$ дает диаграмму направленности рассеянного поля. Находя отношения квадратов норм функций $\Phi_0 + \Phi^{рас}$ и $\Phi^{рас}$, мы тем самым находим отношение энергий, рассеиваемых в дальней зоне синтезированным телом и сплошным идеальным цилиндром соответственно, из чего мы определяем коэффициент ослабления K.

На рис. 3–5 приведены рассчитанные зависимости коэффициента ослабления K для тел, синтезированных для частот прозрачности $(k_0R)_{np} = 3$ (рис. 3), 6 (рис. 4) и 10 (рис. 5) в диапазоне $(k_0R)_{np} - 0.2 \le k_0R \le (k_0R)_{np} + 0.2$.

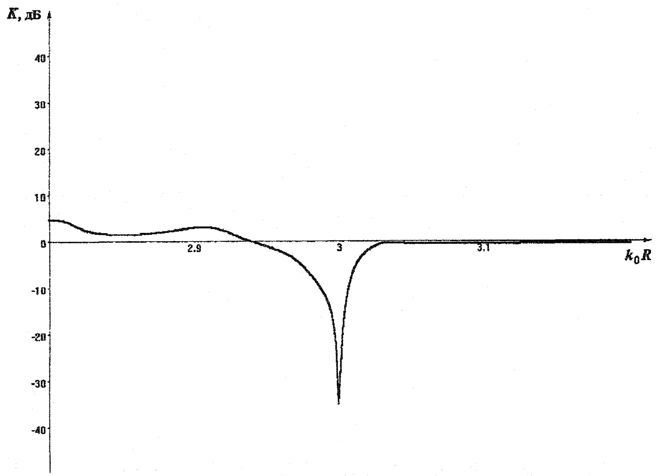

Рис. 3. Частотная зависимость коэффициента ослабления K структуры с параметрами, приведенными в Таблице 1

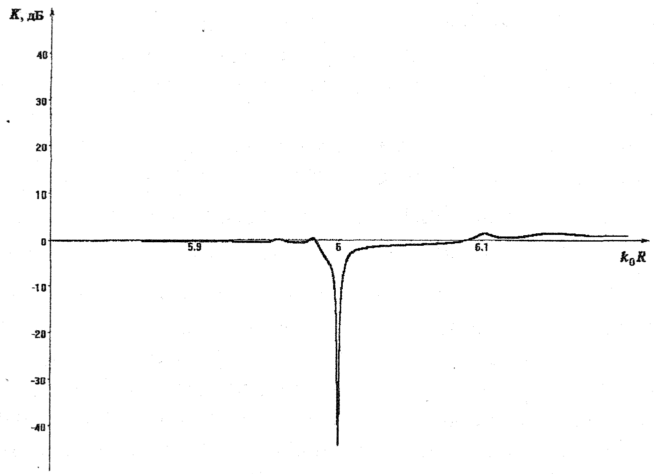

Рис. 4. Частотная зависимость коэффициента ослабления K структуры с параметрами, приведенными в Таблице 2

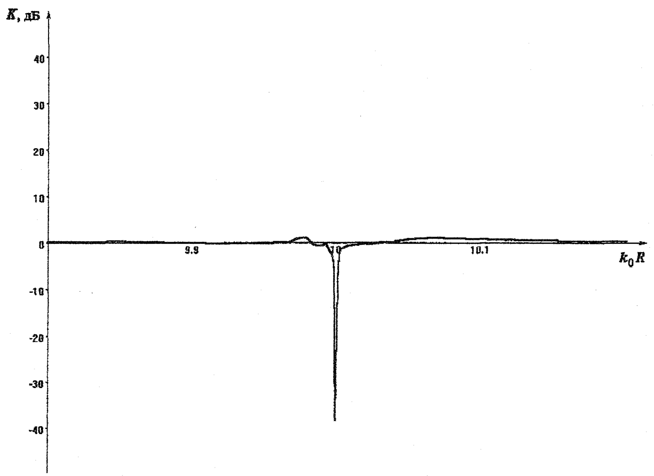

Рис. 5. Частотная зависимость коэффициента ослабления K структуры с параметрами, приведенными в Таблице 3

Как видно из графиков, во всех случаях в малой окрестности частоты прозрачности удается достичь ослабления более 30 дБ.

Литература

1. Захарьев Л.Н., Леманский А.Л. Рассеяние волн «черными» телами. — М.: Сов. радио, 1972.
2. Knott, E.F., Shaeffer J.F., and Tuley M.T. Radar Cross Section: Its Prediction, Measurements and Reduction. — Dedham: Artech House, 1986.
3. Бляхман А.Б., Рунова И.А. Бистатическая эффективная площадь рассеяния и обнаружение объектов при радиолокации на просвет// Радиотехника и электроника, 2001, т. 46, №4, с. 424–432.
4. Чернокожин Е.В. Синтез «прозрачного» тела из идеально проводящего цилиндра и системы резонаторов// Радиотехника и электроника, 2003, т. 48, №7, с. 773–786.
5. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. — М.: ИПРЖ «Радиотехника», 1996.
6. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964.
7. Чернокожин Е.В. Рассеяние плоской волны на проводящем цилиндре с несколькими продольными щелями// Электромагнитные волны и электронные системы, 2002, т. 7, №2, с. 4–24.