С. Ю. Чуркина, Ю. Д. Забродин

МЕТОД ЦЕЛЕВЫХ УРОВНЕЙ В ЛИНЕЙНЫХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

I. Многокритериальные задачи принятия решений возникают в ситуациях, когда качество принимаемого решения не удается оценить с помощью одного показателя (критерия) ([1], [2]). Для того чтобы сравнивать различные альтернативы, лицо, принимающее решение (ЛПР), часто затрудняется заранее задать единственную функцию, характеризующую их эффективность. Поэтому он указывает несколько функций-критериев, которые составляют векторный критерий эффективности. Так субъективная неопределенность приводит к целому множеству неулучшаемых (эффективных) альтернатив, из которого ЛПР и выбирает единственную с его точки зрения наилучшую.

Одной из основных трудностей методов построения (или аппроксимации) эффективного множества, основанных на свертывании векторного критерия, является необходимость решать большое число скалярных оптимизационных задач. Метод целевых уровней ([2], [4]-[7]) позволяет при решении линейных многокритериальных задач отчасти справиться с этой трудностью и существенно уменьшить количество решаемых скалярных оптимизационных задач для описания множества эффективных векторных оценок.

Суть метода целевых уровней - в нахождении эффективной (оптимальной по Парето) точки, ближайшей в Чебышевской метрике к заданной ЛПР точке целевых уровней. Под целевым уровнем критерия эффективности понимается значение этого критерия, которое ЛПР хотел бы получить, принимая во внимание реальную ситуацию.

II. Пусть $f(x)=(f_1(x),f_2(x),...,f_n(x))$ - векторный критерий оценки качества альтернатив, определенный на непустом и компактном множестве допустимых альтернатив X; непрерывные числовые функции $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ - частные критерии, которые максимизируются на множестве X; $F=\{y=f(x)\mid x\in X\}$ – множество векторных оценок.

Определение 1. Векторная оценка $y^0\in F$ называется *эффективной (оптимальной по Парето, π-оптимальной)*, если во множестве F не существует оценки y такой, что $y_i\geq y_i^0$, $i=\overline{1,n}$, и хотя бы одно неравенство строгое. Любая альтернатива x^0, соответствующая оценке $y^0=f(x^0)$, называется эффективной.

Множество всех оптимальных по Парето оценок называется *множеством Парето* или *эффективным множеством*. Обозначим его πF.

Множество всех эффективных альтернатив обозначим $\Pi_F(X)$.

Введем множества $T'' = \{t \in R^n | \max_{x\in X} f_i(x) \le t_i \le \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in X} f_i(x)$ $\forall i = \overline{1,n}\}$, $F_1(t) = \mathrm{Arg}\min_{y\in F} \varphi(t,y)$, где $\varphi(t,y) = \max_{i=\overline{1,n}} (t_i - y_i)$, $\forall t \in T''$, $F_2(t) = \mathrm{Arg}\max_{y\in F_1(t)} \sum_{i=1}^{n} y_i$ (см. [6]).

Рассмотрим следующую процедуру принятия решений. ЛПР назначает вектор целевых уровней $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, где t_i - целевой уровень для значения i-го критерия (значение i-го критерия, которое ЛПР хотел бы получить). Далее во множестве πF ищется точка, ближайшая к t в чебышевской метрике, т.е. решается задача:

$$\max_{i=\overline{1,n}} | t_i - y_i | \to \min_{y\in\pi F} \tag{1}$$

Если найденная точка не устраивает ЛПР, он задает другой вектор целевых уровней, для которого опять решается задача (1). ЛПР вновь анализирует полученное решение и либо принимает его в качестве оптимального, либо назначает новую целевую точку и т.д.

В [6] показано, что для $t \in T''$ задачу (1) можно решить как двухэтапную лексикографическую:

1. Находим

$$F_1(t) = \mathrm{Arg}\min_{y\in F} \varphi(t,y),\ t \in T'' \tag{2}$$

2. Находим

$$F_2(t) = \mathrm{Arg}\max_{y\in F_1(t)} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{3}$$

Векторная оценка $y^* \in F_2(t)$ является ближайшей к t π-оптимальной.

<u>Определение 2.</u> Конечной δ-сетью во множестве P называется конечное число точек $P^\delta \subset P$ таких, что $\forall p \in P$ найдется точка $p^\delta \in P^\delta$, для которой $\|p - p^\delta\| < \delta$.

Здесь и далее под расстоянием между элементами будет пониматься расстояние между ними в Чебышевской метрике.

<u>Определение 3</u>. *Оболочкой Эджворта-Парето* множества векторных оценок F в многокритериальной задаче максимизации называется множество $eph(F) = F - R^n_{\ge}$, где $R^n_{\ge} = \{y \in R^n \mid y_i \ge 0\ \ \forall i = \overline{1,n}\}$.

Пусть *eph(F)* – выпуклое множество.

В [6] также доказано следующее:

1. $\pi F = \bigcup_{t \in \hat{T}} y(t)$, где $\hat{T} = \{t \in T'' \mid F_1(t) = \{y(t)\}$, где $y_i(t) = t_i - \theta(t)\ \forall i = \overline{1,n}\}$.

2. $\pi F = \bigcup_{t \in T''} F_2(t)$.

3. Следующее утверждение о возможности аппроксимировать множество Парето методом целевых уровней.

Утверждение 1. Пусть X - выпуклый компакт, f непрерывна и строго квазивогнута. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta^* > 0$ такое, что для любой конечной δ-сети $T^\delta \subset T''$ $(0 < \delta \le \delta^*)$ множество $\bigcup_{t \in T^\delta} \{y(t)\}$, $y(t) \in F_2(t)$, образует ε-сеть во множестве πF.

III. Линейные многокритериальные задачи имеют ряд особенностей, которые позволяют при определенных условиях не решать оптимизационные задачи (2) и (3) для поиска эффективной точки, а вычислять ее по формуле. Перейдем теперь непосредственно к анализу линейных задач. Пусть $X = \{x \in R^m : Ax \le b\}$, $f_i(x) = < c^i, x > + d_i$, $i = \overline{1,n}$.

Согласно [3, с.113] справедлива следующая теорема.

Теорема. Векторная оценка

$$y \in \pi F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda^n = \{\lambda \in R^n, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} : < \lambda, y > = \max_{v \in F} < \lambda, v > .$$

Из этой теоремы следует

Утверждение 2. Пусть $y^1, y^2 \in \pi F$. Если точка y^3 прямой (y^1, y^2), лежащая вне отрезка $[y^1, y^2]$, принадлежит множеству F, то $y^3 \in \pi F$.

Следствие 1. Пусть имеется отрезок $[y^1, y^2] : y^1, y^2 \in \pi F$, и точка $y^3 = \alpha y^1 + (1-\alpha) y^2$, $0 < \alpha < 1$, лежащая внутри этого отрезка. Если $y^3 \in \pi F$, то и весь отрезок $[y^1, y^2] \in \pi F$.

Следствие 2. Если $y^1, y^2, .., y^s \in \pi F \subset R^n$ и $\exists w = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k$, $\mu \in \Lambda^s$, то

$$\forall \mu \in \overline{\Lambda}^s \quad \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k = conv(y^1, .., y^s) \in \pi F .$$

Так для случая трех критериев и трех точек $y^1, y^2, y^3 \in \pi F \subset R^3$ это означает, что если вершины треугольника принадлежат множеству Парето, и внутри треугольника существует паретовская точка, то весь треугольник состоит из паретовских точек.

Доказательство.

Так как $w \in \pi F$, то по T $\exists \lambda \in \Lambda^n : <\lambda, w> \geq <\lambda, v> \quad \forall v \in F$.

1. Покажем, что это условие выполняется для λ и каждой из точек y^k, $k=\overline{1,s}$. Возьмем произвольную вершину y^k. Т.к. $w = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k$, $\mu \in \Lambda^s$, то, очевидно, на прямой, проходящей через $y^k \in \pi F$ и $w \in \pi F$, найдется точка $t \in conv(y^1,..,y^s) \in F$ и лежащая вне отрезка $[y^k, w]$. Тогда по утверждению 2 $t \in \pi F$ и по следствию 1 из него, учитывая, что $<\lambda, w> \geq <\lambda., v> \quad \forall v \in F$, получаем, что $<\lambda, y^k> \geq <\lambda, v> \quad \forall v \in F$.

2. Возьмем произвольную точку $m = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k$, $\forall \mu \in \overline{\Lambda}^s$.

$$<\lambda, m> = \sum_{k=1}^{s} \mu_k <y^k, \lambda> \geq \sum_{k=2}^{s} \mu_k <\lambda, v> = <\lambda, v>.$$

Таким образом, $\forall m \in F$ справедливо неравенство $<\lambda, m> \geq <\lambda, v>$ $\forall v \in F$. Следовательно, $conv(y^1,..,y^s) \in \pi F$.

Обозначим $\overline{\theta}(t) = (\theta(t), \theta(t), .., \theta(t))$. Как уже упоминалось выше, в [6] доказано, что $\pi F = \bigcup_{t \in \hat{T}} y(t)$, и для произвольной целевой точки $t \in \hat{T}$ и соответствующей ей векторной оценки $y(t)$

$$F_1(t) = \{y(t)\} = F_2(t) = t - \overline{\theta}(t).$$

Пусть для целевых точек $t^k \in \hat{T}$, $k = \overline{1,s}$ найдены соответствующие векторные оценки $y^k = y(t^k) = F_2(t^k) = F_1(t^k) \in \pi F$, $y(t^k) = t^k - \overline{\theta}(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Определим $\forall \mu \in \overline{\Lambda}^s \quad t(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k t^k$ и

$$y(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k. \tag{4}$$

Справедлива следующая теорема, позволяющая при определенных условиях вычислять оптимальные по Парето векторные оценки, не решая при этом соответствующих оптимизационных задач.

Утверждение 3 . Если существует $\mu^0 \in \Lambda^s$ такое, что для целевой точки $t(\mu^0)$ найденная решением оптимизационной задачи векторная оценка $F_1[t(\mu^0)]$ представима в виде (4), т. е. $F_1[t(\mu^0)] = y(\mu^0) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k^0 y^k$, то $\forall \mu \in \overline{\Lambda}^s$ соответствующая точке $t(\mu)$ векторная оценка $F_1[t(\mu)]$ также представима в виде (4): $F_1[t(\mu)] = y(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k$.

Доказательство.

Пусть нашлось $\mu^0 \in \Lambda^s$ такое, что

$$y(\mu^0) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k^0 y^k = F_2[t(\mu^0)] = t(\mu^0) - \overline{\theta}[t(\mu^0)].$$

Возьмем произвольное $\mu \in \overline{\Lambda}^s$ и найдем $t(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k t^k$, а также $y(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k$. Поскольку $y^k \in \pi F$ и $y(\mu^0) \in \pi F$, то по следствию 2 из утверждения 1 $y(\mu) \in \pi F$ и, кроме того,

$$y(\mu) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k y^k = \sum_{k=1}^{s} \mu_k (t^k - \overline{\theta}(t^k)) = \sum_{k=1}^{s} \mu_k t^k - \sum_{k=1}^{s} \mu_k \overline{\theta}(t^k) = t(\mu) -$$
$$- \sum_{k=1}^{s} \mu_k \overline{\theta}(t^k) = t(\mu) + c.$$

Т.к. $y(\mu) \in \pi F$, то утверждению 1 $\exists t' \in \hat{T}$: $F_1(t') = y(\mu) = t' - \overline{\theta}(t')$. Получается, что $y(\mu) = t' - \overline{\theta}(t') = t(\mu) + c$, откуда следует, что $t(\mu)$ и t' лежат на одной прямой, т.е. $t(\mu) \in \hat{T}$. Последнее означает, что $y(\mu)$ представима в виде: $y(\mu) = F_1[t(\mu)] = F_2[t(\mu)] = t(\mu) - \overline{\theta}[t(\mu)]$, $\forall \mu \in \overline{\Lambda}^s$, причем $\overline{\theta}[t(\mu)] = \sum_{k=1}^{s} \mu_k \overline{\theta}(t^k)$.

IV. В случае, когда имеется два критерия оценки качества альтернатив и оболочка Эджворта-Парето множества векторных оценок – выпуклое множество, можно предложить алгоритм, который позволит значительно сократить число решаемых скалярных оптимизационных задач для описания множества Парето.

Пусть $a^1 = \max_{y \in A(y_1)} y_2$, где $A(y_1) = \max_{y \in F} y_1$, и $a^2 = \max_{y \in A(y_2)} y_1$, где $A(y_2) = \max_{y \in F} y_2$. Через точки a^1 и a^2 проведем прямые, параллельные прямой $y_1 = y_2$. Тогда точки τ^1 и τ^2 (рис.1) имеют следующие координаты:

$$\tau^1 = (a_1^1 + a_2^2 - a_2^1; a_2^2), \; \tau^2 = (a_1^1; a_1^1 - a_1^2 + a_2^2). \qquad (5)$$

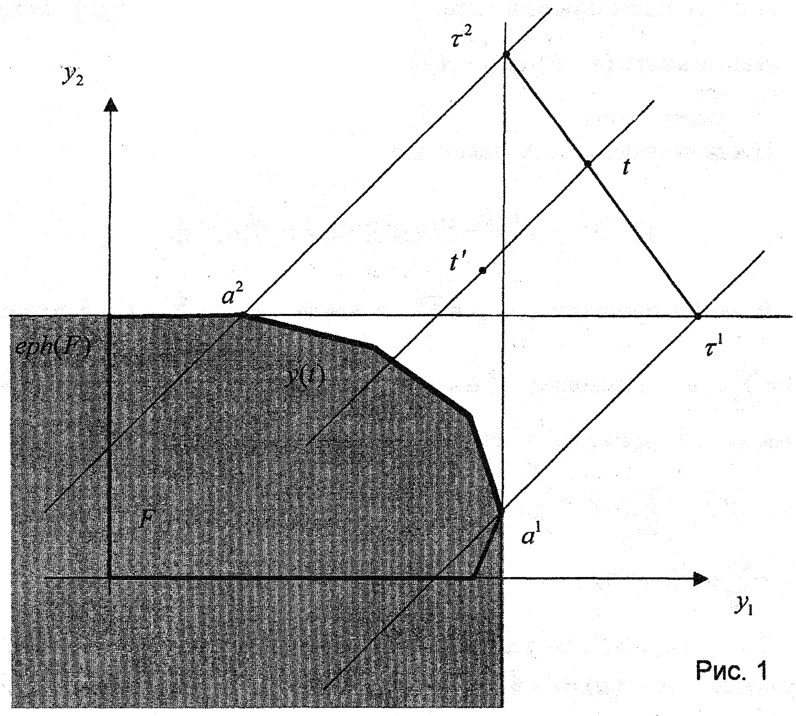

Рис. 1

Возьмем теперь произвольную векторную оценку $y \in \pi F$ и проведем через нее прямую, параллельную прямой $y_1 = y_2$. Очевидно, она пересечет отрезок $[\tau^1, \tau^2]$ в некоторой точке $t = \alpha\tau^1 + (1-\alpha)\tau^2$, $0 \le \alpha \le 1$. Подставляя в эту формулу координаты τ^1, τ^2 и учитывая, что $y_1 - t_1 = y_2 - t_2$, получаем

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1 + a_1^2 - a_2^2}{a_2^1 - a_1^1 + a_1^2 - a_2^2} = \frac{t_2 - t_1 + a_1^2 - a_2^2}{a_2^1 - a_1^1 + a_1^2 - a_2^2} = \frac{t_2' - t_1' + a_1^2 - a_2^2}{a_2^1 - a_1^1 + a_1^2 - a_2^2}, \qquad (6)$$

где $t' = t + c$.

Таким образом, зная координаты векторной оценки y, можем найти координаты соответствующей ей целевой точки t, а зная координаты t или другой целевой точки t', лежащей с t на прямой

$y_1 - t_1 = y_2 - t_2$, - величину α. Причем вследствие выпуклости и компактности множества $eph(F)$ и с учетом формулы (6) каждой π-оптимальной векторной оценке y соответствует единственная целевая точка t на отрезке $[\tau^1,\tau^2]$ такая, что $y(t)=t-\bar{\theta}(t)$, и наоборот, каждой целевой точке из отрезка $[\tau^1,\tau^2]$ соответствует только одна π-оптимальная векторная оценка (две π-оптимальных векторных оценки не могут лежать на одной прямой вида $y_1-t_1=y_2-t_2$). Очевидно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. $\pi F=\bigcup\limits_{t\in[\tau^1,\tau^2]} y(t)$, $y(t)=t-\bar{\theta}(t)$.

Утверждение 5. Пусть $t\in R^2\setminus eph(F)$. Тогда

1) если $t_1-a_1^1>t_2-a_2^1$, то $F_2(t)=a^1$;

2) если $t_1-a_1^2<t_2-a_2^2$, то $F_2(t)=a^2$;

3) если $t_1-a_1^1\le t_2-a_2^1$ и $t_1-a_1^2\ge t_2-a_2^2$, то $\exists y(t)\in\pi F$: $y_1-t_1=y_2-t_2$ и

$y(t)=y(t')=F_1(t')=t-\bar{\theta}(t)$, где $t'=t+c$, $t'\in[\tau^1,\tau^2]$ и

$t'=\alpha\tau^1+(1-\alpha)\tau^2$, $0\le\alpha\le1$, где

$$\alpha=\frac{t_2-t_1+a_1^2-a_2^2}{a_2^1-a_1^1+a_1^2-a_2^2}. \tag{7}$$

Доказательство.

1. Для произвольного t, удовлетворяющего условию 1), множество $F_1(t)$ - часть луча $[a^1,A)$. Решая далее задачу $\max\limits_{y\in F_1(t)}(y_1+y_2)$, получаем a^1. Аналогично с a^2.

2. Прямая, проходящая через точку t параллельно прямой $y_1=y_2$, пересекает отрезок $[\tau^1,\tau^2]$ в некоторой точке t', координаты которой вычисляются по формуле (7), являющейся следствием формулы (6). Применяя утверждение 4, получаем заключение пункта 3).

Замечание. Мы предполагаем, что для ЛПР естественно указывать целевые точки вне оболочки Эджворта-Парето множества векторных оценок. Однако заметим, что

а) если ЛПР указало целевую точку t такую, что $t_1-a_1^1>t_2-a_2^1$, $t_1<a_1^1$ или $t_1-a_1^2<t_2-a_2^2$, $t_2<a_2^2$, то во множестве F, очевидно, есть точки, лучшие по обоим показателям (критериям). Это a^1 и a^2 соответственно, которые можно и предложить ЛПР в качестве возможного решения;

б) если целевая точка $t\notin T''$ и удовлетворяет условию 3) утверждения 5, то соответствующая ей π-оптимальная векторная оценка будет совпадать с π-оптимальной векторной оценкой, полученной для целевой точки $t' = t + c$, где $t' \in [\tau^1, \tau^2]$ и вычисляется по формуле (7).

Алгоритм построения множества Парето
и выбора оптимального решения

Рассмотрим отображение $F_1(t)$ в точках $t = \alpha\tau^1 + (1-\alpha)\tau^2$, $0 \le \alpha \le 1$. В этом случае F_1 - функция переменного α, причем согласно утверждению 4, отрезок [0,1] под действием F_1 переходит во множество Парето, представляющее собой некую ломаную линию. Обозначим эту функцию как $F(\alpha)$. Очевидно, $F(\alpha) = t(\alpha) - \bar{\theta}(t(\alpha))$ - выпуклая кусочно-линейная на [0,1]. Обозначим ее точки излома $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_1$,.., $\hat{\alpha}_p$.

Алгоритм дробления отрезка $[\tau^1, \tau^2]$.

Точки излома функции $F(\alpha)$ будем находить методом, предложенным в [8]. Пусть $\hat{\alpha}_0 = 0$. $F(\hat{\alpha}_0) = F(\tau^2) = a^2$.

1. Покажем, как найти точку $\hat{\alpha}_1$, ограничивающую первый участок линейности $F(\alpha)$.

1) Найдем точку β', лежащую на первом участке линейности.

а) определим последовательность точек $\beta_i = \beta / 2^i$, $i = 0,1,2,...$, где β - правая граница рассматриваемого отрезка из [0,1]. На начальном этапе β=1.

в) будем последовательно вычислять значение $F(\alpha)$ в точках β_i и проверять равенство

$$F(\beta_{i+1}) = (F(0) + F(\beta_i))/2. \qquad (8)$$

За конечное число шагов найдем точку $0 < \beta' \le \hat{\alpha}_1$ такую, что $F(0), F(\beta_i) = F(\beta'), F(\beta_{i+1})$ лежат на одном отрезке (рис.2).

Если (8) оказалось верным уже при i=0, то $F(\alpha)$ линейна на [0,1] и $\hat{\alpha}_1$=1. Иначе $F(\alpha)$ имеет изломы на [0,1].

2) Аналогично β' найдем точку β'', лежащую на последнем участке линейности. Для этого определим последовательность точек $\beta_i = 1 - \beta / 2^i$.

3) Найдем точку B^* пересечения прямых, проходящих через первый и последний участки линейности, и соответствующую целевую точку $t^* \in [\tau^2, \tau^1]$ (рис.3). Если $B^* = F_1(t^*)$, то $F(\alpha)$ имеет единственный

излом в точке $\alpha^* = \hat{\alpha}_1 = \dfrac{t_2^* - t_1^* + a_1^2 - a_2^2}{a_2^1 - a_1^1 + a_1^2 - a_2^2}$.

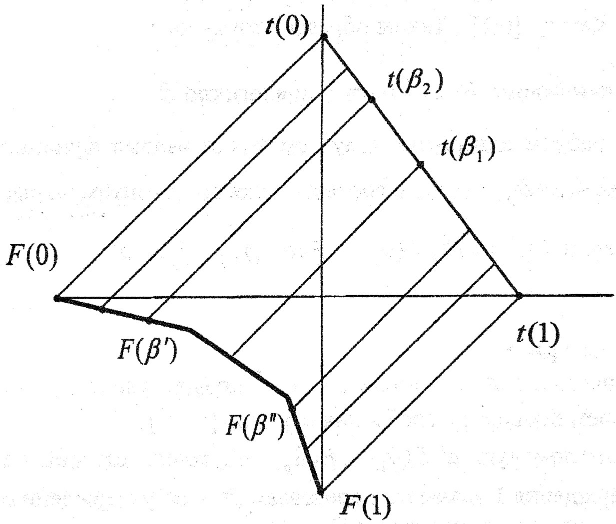

Рис. 2

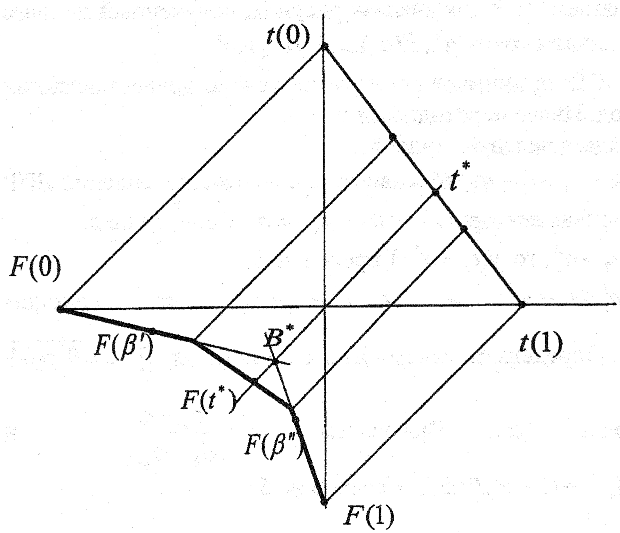

Рис. 3

Иначе определяем последовательность $\beta_i = \alpha^*/2^i$ и описанные выше действия по поиску $\hat{\alpha}_1$ повторяем для отрезка $[0,\alpha^*]$, в котором остается первый участок линейности $F(\alpha)$ и на котором интервалов линейности строго меньше, чем на $[0,1]$. Таким образом, точку $\hat{\alpha}_1$ найдем за конечное число шагов.

2. Остальные точки излома $F(\alpha)$ находим аналогично $\hat{\alpha}_1$.

3. В результате работы алгоритма получаем точки излома функции $F(\alpha)$: $0=\hat{\alpha}_0<\hat{\alpha}_1<\ldots<\hat{\alpha}_{p-1}<\hat{\alpha}_p=1$ и соответствующие π-оптимальные векторные оценки $F(\hat{\alpha}_0)=a^2$, $F(\hat{\alpha}_1),..,$ $F(\hat{\alpha}_{p-1})$, $F(\hat{\alpha}_p)=a^1$.

Основной алгоритм.

Шаг 1. Находим точки a^1, a^2, а также τ^1 и τ^2 по формуле (5).

Шаг 2. Запускаем процедуру дробления отрезка $[\tau^1,\tau^2]$.

Шаг 3. Строим ломаную $a^2\, F(\hat{\alpha}_1)\ldots F(\hat{\alpha}_{p-1})\, a^1$, точки которой по следствию 1 из утверждения 1 являются паретовскими, а по утверждению 4 они и только они составляют множество Парето.

Шаг 4. Предлагаем ЛПР для анализа рисунок, полученный на шаге 3, где указаны координаты точек $a^2, F(\hat{\alpha}_1),.., F(\hat{\alpha}_{p-1}), a^1$.

Шаг 5. Если ЛПР принимает решение на основе предоставленной информации, - выход. Иначе переходим на шаг 6.

Шаг 6. ЛПР задает целевую точку t.

Шаг 7. Если $t_1 - a_1^1 > t_2 - a_2^1$, то в качестве возможного решения ЛПР предлагается паретовская векторная оценка $y(t)=a^1$. Переход на 5.

Если $t_1 - a_1^2 < t_2 - a_2^2$, то $y(t)=a^2$. Переход на 5.

Если $t_1 - a_1^1 \le t_2 - a_2^1$ и $t_1 - a_1^2 \ge t_2 - a_2^2$, то находим $\alpha = \dfrac{t_2 - t_1 + a_1^2 - a_2^2}{a_2^1 - a_1^1 + a_1^2 - a_2^2}$. Определяем, какому из отрезков $[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}_{k+1}]$, $k=\overline{0,p-1}$ принадлежит точка α. Вычисляем $\alpha' = \dfrac{\hat{\alpha}_k - \alpha}{\hat{\alpha}_k - \hat{\alpha}_{k-1}}$ и $y(t)=F(\alpha')=\alpha' F(\hat{\alpha}_{k-1})+(1-\alpha')F(\hat{\alpha}_k)$. Переход на 5.

Литература

1. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. - М.: Наука, 1971.
2. Charnes A., Cooper W.W. Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. – Wiley, New York, 1961.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
4. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. – М.: Радио и связь, 1992.
5. Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization. – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999
6. Чуркина С. Ю. Поиск эффективных решений многокритериальных задач методом целевых уровней. – Прикладная математика и информатика №7, М.: изательство факультета ВмиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2001, с. 127-135.
7. Wierzbicki A. A. Mathematical Basis for Satisficing Decision Making. // Mathematical Modelling 3, №5, 1982, 391-405.
8. Смирнов М. М. Методы аппроксимации множества Парето, основанные на обратной логической свертке, и их использование в сетевой оптимизации: дис. канд. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, ф. ВМиК, 1996.