Д.С. Огнева, Д.Ю. Голембиовский

РАСЧЕТ ПРЕМИЙ ОПЦИОНОВ НА ОСНОВЕ ARIMA–GARCH МОДЕЛЕЙ ДОХОДНОСТИ БАЗОВОГО АКТИВА

1. Введение

Временные ряды доходностей ценных бумаг с фиксированным доходом, фондовых индексов и акций характеризуются автокоррелированностью квадратов своих значений [1, 2]. В эконометрике данная особенность описывается гетероскедастичной моделью ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity model, авторегрессионная модель условной гетероскедастичности). Возможность варьировать распределение ошибок, модель условного среднего и вид ARCH-компоненты позволяет достаточно точно описывать реальную рыночную динамику цены [3, 4].

ARIMA-GARCH [5] — одна из моделей представленного семейства с нефиксированным распределением ошибок, в которой ряд условной дисперсии представлен обобщенной GARCH (generalized ARCH), ряд условного среднего — ARIMA (autoregressive integrated moving average, интегрированная модель авторегрессии и скользящего среднего). По сути модель GARCH ряда является моделью ARMA (базовой формой ARIMA) квадратов его ошибок. На основе выбранной модели стоимости базового актива можно рассчитать стоимость любого деривативa, в частности европейских опционов [6].

Фундаментальными в области ценообразования опционов являются работы Блэка (Black), Шоулса (Scholes) [7] и Мертона (Merton) [8]. Однако, существенная предпосылка модели Блэка-Шоулса состоит в том, что цена базового актива следует геометрическому броуновскому движению, что противоречит переменной волатильности реальной рыночной динамики, кластеризованностью дисперсии доходности актива, несимметричным распределением ошибок, эффектом левериджа (leverage effect). Все упомянутые стилизованные факты хорошо описываются асимметричными гетероскедастичными GARCH.

На практике для определения справедливой цены финансового инструмента используется безарбитражный (no-arbitrage, no free lunch) подход [9], полагающий отсутствие безрисковой прибыли при отсутствии вложений. Точная математическая формулировка описанного принципа опирается на понятие риск-нейтральной меры (risk-neutral, эквивалентной мартингальной, equivalent martingale, EMM). Так как

ARCH-модель является дискретной по времени и мощность множества ее состояний континуальна, то рынок не является полным, следовательно, риск-нейтральная мера находится неоднозначно [10]. Примерами служат локальная риск-нейтральная мера Дуана (Duan, local RNM) и меры, построенные по преобразованию Эшера (Esscher transform, ET, Esscher principle) и по расширенному принципу Гирсанова (extended Girsanov principle, EGP). Переход от физической к риск-нейтральным мерам позволяет вычислить цену опциона как среднее дисконтированное значение его выплат.

Работа построена следующим образом. В секции 2 последовательно формализованы ARIMA- и GARCH-компоненты, условие стационарности соответствующих рядов, виды ARIMA- и GARCH- моделей. В секции 3 описаны ключевые результаты по образованию цен опционов, доходность базового актива которого представлена ARIMA-GARCH- и GARCH-моделями.

2. ARIMA-GARCH модель базового актива

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$, где $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Далее пусть на этом вероятностном пространстве задан ряд цен базового актива опциона $s = (s_t)_{t=0}^T$ такой, что

$$s_t = s_0 e^{y_t}, \quad y_0 = 0, \quad t = 0, ..., T.$$

Процесс y_t — непрерывная ставка процента (compound return, далее для простоты изложения — доходность) базового актива. Напомним, что ряд y_t стационарен (в широком смысле), если $\mathbb{E}y_t = const$ и $Cov(y_t, y_{t-k}) = f(k)$ зависит только от разницы $k = 0, ..., t$, при $t = 0, ..., T$.

Пусть $(\varepsilon_t)_{t=1}^T$ — белый шум, т. е. $\varepsilon_t \sim i.i.d.\, F(0, \sigma^2), t = 1, ..., T,$ — непрогнозируемая случайная компонента динамики y_t в момент времени t. Тогда модели авторегрессии AR(p), скользящего среднего MA(q) и их комбинация ARMA(p, q) для y_t имеют следующий вид:

$$AR(p): \qquad y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

$$MA(q): \qquad y_t = \phi_0 + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (2)$$

$$ARMA(p, q): \qquad y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}. \qquad (3)$$

Действительные параметры модели ϕ_k, $k = 0, ..., p$, и θ_l, $l = 1, ..., q$, характеризуют вклад в формирование нового значения y_t его предшествующих значений и предшествующих значений ряда ошибок соответственно; p, q — порядок модели, отвечающий за максимальный лаг AR- и MA-части; для упрощения схемы процесса и предотвращения переобучения рассматривают небольшие значения коэффициентов $p, q \leq 2$.

Так как AR, MA и ARMA модели применяются только для стационарных рядов, то (безусловное) среднее значение y_t не зависит от t:

$$m = \mathbb{E}y_t = \begin{cases} \text{ур.(1):} & \phi_0 + \phi_1 m + \phi_2 m + \cdots + \phi_p m, \\ \text{ур.(2):} & \phi_0, \\ \text{ур.(3):} & \phi_0 + \phi_1 m + \phi_2 m + \cdots + \phi_p m. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, вычитание (4) из (1)–(3) приведет к центрированию y_t: параметры ϕ_0 уничтожатся, ряд y_t заменится на ряд $y_t - m$, а коэффициенты сохранятся. Следовательно, рассмотрение случая $\phi_0 = 0$ не нарушает общности рассуждений. Перепишем формулу (3) более лаконично, используя многочлены лагового оператора $Ly_t = y_{t-1}$:

$$\phi(L)y(t) = \theta(L)\varepsilon_t, \qquad y(t) = \frac{\theta(L)}{\phi(L)}\varepsilon_t = \psi(L)\varepsilon_t, \tag{5}$$

где $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)$ и $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)$.

Данные полиномы позволяют сформулировать критерий стационарности процесса ARMA(p, q), определенного уравнениями (5): ряд y_t стационарен тогда и только тогда, когда все корни многочлена $\phi(x) = 0$ лежат за пределами единичного круга [23].

Таким образом, корни характеристического полинома $\phi(x)$, модуль которых меньше единицы, свидетельствуют о взрывном характере процесса; единичные — о нестационарном. На практике, если статистические тесты не отклоняют гипотезу о наличии единичного корня, то анализируются последовательности первых, вторых и т. д. разностей исходного временного ряда, и первый полученный стационарный ряд разностей (обычно первого или второго порядка) представляется ARMA-моделью. Указанный алгоритм подробно описывает интегрированную авторегрессионную моделью ARIMA.

Введем разностный оператор Δ: $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, тогда

$$ARIMA(p, d, q)\big[y_t\big] = ARMA(p, q)\big[\Delta^d y_t\big], \tag{6}$$

где d — порядок разностного ряда. Исходя из (3) и (6), получим итоговую формулу ARIMA(p, d, q):

$$\Delta^d y_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta^d y_{t-1} + \phi_2 \Delta^d y_{t-2} + \cdots + \phi_p \Delta^d y_{t-p} + \\ \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

Модель ARIMA популярна в анализе финансовых временных рядов благодаря простоте интерпретации и богатству семейства описываемых процессов [11]. Условная дисперсия ARIMA-модели относительно предыдущего момента времени константа и равна безусловной дисперсии ε_t. Чтобы учитывать особенности финансовых рядов Энгл (Engle) [12] предложил авторегрессионную модель условной гетероскедастичности ARCH($\check{q}$). Рассмотрим ее обобщение GARCH($\check{p}$, $\check{q}$), предложенное Боллерслевым (Bollerslev) [13]:

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_t \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim F(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \alpha_2 y_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_{\check{p}} y_{t-\check{p}}^2 + \\ &\quad + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \cdots + \beta_{\check{q}} \sigma_{t-\check{q}}^2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha_k, k = 0, ..., \check{p}$, и $\beta_l, l = 1, ..., \check{q}$, — неотрицательные параметры модели, характеризующие вклад предшествующего момента времени исследуемого ряда и ряда ошибок соответственно в формирование нового значения; $\check{p}, \check{q}$ — порядок модели, отвечающий за количество значимых лагов ряда и его дисперсии соответственно; по аналогии с ARMA значения $\check{p}$ и $\check{q}$ берутся небольшими. Для стационарности представленной модели достаточно выполнения следующего неравенства [13]:

$$\sum_{k=1}^{\check{p}} \alpha_k + \sum_{l=1}^{\check{q}} \beta_l < 1.$$

Модель GARCH [4, 14] позволяет описывать кластеризованность, вытянутость и тяжелые хвосты распределения доходности актива $y_t = \ln\bigl(s_{t+1}/s_t\bigr)$, где $(s_t)_{t=0}^T$ — динамика цены актива. Меняя каноническую форму (7), можно получить множество асимметричных моделей, учитывающих эффект левериджа. Данное свойство финансовых рядов [11] заключается в отрицательной коррелированности величин y_{t-1} и σ_t, т.е. $Cov(y_{t-1}, \sigma_t) < 0$. Этот феномен нельзя объяснить стандартной GARCH -моделью, т.к. дисперсия σ_t^2 зависит от квадратов значений ряда y_{t-i}^2 и нечувствительна к знаку y_{t-i}. В таблице 1 приведены примеры моделей первого порядка, обладающих эффектом левериджа [3, 16]. Данные примеры являются лишь небольшой частью списка аббревиатур разрастающихся GARCH-методов. Например, Боллерслев [17] в

Таблица 1. Примеры расширений GARCH-модели, обладающих эффектом левериджа

Аббревиатура	Расшифровка	Формула
APARCH	asymmetric power ARCH	$\sigma_t^\gamma = \omega + \beta\sigma_{t-1}^\gamma + \alpha\gamma(\lvert y_{t-1}\rvert - \delta y_{t-1})^\gamma$
SQR-GARCH	square-root GARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\lvert y_{t-1}\rvert$
GJR-GARCH	Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH	$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha y_{t-1}^2 + \delta y_{t-1}^2 \cdot \mathbb{I}\{y_{t-1} < 0\}$
EGARCH	exponential GARCH	$\ln\sigma_t^2 = \omega + \beta\ln\sigma_{t-1}^2 + \alpha\left\lvert\frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right\rvert + \gamma\frac{y_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$
ARCH-M	ARCH in mean	$y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \gamma\sigma_t^2 + \varepsilon_t$ $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \gamma\sigma_t + \varepsilon_t$ $y_t = \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \gamma\ln\sigma_t + \varepsilon_t$

качестве приложения к обзору приводит справочник с длинным списком связанных с ARCH-моделями сокращений.

Кроме формы GARCH, можно менять нормированное распределение $F(\cdot,\cdot)$ для ϵ_t. В литературе описаны модели со следующими законами распределения: нормальное [18], Стьюдента (Student, t-innovation) [19], обобщенное экспоненциальное распределение (generalized exponential) [20], сложное пуассоновское (compound Poisson) и negative binomial case [21], популярное в последнее время variance-gamma распределение [22] и др. Более того, можно менять и модель среднего. Включая стандартную форму (7), наиболее популярными являются ARIMA-GARCH и GARCH-в-среднем (GARCH-in-mean, GARCH-M). Сравнение данных моделей представлено в [23].

Несмотря на популярность модели, в статьях каноническая форма ARIMA(p, d, q)-GARCH($\check{p}, \check{q}$) в явном виде не указана:

$$\begin{aligned}
\Delta^d y_t &= m_t + \sigma_t\epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim F(0,1)\\
m_t &= \phi_0 + \phi_1\Delta^d y_{t-1} + \phi_2\Delta^d y_{t-2} + \dots + \phi_p\Delta^d y_{t-p} +\\
&\quad + \theta_1\sigma_{t-1}\epsilon_{t-1} + \theta_2\sigma_{t-2}\epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\sigma_{t-q}\epsilon_{t-q},\\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1\sigma_{t-1}^2 + \alpha_2\sigma_{t-2}^2 + \dots + \alpha_{\check{p}}\sigma_{t-\check{p}}^2 +\\
&\quad + \beta_1\sigma_{t-1}^2\epsilon_{t-1}^2 + \beta_2\sigma_{t-2}^2\epsilon_{t-2}^2 + \dots + \beta_{\check{q}}\sigma_{t-\check{q}}^2\epsilon_{t-\check{q}}^2.
\end{aligned}$$

В основном авторы приводят отдельно формулы ARIMA-компоненты, отдельно — GARCH-компоненты, при этом сама модель часто описывается в книгах [5, 11, 16] и реже в статьях [23, 24]. Ключевой моделью в статьях выступает GARCH и ее разнообразные модификации с различными распределениями ошибок. Некоторые полученные результаты не зависят от модели среднего, например, переход к риск-нейтральной мере методом Дуана, преобразованиями Эшера и Гирсанова [25], таким образом, они остаются справедливыми для ARIMA-GARCH-модели в частности.

3. Способы вычисления премий опционов на основе ARIMA-GARCH-модели доходности базового актива

GARCH-модели не позволяют вывести формулу стоимости опциона в аналитическом виде. Редким исключением является работа Хестона (Heston) и Нэнди (Nandi) [2] со специфичным GARCH-процессом доходности с шагом δ:

$$\log s_t = \log s_{t-\delta} + r + \lambda\sigma_t^2 + \sigma_t\epsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\check{p}} \alpha_j \sigma_{t-j\delta}^2 + \sum_{j=1}^{\check{q}} \beta_j (\epsilon_{t-j\delta} - \gamma_j \sigma_{t-j\delta})^2.$$

Авторы первыми вывели формулу стоимости опциона в предположении логнормальности модели базового актива и выполнения формулы Блэка-Шоулса для колл-опциона за один период до его экспирации:

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-(T-t)r}\mathbb{E}^Q[\max(s_T - K, 0)|\mathcal{F}_t] = \\ &= \frac{1}{2}s_t + \frac{e^{-(T-t)r}}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}\Big[\frac{K^{-i\phi} f(i\phi+1)}{i\phi f(1)}\Big] d\phi - \\ &- Ke^{-(T-t)r}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}\Big[\frac{K^{-i\phi} f(i\phi)}{i\phi}\Big] d\phi\Big), \end{aligned}$$

где $f(i\phi)$ — характеристическая функция риск-нейтральной динамики доходности y_t базового актива. Полученная формула является следствием непрерывного решения Хестона [1] для стохастических аналогов и верна, как утверждают авторы, для ARMA-GARCH-моделей. Численные результаты (рис. 1) для безарбитражной модели GARCH$(1,1)$ соответствовали полученным для непрерывной модели при сравнительной простоте реализации и показывали меньшую суммарную погрешность RMSE (root mean square error, среднеквадратичная ошибка), MAE (mean absolute error, % error, средняя абсолютная ошибка), MOE (mean outside error, средняя внешняя ошибка) относительно модели Блэка-Шоулса и ее модификации Мертоном.

		Days to Expiration								
		<40			[40–70]			>70		
Model	Moneyness	RMSE	% Error	MOE	RMSE	% Error	MOE	RMSE	% Error	MOE
BS										
	<0.95	0.937	2.78	−0.606	1.410	4.10	−0.946	2.157	6.03	−1.657
	[0.95, 0.99)	0.826	5.49	−0.470	1.217	6.78	−0.768	1.663	8.19	−1.226
	[0.99,1.01)	0.701	14.17	0.333	0.763	9.30	0.328	0.747	7.05	−0.096
	[1.01, 1.05]	0.785	68.63	0.588	1.151	38.80	0.916	1.155	25.32	0.817
	>1.05	0.337	191.82	0.232	0.919	157.19	0.732	1.189	98.46	1.005
Ad hoc BS										
	<0.95	0.628	1.86	0.199	0.687	2.00	0.039	1.186	3.31	−0.174
	[0.95, 0.99)	0.640	4.26	0.243	0.898	5.00	0.522	0.947	4.67	0.571
	[0.99, 1.01)	0.512	10.35	−0.064	0.826	10.08	0.393	0.941	8.88	0.357
	[1.01, 1.05]	0.405	35.42	−0.083	0.659	22.24	0.097	1.189	26.04	−0.168
	>1.05	0.163	92.32	−0.016	0.842	144.13	−0.235	1.581	130.96	−0.692
GARCH (non-updated)										
	<0.95	0.672	2.00	−0.441	0.730	2.12	−0.360	0.927	2.59	−0.523
	[0.95, 0.99)	0.687	4.57	−0.140	0.822	4.58	−0.059	0.899	4.43	−0.212
	[0.99, 1.01)	0.685	13.85	0.024	0.805	9.82	0.269	0.953	9.00	0.270
	[1.01, 1.05]	0.427	37.36	−0.141	0.595	20.08	0.073	0.826	18.09	0.269
	>1.05	0.161	91.44	−0.097	0.265	45.32	−0.156	0.391	32.34	0.020
GARCH (updated)										
	<0.95	0.607	1.80	−0.310	0.593	1.73	−0.160	0.860	2.40	−0.502
	[0.95, 0.99)	0.621	4.13	−0.015	0.609	3.39	0.050	0.720	3.55	−0.283
	[0.99, 1.01)	0.625	12.64	0.060	0.590	7.20	0.252	0.644	6.08	0.100
	[1.01, 1.05]	0.402	35.15	−0.192	0.455	15.35	−0.051	0.526	11.52	0.089
	>1.05	0.154	87.30	−0.093	0.295	50.51	−0.185	0.341	28.25	−0.135

Рис. 1. Таблица критериев качества для европейских колл-опционов в работе [2]

Во всех остальных работах цена опциона рассчитывается численно как среднее дисконтированное значение $\tilde{x}_t$ его выплат по риск-нейтральной мере Q:

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{x}_t|\mathcal{F}_p] = \tilde{x}_p, p < t \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}^Q[e^{y_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = e^r,$$

свойство мартингальности Q является математической записью безарбитражного (справедливого) ценообразования, т. к. отсутствует рисковая прибыль [9]. Рассмотрим часто используемые риск-нейтральные меры.

Известно, что в предположении гетероскедастичности рынки являются неполными [25], т.е. существуют нереплицируемые условные обязательства. Поэтому количество риск-нейтральных мер, позволяющих вычислять стоимости деривативов, бесконечно. В общем случае выбор одной из них определяется экономическими основаниями, в частности, оптимальностью некоторого критерия.

Рубинштейн (Rubinstein) и Бреннан (Brennan) [26] определили экономику репрезентативных агентов (representative agents), максимизирующих свое благосостояние, ввели функцию совокупного благосостояния (aggregate wealth) и установили достаточные условия для риск-нейтральной оценки (risk-neutral valuation relationship, RNVR) европейского опциона: функции благосостояния и стоимости базового актива должны иметь преобразованное двумерное нормальное распределение (transformed bivariate normal distribution) с монотонной дифференцируемой функцией преобразования. По аналогии Дуан [18] рассчитал RNVR для GARCH-процесса с нормально распределенными ошибками, которая получила название локальной риск-нейтральной оценки (local RNVR), т. к. требовала постоянства условной дисперсии на одном периоде относительно изменения риск-нейтральной меры. При физической мере P доказанный переход к эквивалентной мартингальной мере Q переводит процесс изменение доходности акции за один период согласно формулам:

$$\begin{aligned} y_t &= r + \lambda\sigma_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t\big|\mathcal{F}_{t-1} \sim i.i.d.\,\mathcal{N}(0,\sigma_t^2), \qquad (8)\\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

в риск-нейтральную динамику:

$$\begin{aligned} y_t &= r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \xi_t, \quad \xi_t\big|\mathcal{F}_{t-1} \sim i.i.d.\,\mathcal{N}(0,\sigma_t^2),\\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\big(\xi_{t-i} - \lambda\sigma_{t-i}\big)^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

где r — постоянная безрисковая ставка за один период, λ — коэффициент рисковой премии. Тогда цена актива и стоимость опциона выражаются соответственно следующими уравнениями:

$$s_T = s_t \exp\left((T-t)r - \frac{1}{2}\sum_{i=t+1}^{T}\sigma_i^2 + \sum_{i=t+1}^{T}\xi_i\right),$$
$$c_t = e^{-(T-t)r}\mathbb{E}^Q[\max(s_T - K, 0)|\mathcal{F}_t];$$

где T — время экспирации опциона, K — его цена исполнения.

Заметим, что подстановка $p = q = 0$ переводит формулу (8) в стандартный гомоскедастичный логнормальный процесс, как в работе Блэка–Шоулса. Более того, преобразование работает и для любой GARCH-модификации.

Проведенные численные эксперименты с индексом S&P 100 позволили изучить влияние исходной условной дисперсии базового актива на стоимость опциона, более того, в соответствии с исследованиями Рубинштейна и Шейка(Sheikh) была построена "улыбка" волатильности для GARCH-модели (рис. 2–3), возрастающая по времени до экспирации колла "около денег"(at the money, т. е. цена базового актива равна цене исполнения).

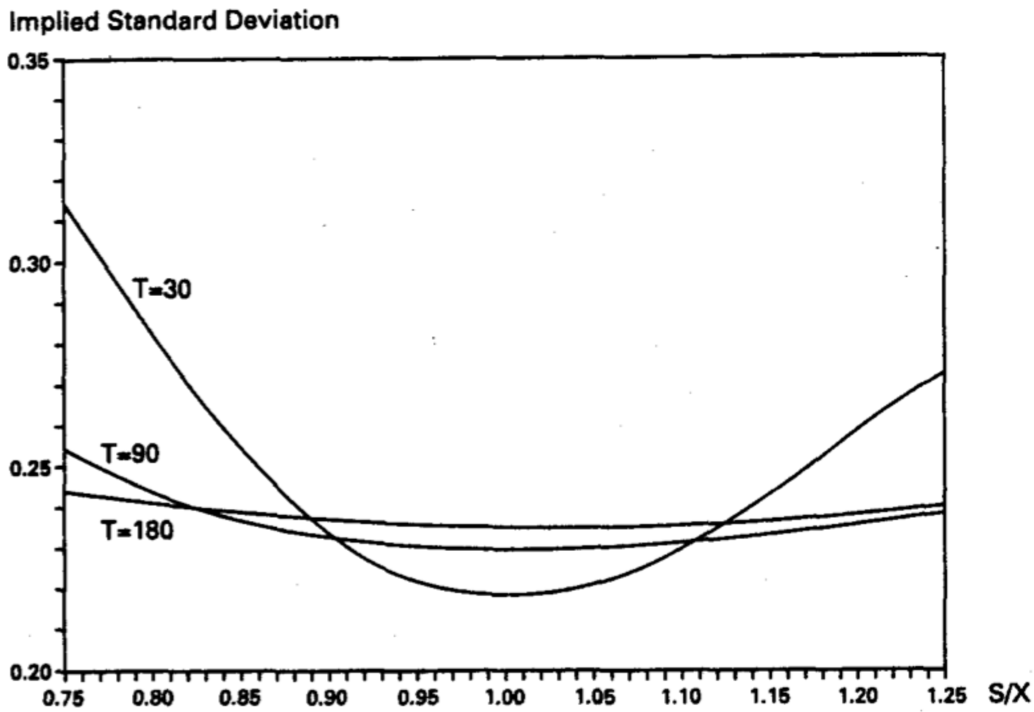

Рис. 2. Низкая условная волатильность и ее влияние на подразумеваемую волатильность GARCH модели [18]

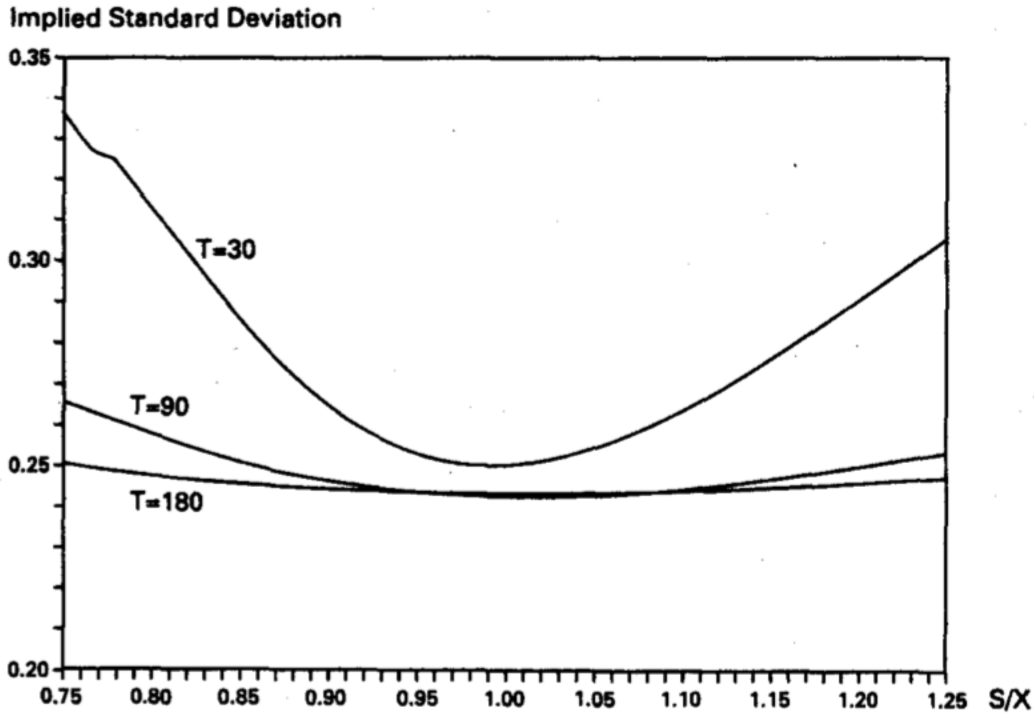

Рис. 3. Высокая условная волатильность и ее влияние на подразумеваемую волатильность GARCH модели [18]

Подход Дуана использует неаффинную модель GARCH-M и программный метод моделирования Монте-Карло для ценообразования опционов на исторических данных в отличие от Хестона и Нэнди [2], которые применяют аналитическую формулу к историческим данным и наблюдаемым рыночным котировкам. Но несмотря на различные подходы, обе описанных модели превосходят гомоскедастичные аналоги для построения цен деривативов.

В продолжение работы Дуана аналитический вывод для ARMA-модели реализован в работе Хуанга (Huang) и Ву (Wu) [24], в которой стоимости колл- и пут-опционов определялись соответственно следующими формулами:

$$\ln \frac{s_t}{s_{t-1}} = \phi_0 + \sum_{j=1}^{p} \phi_j \ln \frac{s_{t-j}}{s_{t-j-1}} + \sigma \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}$$

$$c_t = s_t \Phi(d_1(t, T-t)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t, T-t)),$$

$$p_t = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(t, T-t)) - s_t \Phi(-d_1(t, T-t)),$$

где $d_1(t,n) = \dfrac{\ln\left(\frac{s_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_n^2\right) n}{\sigma_n \sqrt{n}},$

$$d_2(t,n) = d_1(t,n) - \sigma_n\sqrt{n},\ \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\mathbb{D}^P\Big(\ln\Big(\frac{s_T}{s_t}\Big)|\mathcal{F}_t\Big),$$

$\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения.

Рассматриваемые формулы целиком повторяют результат Блэка-Шоулса, за исключением волатильности σ_t, расширенной до функции от времени до экспирации опциона $(T-t)$, что согласуется с работами Дуана, Хестона и Нэнди. Работа также интересна модельным примером, представляющим цену опциона возрастающей функцией по уровню AR- и MA-параметров, в которой влияние авторегрессионной части существенно сильнее эффекта скользящего среднего.

Предложенные примеры используют классическую оценку LRNVR для нормально распределенных ошибок, однако, в последствии она была рассчитана для других распределений (например, Стьюдента [19], GED [30], GH [25]).

Среди оставшихся риск-нейтральных мер популярными [25] являются преобразование Эшера и расширенный принцип Гирсанова, которые также подходят для негауссовых остатков как в дискретном, так и в непрерывном времени.

Пусть $M^P_{y_t|\mathcal{F}_{t-1}}(c) = \mathbb{E}^P\big[e^{cy_t}|\mathcal{F}_{t-1}\big] < \infty$ — условная производящая функция моментов, введем δ_t — произвольный предсказуемый процесс, тогда Q называется условной преобразованной по Эшеру мерой P, если существует условная производящая функция моментов:

$$\frac{dQ}{dP}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \prod_{k=1}^{t} \frac{e^{\delta_k y_k}}{M_{y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(\delta_k)}.$$

Данное преобразование является расширением безусловного преобразования Эшера, введенного в финансовую литературу Гербером (Gerber) и Шиу (Shiu) [27]. В исходной статье ET применяется к ценам производных финансовых инструментов, если логарифм доходности является процессом Леви (Levy), т. е. стационарным с независимыми приращениями, что противоречит предпосылкам GARCH-модели. Условный гетероскедастичный случай также освещен в [28].

Бадеску (Badescu) [29] установил взаимосвязь между стохастическим коэффициентом дисконтирования (stochastic discount factor, SDF), оптимальной мартингальной мерой и преобразованием Эшера, выделяя последний для ценообразования опционов. Более того, он доказал, что для риск-нейтральной меры Эшера справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть процесс Z_t определяется следующим произведением:*

$$Z_t = \prod_{k=1}^{t} \frac{e^{\delta_k^* y_k}}{M_{y_k|\mathcal{F}_{k-1}}^{P}(\delta_k^*)}, \quad Z_0 = 1, \tag{9}$$

где прогнозируемый процесс δ_k^* является единственным решением уравнения:

$$M_{y_k|\mathcal{F}_{k-1}}^{P}(1+\delta_k) = e^r M_{y_k|\mathcal{F}_{k-1}}^{P}(\delta_k),\ \forall k = 1, ..., T. \tag{10}$$

Тогда мера Q^{ess} (мера Эшера) находится из равенства:

$$\frac{dQ^{ess}}{dP} = Z_T. \tag{11}$$

По аналогии с преобразованием Эшера (9)–(11) выкладки приводят к теореме, сформулированной Эллиотом (Elliott) и Маданом (Madan) [23].

Теорема 2. *Пусть процесс Z_t определяется следующим произведением:*

$$Z_t = \prod_{t=1}^{T} \frac{g_t^P\left(\frac{\tilde{s}_t}{\tilde{s}_{t-1}}\right) e^{v_t}}{g_t^P\left(e^{-v_t}\frac{\tilde{s}_t}{\tilde{s}_{t-1}}\right)},$$

где $g_t^P(\cdot)$ — условная плотность вероятности y_t на $\mathcal{F}_{t-1}$, тогда риск-нейтральная мера Q^{egp} (мера EGP) определяется уравнением:

$$\frac{dQ^{egp}}{dP} = Z_T.$$

Технически принцип Гирсанова сохраняет нетронутой дисперсию процесса, сдвигая среднее значение физической плотности распределения ошибок.

Три представленных преобразования мер были рассмотрены Бадеску, Эллиотом, Кулпергером (Kulperger), Миеттиненом (Miettinen), Сью (Siu) в статье [25] как стохастические коэффициенты дисконтирования, эквивалентные обобщенной локальной RNVR (GLRNVR), преобразованию Эшера (conditional ET, CTE), расширенному принципу Гирсанова (mean correcting martingale measure, MCMM) для GARCH-модели с ошибками, распределенными по обобщенному гиперболическому закону и по его подклассам. Примечательно, что только в случае с нормально распределенными ошибками полученные три риск-нейтральные динамики идентичны.

Эмпирический анализ (рис.4–7) проводился на основе исторических данных индекса S&P 500 с последующим использованием метода Монте-Карло для моделирования стоимости опциона. Результаты подтвердили, что для каждого типа SDF с условно асимметричным распределением ошибок моделируют реальный ряд лучше, чем с нормальным. Используя информационные критерии качества, авторы выделили NIG-распределение (Normal Inverse Gaussian) ошибок, как наиболее точное. Среди преобразований CTE показало лучшие результаты на долгосрочной перспективе и для опционов "вне денег" (out of money, т. е., например, для колл-опциона цена базового актива ниже цены исполнения), GLRNR (кроме NIG-распределения) и MCMM более адекватно отобразили стоимости краткосрочных деривативов.

Данные меры удобны сравнительной простотой и универсальностью, но не исключают обобщения и частные случаи. Кристофферсон (Christoffersen), Якобс (Jacobs) и Орнсаналай (Ornthanalai) [14] предложили следующее условное преобразование для нормально распределенных ошибок:

$$\frac{dQ}{dP}\Big|\mathcal{F}_t = \exp\left(-\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{\mu_i - r_i}{\sigma_i^2}\varepsilon_i + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_i - r_i}{\sigma_i^2}\Big)^2\sigma_i^2\right)\right).$$

Отличающееся подходом, оно дает тот же результат, что и локальная риск-нейтральная оценка Дуана (8) при $r_t = r$, $\mu_t = r + \lambda\sigma_t$.

Model	RMSE	ARPE (%)	APE (%)
Normal	4.304	7.37	5.92
NIG-MCMM	2.551	5.21	3.53
NIG-ESS	1.498	4.30	2.21
NIG-GLRNVR	2.096	6.17	3.47
HYP-MCMM	2.748	6.00	3.75
HYP-ESS	2.245	4.84	2.88
HYP-GLRNVR	3.166	6.31	4.14
VG-MCMM	3.001	6.51	4.17
VG-ESS	2.229	4.85	3.19
VG-GLRNVR	2.024	4.66	2.96

Рис. 4. Таблица критериев качества для европейских колл-опционов в работе [18]

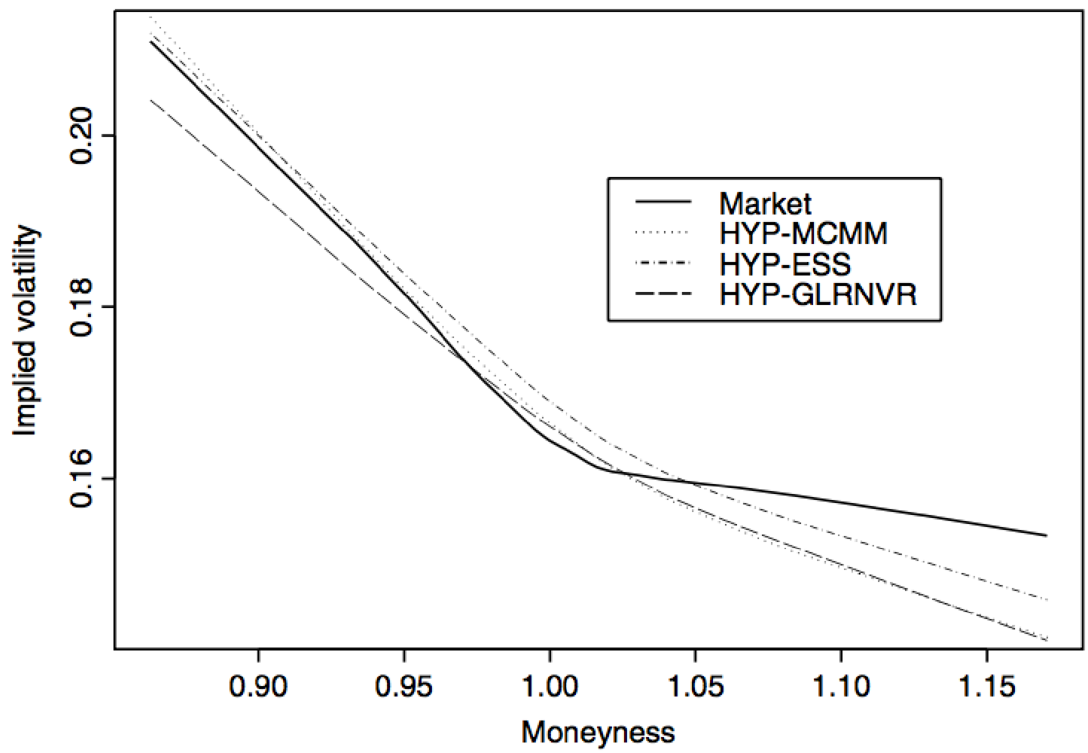

Рис. 5. Подразумеваемая волатильность TGARCH модели с GH-распределением ошибок [15]

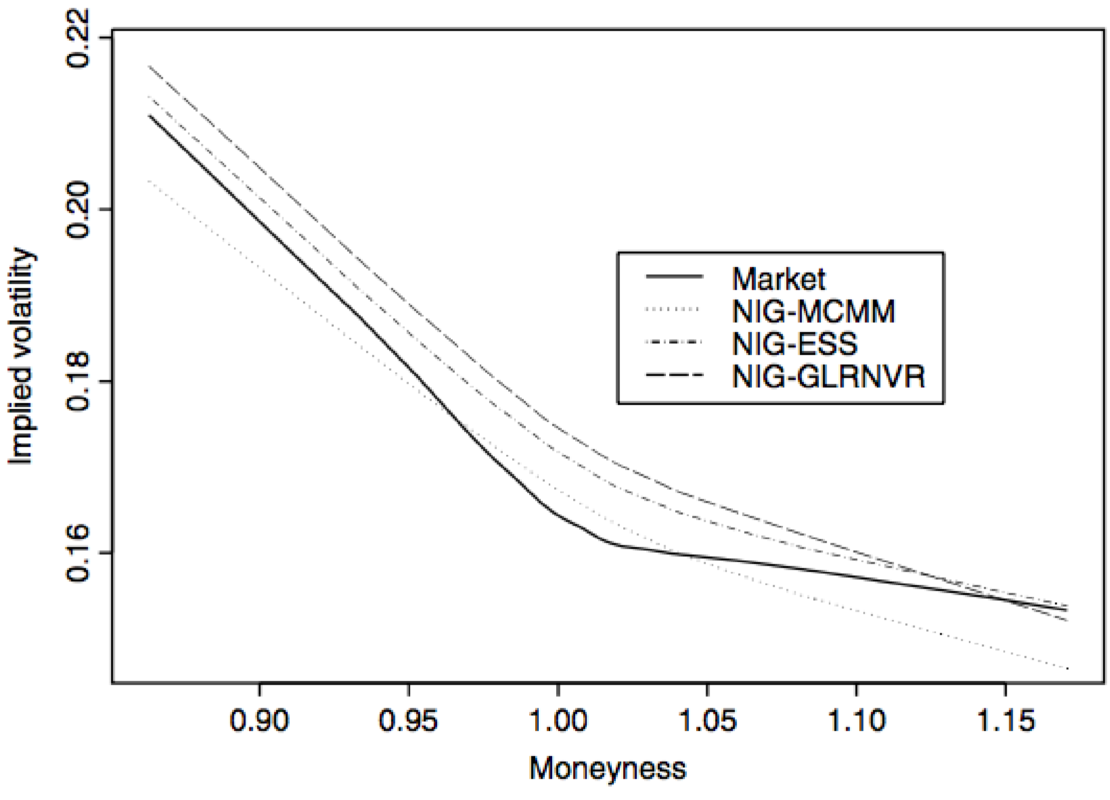

Рис. 6. Подразумеваемая волатильность TGARCH модели с NIG-распределением ошибок [15]

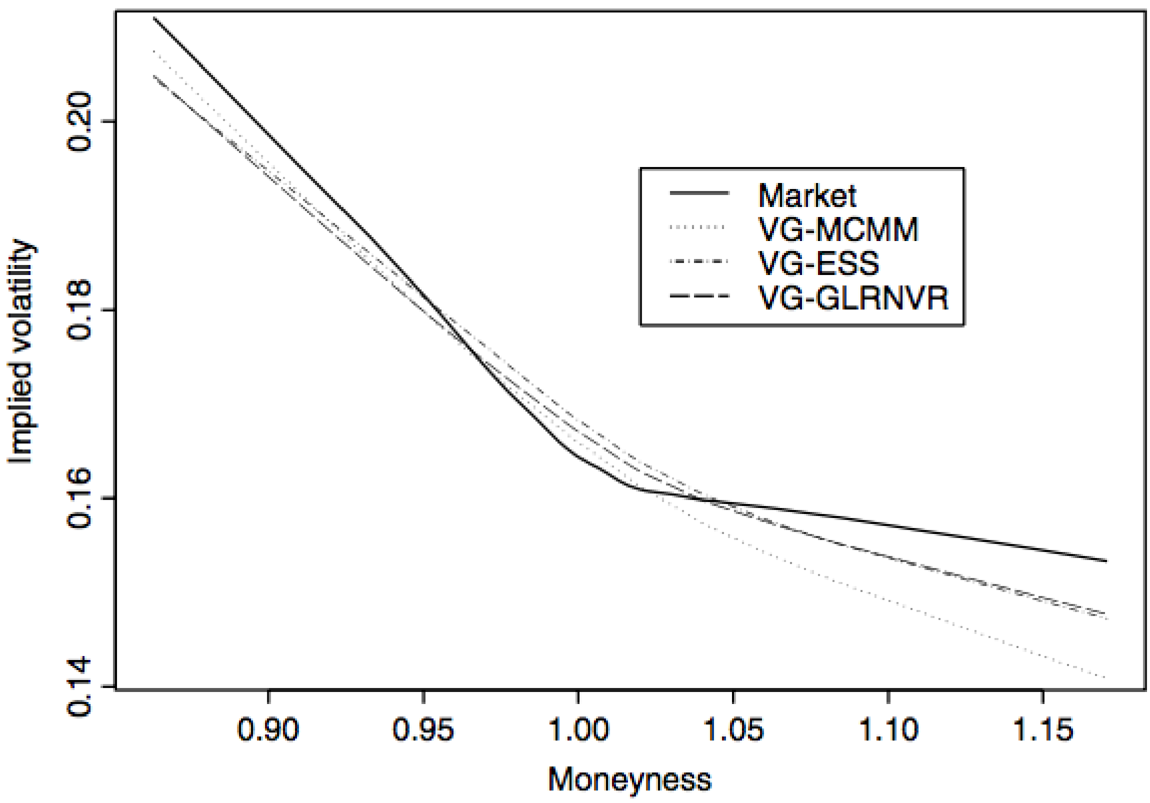

Рис. 7. Подразумеваемая волатильность TGARCH модели с VG-распределением ошибок [25]

В следствие того, что модели с нормально распределенными ошибками не согласуются с реальными данными [11], авторы описали общий случай распределения ошибок $\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim F(0, \sigma_t^2)$, несколько иначе формализующий условное преобразование Эшера. Для заданной последовательности $\{\nu_t\}$ кандидат–производная Радона-Никодима определена следующим образом:

$$\frac{dQ}{dP}\Big|\mathcal{F}_T = \exp\Big(-\sum_{t=1}^{T}(\nu_t\varepsilon_t + \Psi_t(\nu_t))\Big),$$

где $\Psi_t(\cdot)$ — натуральный логарифм производящей функции моментов, параметры ν_t задаются условием мартингальности:

$$\Psi_t(\nu_t - 1) - \Psi_t(\nu_t) + \mu_t - r_t - \Psi_t(-1) = 0.$$

Формула стоимости финансового инструмента (опциона) не зависит от преобразования физической меры и может быть записана как интеграл по фиксированной риск-нейтральной мере Q:

$$\Pi_t^Q c(s_T) = \mathbb{E}^Q\Big[e^{-(T-t)r}c(s_T)|\mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}^Q\Big[e^{-(T-t)r}\max(s_T - K, 0)|\mathcal{F}_t\Big].$$

Фактически данный пункт реализуется либо вычислением существующей аналитической формы [2], либо стохастическим численным методом (Монте-Карло, бинарные деревья).

4. Заключение

Данная работа рассматривает ARIMA-GARCH для моделирования доходности базового актива. Представленная модель сочетает простоту интерпретации с возможностью описывать широкий класс процессов за счет вариации порядка моделей, типов гетероскедастичной компоненты, видов распределений ошибок. Однако, лучшей моделью остается классическая GARCH с асимметричным и тяжелохвостым распределением ошибок.

В связи с обширностью ARCH-семейства именно модели ARIMA-GARCH посвящено небольшое число статей, при этом ARIMA-компонента и отдельно GARCH-компонента часто описывается в книгах. Ключевой в статьях выступает GARCH и ее разнообразные модификации с различными распределениями ошибок. Но многие выкладки, например, риск-нейтральные преобразования по Эшеру и Гирсанову, верны для всего семейства, потому для ARIMA-GARCH модели в частности. GARCH-модели не позволяют в явном виде вывести формулу стоимости опциона в аналитическом виде за редким специфичным исключением, потому цена опциона рассчитывается численно как среднее дисконтированное значение его выплат по риск-нейтральной мере. Риск-нейтральную меру можно построить из достаточных условий Бреннана-Рубинштейна. В статьях рассматриваются локальная RNM Дуана и меры, преобразованные по Эшеру и принципу Гирсанова. Среди риск-нейтральных мер преобразование Эшера показало лучшие результаты на долгосрочной перспективе и для опционов ”вне денег”, остальные точнее отобразили стоимости краткосрочных деривативов.

Литература

1. *Heston S.* A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financ. Stud. 1993. **6**. N 2. P. 327–343.

2. *Heston S., Nandi S.* A closed-form GARCH option pricing model // Rev. Financ. Stud. 2000. **13**. N 3. P. 585–626.

3. *Rossi E.* Univariate GARCH models: a survey // Quantile. 2010. **8**. N 8. P. 1–67.

4. *Akgiray V.* Conditional heteroscedasticity in time series of stock return: evidence and forecasts // J. Bus. 1989. **62**. N 1. P. 55–80.

5. *Patton A.* Quantitative finance // London: Univ. Lond., 2011.

6. *Халл Д.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2008.

7. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Polit. Econ. 1973. **81**. N 3. P. 637–654.

8. *Merton R.* Theory of rational option pricing // Bell J. Econ. 1973. **4**. N 1. P. 141–183.

9. *Follmer H., Schied A.* Stochastic finance. An introduction in discrete time. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.

   (*Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.)

10. *Huang S.-F., Liu Y.-C., Wu J.-Y.* An empirical study on implied GARCH models // J. Data Sci. 2012. **10** N 1. P. 87–105.

11. *Tsay R. S.* Analysis of financial time series // Hoboken: John Wiley& Sons, 2010.

12. *Engle R.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // Econometrica. 1982. **50**. N 4. P. 987–1008.

13. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // J. Econometrics. 1986. **31**. N 3. P. 307–327.

14. *Christoffersen P., Jacobs K., Ornthanalai C.* GARCH option valuation: theory and evidence // J. Derivatives. 2013. **21**. N 2. P. 8–41.

15. *Ш*иряев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. М.:Фазис, 1998.

16. *Taylor S. J.* Asset price dynamics, volatility and prediction // Princeton: Princet. Univ. Press, 2011.

17. *Bollerslev, T.* Glossary to ARCH (GARCH). Chapter in Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honour of Robert F. Engle (T. Bollerslev, J. R. Russell, M. Watson). Oxford Univ. Press. 2009.

18. *Duan J.-C.* The GARCH option pricing model // Math. Financ. 1995. **5**. N 1. P. 13–32.

19. *Bollerslev T.* A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return // Rev. Econ. Stat. 1987. **69**. N 3. P. 542–547.

20. *Nelson D.* Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach // Econometrica. 1991. **59**. N 2. P. 347–370.

21. *Embrechts P., Jensen J., Maejima M., Teugels L.* Approximations for compound Poisson and Pólya processes // Adv. Appl. Probab. 1985. **17**. N 3. P. 623–637.

22. *Finlay R., Seneta E.* Option pricing with VG-like models // Int. J. Theor. Appl. Financ. 2008. **11**. N 8. P. 943—955.

23. *Xi Y.* Comparison of option pricing between ARMA-GARCH and GARCH-M models // Univ. Western Ontar.: electr. thesis and dissert. repos., 2013.

24. *Huang Y.-C., Wu C.-W.* Implementing ARMA option pricing models // Intern. Confer. Asia-Pacif. Financ. Markets N 2.

25. *Badescu A. M., Elliott R. J., Kulperger R. et al.* A comparison of pricing kernels for GARCH option pricing with generalized hyperbolic distributions // Int. J. Theor. Appl. Financ. 2011. **14**. N 5. P. 669–708.

25. *Camara A.* A generalization of the Brennan-Rubinstein approach for the pricing of derivatives // J. Financ. 2003. **58**. N 2. P. 805–819.

26. *Gerber H. U., Shiu E. S. W.* Option pricing by Esscher transforms // T. Soc. Actuar. 1994. **46**. P. 99–191.

27. *Buhlmann H., Delbaen F., Embrechts P. et al.* No-arbitrage, change of measure and conditional esscher transforms // CWI Quarterly 1996. **9**. N 4. P. 291–317.

28. *Badescu A. M.* Option valuation under GARCH models // Univ. Western Ontar.: electr. thesis and dissert. repos., 2007.

29. *Christoffersen P., Dorion C., Jacobs K. et al.* Volatility components: affine restrictions and non-normal innovations // J. Bus. Econ. Stat. 2010. **28**. N 4. P. 483–502.