А. Н. Дарьин, Ю. Ю. Минаева

АППРОКСИМАЦИЯ ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫМИ БЫСТРЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ*

Введение

Рассмотрим задачу импульсного управления для вполне управляемой линейной системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t), \qquad (1)$$
$$J(U(\cdot)) = \mathrm{Var}\,U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \to \inf,$$

на фиксированном отрезке времени $t \in [t_0, t_1]$. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, управление $U \in \mathbb{R}^m, U(\cdot)$ выбирается из класса $BV[t_0,t_1]$ функций ограниченной вариации, матрицы $A(t), B(t)$ непрерывны. Траектория $x(t)$ начинается из точки $x(t_0 - 0) = x_0$ и соответствует управлению $u(t)$, равному обобщенной производной функции U:

$$u(t) = \frac{dU}{dt}.$$

В работах [1,2] доказано, что система (1) может быть переведена из произвольного одного состояния в любое другое на фиксированном промежутке времени $t \in [t_0, t_1]$ с минимальным значением функционала $J(U(\cdot))$ при помощи импульсного управления вида $u(t) = \sum_{i=1}^{k} u_i \delta(t - \tau_i)$, $\tau_i \in [t_0, t_1]$, где число импульсов $k \le n$, а векторы u_i отвечают за интенсивность и направление удара в момент τ_i.

В статье [3] рассматривается задача с обобщенным управлением:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$
$$J(u(\cdot)) = \rho^*[u] + \varphi(x(t_1+0)) \to \inf.$$

Функционал минимизируется по распределениям, имеющим k-ую обобщенную производную: $u \in D_k^*[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta) \supseteq [t_0, t_1]$. Здесь норма $\rho^*[u]$ яв-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 09-01-00589-а, 09-01-90431-Укр_ф_а).

ляется сопряженной нормой к норме ρ, заданной на пространстве $C^k[\alpha,\beta]$: $\rho[\psi]=\max\limits_{t\in[\alpha,\beta]}\sqrt{\|\psi(t)\|^2+\|\psi'(t)\|^2+\cdots+\|\psi^{(k)}(t)\|^2}$. Матрицы $A(t), B(t)$ являются $(k+1)$ раз непрерывно дифференцируемыми.

В частности, при $m\geq n-1$ вполне управляемая линейная система может быть переведена из одного состояния в другое за нулевое время управлением вида

$$u(t)=\sum\nolimits_{j=0}^{m}u_j\delta^{(j)}(t-\tau). \tag{2}$$

Здесь векторы u_j отвечают за интенсивность и направление импульса $\delta^{(j)}$.

Импульсные и обобщенные управления являются математическими абстракциями, а в реальных процессах используют конечные управления (хотя такие управления могут быть большими по модулю) . Ограниченные функции, приближающие (2), называются быстрыми управлениями, поскольку они позволяют переводить систему в заданное состояние за произвольно малое время. Быстрые управления, в отличие от импульсных, могут быть реализованы на практике и при моделировании. В работе рассматриваются различные способы построения быстрых управлений при помощи разрывных, непрерывных и гладких функций.

Быстрые управления можно искать, например, в следующем виде:

$$u_\Delta(t)=\sum\nolimits_{j=0}^{m}u_j\Delta_{h_j}^{j}(t-\tau), \tag{3}$$

где $\Delta_{h_j}^{j}(t)$ аппроксимируют дельта-функцию и ее производные. Возникает проблема выбора параметров управления (3) – коэффициентов h_j и u_j, а также вида функций $\Delta_{h_j}^{j}(t)$. Эти параметры должны выбираться, исходя из физических требований на реализацию управления.

Аппроксимации дельта-функции и ее производных

Наиболее простым способом построения аппроксимаций $\Delta_{h_j}^{j}(t)$ является следующий:

$$\begin{cases}\Delta_h^0(t)=h^{-1}\mathrm{I}_{[0,h]}(t),\\ \Delta_h^j(t)=h^{-1}\left(\Delta_h^{j-1}(t)-\Delta_h^{j-1}(t-h)\right).\end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\mathrm{I}_{[0,h]}(t)=\begin{cases}1, \text{ если } t\in[0,h]\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$, параметр h отвечает за длину воздействия аппроксимации.

На Рис. 1 показаны аппроксимации (4) дельта-функции и ее производных.

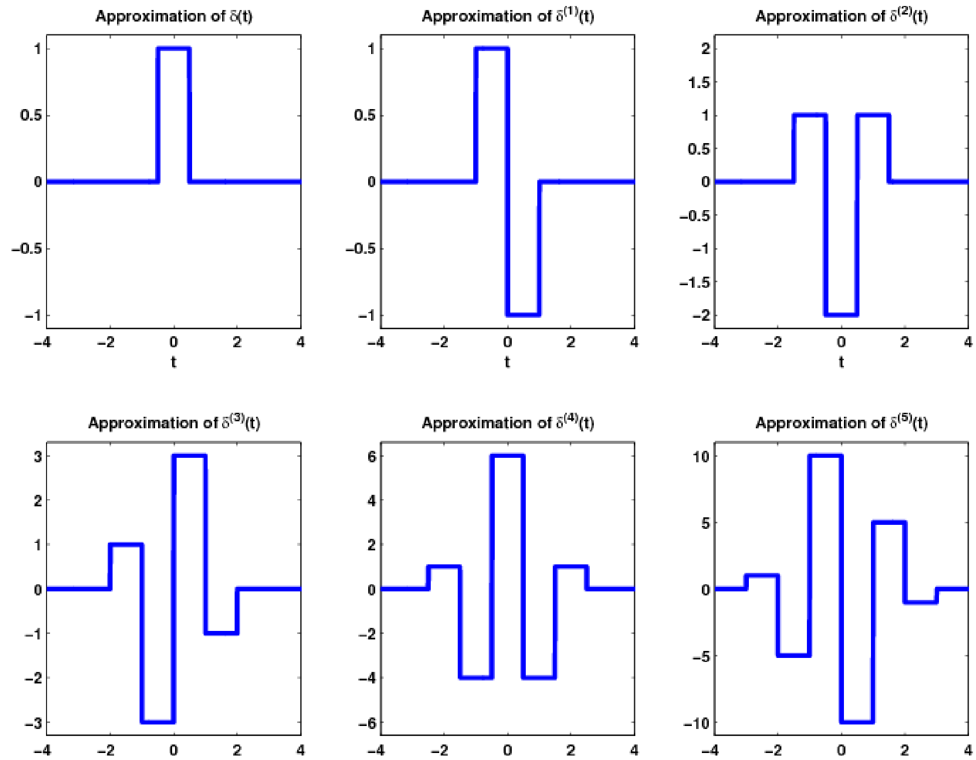

Рис. 1. Аппроксимации дельта-функции и ее производных до 5-ого порядка

При данном способе построения аппроксимаций дельта-функции и ее производных никакие ограничения на модуль управления или длительность воздействия не накладывались. В полученной аппроксимации и модуль, и длительность быстрого управления возрастают при увеличении порядка производной дельта-функции.

Другим примером могут послужить аппроксимации дельта-функции и ее производных, ограниченные по модулю сразу для всех порядков производной: $\left|\Delta_{h_j}^{j}\right|\le\mu$. Такие аппроксимации могут быть, например, представлены в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\Delta_{h_0}^{0}(t) = \mu\ \mathrm{I}_{[0,h_0]}(t), \\
\Delta_{h_j}^{j}(t) = \Delta_{h_{j-1}}^{j-1}(2Ct) - \Delta_{h_{j-1}}^{j-1}(2Ct - h_{j-1}), \\
C = \left(\dfrac{1}{4\mu}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \\
h_{j-1} = Ch_j, h_0 = \dfrac{1}{\mu}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

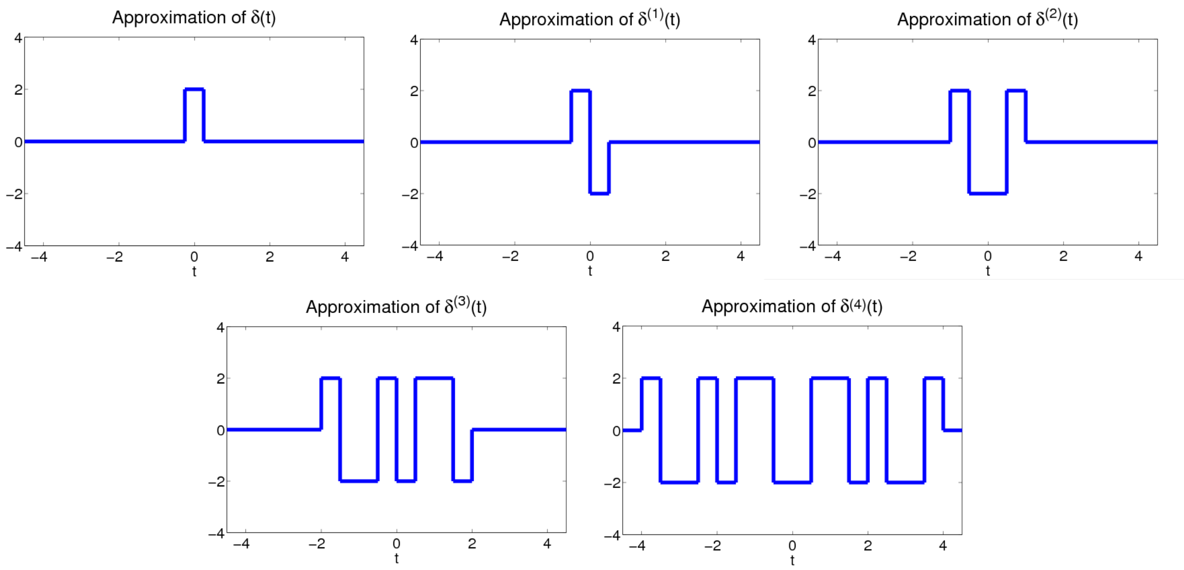

Рис. 2. Разрывные аппроксимации, ограниченные по модулю.

На Рис. 2 показаны аппроксимации (5). Видно, что с увеличением порядка производной отрезок, на котором воздействует управление, каждый раз увеличивается вдвое, и число переключений управления растет как 2^n, где n – порядок производной.

Разрывные аппроксимации с минимальным модулем

При выборе аппроксимаций могут учитываться следующие критерии:

1. ограничение на время управления:
   $\max\limits_{j}\{(j+1)h_j\} \le H$
2. ограничение на модуль управления:
   $|u_\Delta(t)| \le \mu$
3. раздельные ограничения на модули аппроксимаций обобщенных функций всех порядков, входящих в управление:
   $\begin{cases} |u_{\Delta,j}(t)| \le \mu_j, \\ u_{\Delta,j}(t) = h_j \Delta_h^j(t-\tau). \end{cases}$

Найдем аппроксимацию n-ой производной дельта-функции с минимальным модулем. Задача может быть записана в виде проблемы моментов следующего типа.

$$\begin{cases} \mu \to \inf, \\ \left|\Delta_h^n(t)\right| \le \mu,\ t \in [-h, h]. \end{cases} \tag{6}$$

Кроме того, накладываются дополнительные ограничения для того, чтобы аппроксимации $\Delta_h^n(t)$ воздействовали на полиномы степени n так же, как и $\delta_h^n(t)$.

$$\begin{cases} \int\limits_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^k dt = 0, k = 0 \ldots n-1, \\ \int\limits_{-h}^{h} \Delta_h^n(t) t^n dt = (-1)^n n! \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 1. Проблема моментов (6) с ограничениями (7) имеет следующее решение:

$$\Delta_h^n(t) = \frac{1}{4}(-1)^n n! \left(\frac{2}{h}\right)^{n+1} \operatorname{sign} U_n(ht), \tag{8}$$

где $U_n(ht)$ – многочлен Чебышева второго рода: $U_n(t) = \cos(n \cdot \arccos t)$.

Доказательство.

Для удобства избавимся от параметра h: представим $\Delta_h^n(t)$ в виде $\Delta_h^n(t) = (-1)^n n! h^{-(n+1)} \Delta^n(ht)$, где $\Delta^n(t)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \mu \to \inf, \\ \left|\Delta^n(t)\right| \le \mu, \quad t \in [-1,1], \\ \int_{-1}^{1} \Delta^n(t) t^k dt = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ \int_{-1}^{1} \Delta^n(t) t^n dt = 1. \end{cases}$$

Последняя задача является проблемой моментов:

$$\begin{cases} \mu \to \inf, \\ \left\| \Delta^n(\cdot) \right\|_{L_\infty[-1,1]} \le \mu, \\ \langle t^k, \Delta^n(\cdot) \rangle = c_k, \quad k = 0, \ldots, n, \\ c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0, c_n = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) получим:

$\int_{-1}^{1} \Delta^n(t) \left(\sum_{k=0}^{n} p_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{n} p_k c_k$, то есть, $\int_{-1}^{1} \Delta^n(t) P_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n} p_k c_k$, где $P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j t^j$.

Так как $\int_{-1}^{1} \Delta^n(t) P_n(t) dt \le \left\| \Delta^n \right\|_{L_\infty[-1,1]} \cdot \left\| P_n \right\|_{L_1[-1,1]} \le \mu \left\| P_n \right\|_{L_1[-1,1]}$, получим

$$\mu^* = \sup_{p \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{\sum_{k=0}^{n} p_k c_k}{\left\| \sum_{j=0}^{n} p_j t^j \right\|_{L_1[-1,1]}}, \text{ где } \sum_{k=0}^{n} p_k c_k = 1.$$

Так как по условию $c_0 = \cdots = c_{n-1} = 0, c_n = 1$, то

$\mu^* = \sup_{p \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{\left\| \sum_{j=0}^{n} (p_j / p_n) t^j \right\|_{L_1[-1,1]}}$. Супремум достигается на многочлене $P_n^*(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j^* t^j$, являющемся с точностью до множителя многочленом Чебышева второго рода степени n $U_n(t)$, так как многочлен $P_n^*(t)$ обладает минимальной нормой в $L_1[-1,1]$ среди многочленов степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Следовательно, $P_n^*(t) = 2^{-n} U_n(t)$. Так как $\left\| U_n(t) \right\|_{L_1[-1,1]} = 2$, после возврата к исходным переменным, получаем $\Delta_h^n(t) = \mu^* \operatorname{sign} P_n^*(t) = \frac{1}{4} (-1)^n n! \left(\frac{2}{h} \right)^{n+1} \operatorname{sign} U_n(ht)$.

Теорема доказана.

Аппроксимация (8) – кусочно-постоянная (и, следовательно, разрывная) функция, принимающая значения $\pm\frac{1}{4}n!\left(\frac{2}{h}\right)^{n+1}$ между нулями многочлена Чебышева $t_k = -h\cos\frac{\pi k}{n+1}, k = 0\ldots n+1$.

На Рис. 3 показаны аппроксимации (8) для дельта-функции и ее производных до пятого порядка.

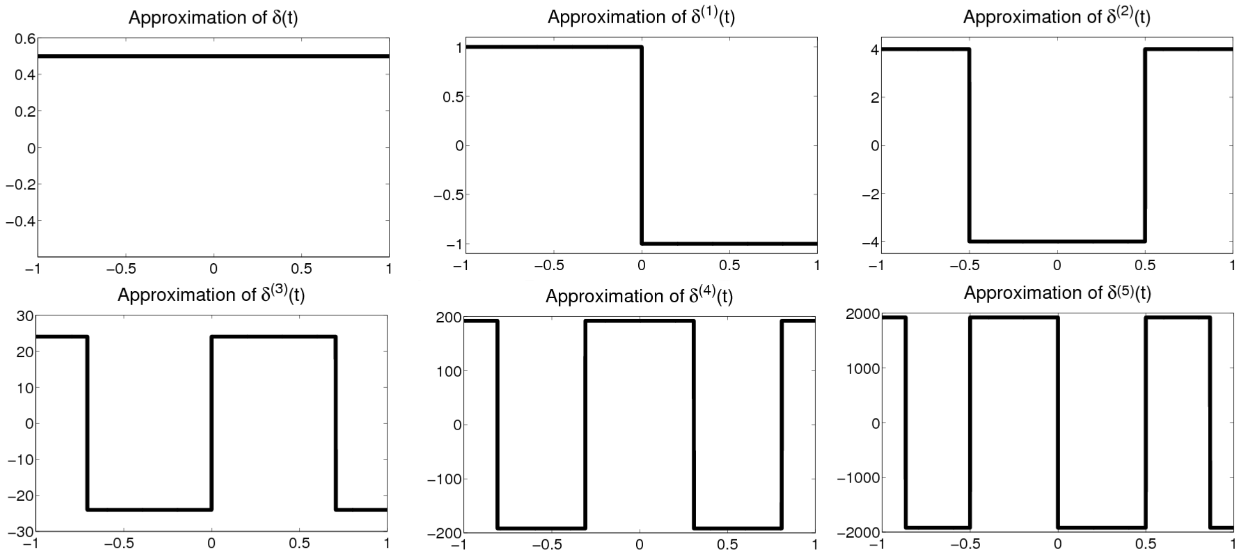

Рис. 3. Аппроксимации с минимальным модулем на ограниченном отрезке.

Гладкие аппроксимации

Кроме разрывных аппроксимаций, будем рассматривать непрерывные и гладкие аппроксимации. Для этого наложим ограничение на модуль k-ой производной аппроксимации:

$$\begin{cases} \Delta_{h,k}^n(t) = \int\limits_{-h}^{t}\int\limits_{-h}^{t_1}\ldots\int\limits_{-h}^{t_{k-1}} g_k^n(t_k)dt_k dt_{k-1}\ldots dt_1, \\ | g_k^n(t) |\le \mu. \end{cases} \tag{10}$$

На гладкие аппроксимации накладываются аналогичные ограничения на воздействие на полиномы степени n, которые использовались для разрывных аппроксимаций:

$$\begin{cases} \int\limits_{-h}^{h} \Delta_{h,k}^n(t)t^j dt = 0, \quad j = 0,\ldots,n-1, \\ \int\limits_{-h}^{h} \Delta_{h,k}^n(t)t^n dt = (-1)^n n! \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 2. Решение задачи (10) с ограничениями (11) является k-кратным интегралом от функции, являющейся разрывной аппроксимацией производной дельта-функции $(n+k)$-ого порядка, $\Delta_h^{n+k}(t)$:

$$\Delta_{h,k}^{n}(t)=\frac{1}{(k-1)!}\int_{-h}^{t}\Delta_h^{n+k}(\tau)(t-\tau)^{k-1}d\tau, \text{ где}$$
$$\Delta_h^{n+k}(t)=\tfrac{1}{4}(-1)^{n+k}\left(\tfrac{2}{h}\right)^{n+k+1}(n+k)!\operatorname{sign}U_{n+k}(ht).$$

Доказательство.

С помощью интегрирования по частям задачу (10) с ограничениями (11) можно привести к проблеме моментов для k-ой производной $g_k^n(t)$ аппроксимации $\Delta_{h,k}^{n}(t)$:

$$\begin{cases}\mu\to\inf,\\ |g_k^n(t)|\le\mu,\quad t\in[-h,h],\\ \int\limits_{-h}^{h}g_k^n(t)t^j dt=0,\quad j=0,\dots,n+k-1,\\ \int\limits_{-h}^{h}g_k^n(t)t^{n+k}dt=(-1)^{n+k}(n+k)!\end{cases}$$

Из теоремы 1 следует, что

$$g_k^n(t)=\Delta_h^{n+k}(t)=\tfrac{1}{4}(-1)^{n+k}\left(\tfrac{2}{h}\right)^{n+k+1}(n+k)!\operatorname{sign}U_{n+k}(ht). \qquad (12)$$

Таким образом, $(k-1)$ раз непрерывно дифференцируемая аппроксимация $\delta^{(n)}(t)$, $\Delta_{h,k}^{n}(t)$, является k-кратным интегралом от функции, являющейся разрывной аппроксимацией производной дельта-функции $(n+k)$-ого порядка, $\Delta_h^{n+k}(t)$:

$$\Delta_{h,k}^{n}(t)=\frac{1}{(k-1)!}\int_{-h}^{t}\Delta_h^{n+k}(\tau)(t-\tau)^{k-1}d\tau, \qquad (13)$$

Теорема доказана.

Здесь $k = -1$ соответствует разрывным аппроксимациям $\Delta_h^{(n)}(t)$, $k = 0$ соответствует непрерывным (но не гладким) аппроксимациям, при $k \geq 1$ аппроксимации будут гладкими функциями.

Аппроксимации $\Delta_{h,k}^{n}(t)$ представляют собой кусочно-постоянные полиномы порядка k, имеющие $k-1$ непрерывную производную в точках стыковки. Коэффициенты этих полиномов можно явно вычислить по формулам (12) и (13).

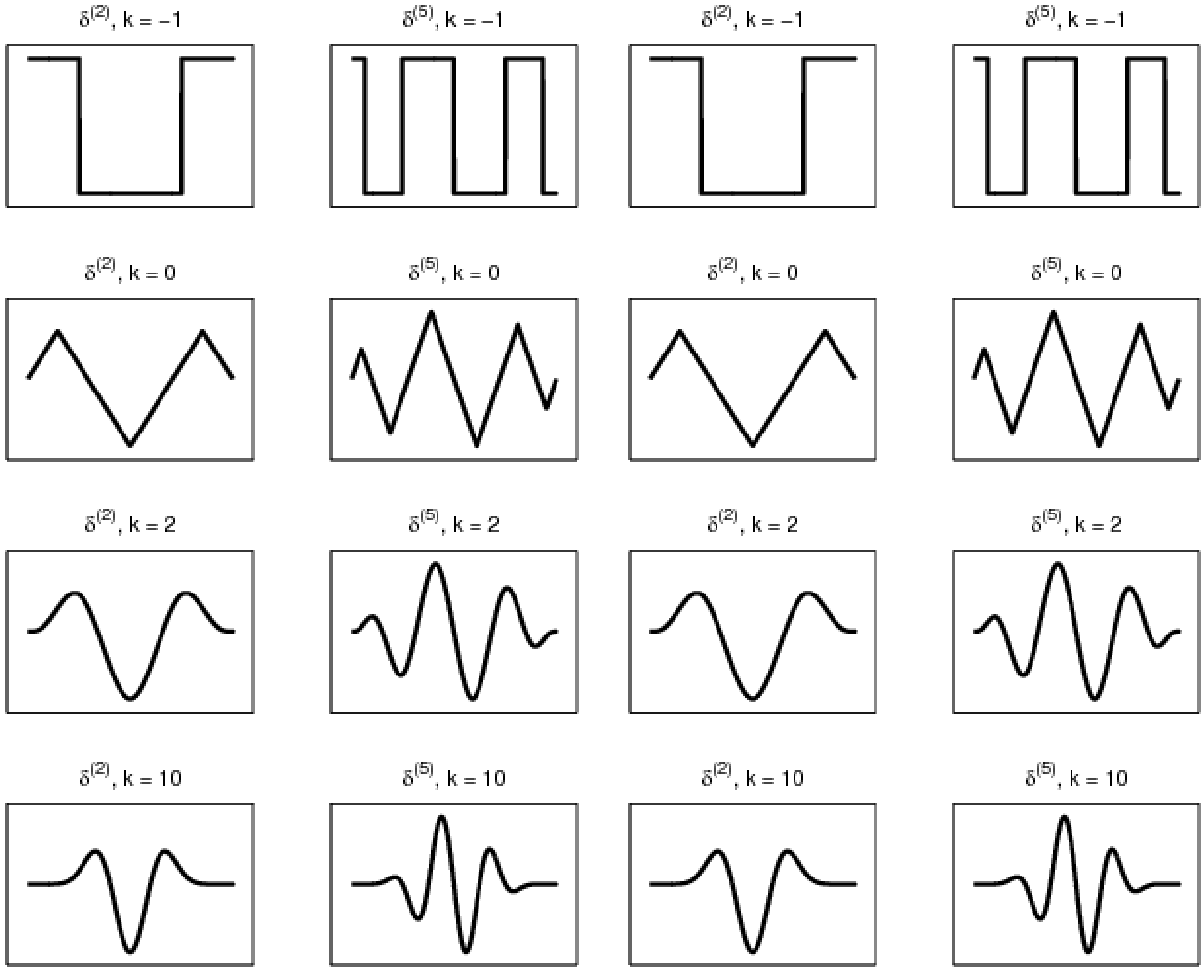

Рис. 4. Аппроксимации дельта-функции и ее производных различной степени гладкости

На Рис. 4 показаны найденные аппроксимации $\delta(t)$ и ее производных разной степени гладкости. В первом столбце показаны аппроксимации $\delta(t)$, во втором – $\delta'(t)$, в третьем – $\delta^{(2)}(t)$, в четвертом – $\delta^{(5)}(t)$. В первой строке аппроксимации разрывные, во второй – непрерывные, но не гладкие, в третьей – непрерывно дифференцируемые, в четвертой – девять раз непрерывно дифференцируемые.

Быстрые управления могут быть использованы для аппроксимации решений импульсных задач управления при моделировании результатов и их практическом применении.

Литература

1. Красовский Н.Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ. 1957. Т. 21. № 5. С. 670-677.
2. Neustadt L.W. Optimization, a moment problem and nonlinear programming. SIAM Journal on Control. 1964. V. 2. N. 1. P. 33-53.
3. Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К управлению линейной системой обобщёнными воздействиями. Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1360-1370.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука. 1968.
5. Kurzhanski A.B., Daryin A.N. Dynamic programming for impulse controls. Annual Reviews in Control. 2008. V. 32. N. 2. P. 213-227.
6. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз. 1962.