А.М. Денисов, С.И. Соловьева

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ*

Введение

Малый параметр при старшей производной в задачи Коши для гиперболического уравнения можно рассматривать как сингулярное возмущение задачи Коши для уравнения теплопроводности. В связи с этим численные методы решения обратных задач для гиперболического уравнения можно рассматривать в качестве приближенных методов решения обратных задачи для уравнения теплопроводности. Особенность предлагаемого подхода состоит в следующем. Решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром сводится к решению интегральных уравнений Вольтерра 2 рода. Однако, хорошо известно, что решение аналогичной обратной задачи для уравнения теплопроводности заключается в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Таким образом, в качестве приближенного решения неэволюционного уравнения Фредгольма первого рода рассматриваются функции, являющиеся решениями эволюционного уравнения Вольтерра 2 рода. Проведенные численные расчеты показывают возможность использования подобного подхода для определения начального условия в задачах Коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи используется решение задачи Коши, заданное при $x = 0$, как функция от времени.

1. Задачи Коши для гиперболического уравнения. Постановки обратных задач.

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения с малым параметром ε^2 при старшей производной

$$\varepsilon^2 u_{tt} + u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in R \times R^+, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

$$u_t(x,0) = \varphi''(x), \quad x \in R, \tag{3}$$

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 17-01-00525)

где $\varphi(x) \in C^2(R)$, заданная функция.

Задача (1)–(3) является сингулярным возмущением задачи Коши для параболического уравнения

$$v_t = v_{xx}, \quad (x,t) \in R \times R^+, \tag{4}$$
$$v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in R. \tag{5}$$

Легко показать, что при определённых предположениях относительно функции $\varphi(x)$ решение задачи (1)–(3) при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к решению задачи (4), (5) в полосе $\Pi_T = \{(x,t): x \in R, 0 \leq t \leq T\}$, где T - произвольное фиксированное число.

Действительно, пусть функция $\varphi(x)$ такова, что решение задачи (4), (5) имеет производную $v_{tt}(x,t)$ непрерывную при $(x,t) \in R \times \overline{R^+}$ и такую, что $|v_{tt}(x,t)| < c, (x,t) \in R \times \overline{R^+}$. Пусть $u(x,t;\varepsilon)$ является решением задачи (1)–(3). Рассмотрим функцию $w(x,t;\varepsilon) = u(x,t;\varepsilon) - v(x,t)$, представляющую собой решение следующей задачи Коши

$$\varepsilon^2 w_{tt} + w_t = w_{xx} - \varepsilon^2 v_{tt}, \quad (x,t) \in R \times R^+, \tag{6}$$
$$w(x,0) = 0, \quad x \in R, \tag{7}$$
$$w_t(x,0) = 0, \quad x \in R. \tag{8}$$

Введём функцию $z(x,t;\varepsilon)$ такую, что

$$w(x,t;\varepsilon) = e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}} z(x,t;\varepsilon). \tag{9}$$

Подставив представление (9) в (6)–(8) получим задачу Коши для функции $z(x,t;\varepsilon)$

$$\varepsilon^2 z_{tt} = z_{xx} + \frac{1}{4\varepsilon^2} z - \varepsilon^2 e^{\frac{t}{2\varepsilon^2}} v_{tt}, \quad (x,t) \in R \times R^+,$$
$$z(x,0) = 0, \quad x \in R,$$
$$z_t(x,0) = 0, \quad x \in R.$$

Формула для решения этой задачи Коши хорошо известна, см., например, [1], и имеет вид

$$z(x,t;\varepsilon) = \\ = -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \int_{x-\frac{t-\tau}{\varepsilon}}^{x+\frac{t-\tau}{\varepsilon}} I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{(t-\tau)^2 - \varepsilon^2(x-\xi)^2}\right) v_{tt}(\xi,\tau) e^{\frac{\tau}{2\varepsilon^2}} d\xi d\tau. \tag{10}$$

Здесь и далее $I_n(x)$ – функции Бесселя n-го порядка, мнимого аргумента [2].

Из (9), (10) следует формула для решения задачи (6)-(8)

$$w(x,t;\varepsilon) = \\ = -\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{2\varepsilon^2}} \int_{x-\frac{t-\tau}{\varepsilon}}^{x+\frac{t-\tau}{\varepsilon}} I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{(t-\tau)^2 - \varepsilon^2(x-\xi)^2}\right) v_{tt}(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Получим оценку для функции $w(x,t;\varepsilon)$ при $(x,t) \in \Pi_T$.
Для функции Бесселя $I_0(x)$ при $x \geq 0$ справедлива оценка [2]

$$I_0(x) \leq \frac{k}{\sqrt{x}} e^x, \qquad k\text{– } const.$$

Так как для всех $\xi \in \left[x - \frac{t-\tau}{\varepsilon}, x + \frac{t-\tau}{\varepsilon}\right], \tau \in [0,t]$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{(t-\tau)^2 - \varepsilon^2(x-\xi)^2} \leq \frac{t-\tau}{2\varepsilon^2}$$

и $I_0'(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, то

$$I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{(t-\tau)^2 - \varepsilon^2(x-\xi)^2}\right) \leq I_0\left(\frac{t-\tau}{2\varepsilon^2}\right) \leq \frac{k\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{t-\tau}} e^{\frac{t-\tau}{2\varepsilon^2}}.$$

Тогда

$$|w(x,t;\varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon c}{2}\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{2\varepsilon^2}} \int_{x-\frac{t-\tau}{\varepsilon}}^{x+\frac{t-\tau}{\varepsilon}} \frac{k\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{t-\tau}} e^{\frac{t-\tau}{2\varepsilon^2}} d\xi d\tau = \sqrt{2}ck\varepsilon \int_0^t \sqrt{t-\tau}\, d\tau \ \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\sqrt{2}ck\varepsilon T^{\frac{3}{2}}, \qquad \forall (x,t) \in \Pi_T.$$

Следовательно, для всех $(x,t) \in \Pi_T$ $u(x,t;\varepsilon) \rightrightarrows v(x,t)$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим обратную задачу для задачи Коши (1)–(3). Пусть функция $\varphi(x)$ неизвестна, а задана функция

$$u(0,t;\varepsilon) = g(t), \quad t > 0. \tag{11}$$

Требуется определить $\varphi(x)$.

Легко видеть, что решение обратной задачи в такой постановке неединственно. Чтобы устранить эту неединственность, далее будем считать функцию $\varphi(x)$ чётной. При фиксированной функции $g(t)$ в дополнительном условии (11), решение обратной задачи (1)–(3), (11) функция $\varphi(x)$ зависит от ε. Поэтому далее будем обозначать её $\varphi(x;\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь другое сингулярное возмущение задачи Коши (1)–(3). Пусть функция $\tilde{u}(x,t;\varepsilon)$ является решением задачи Коши

$$\varepsilon^2 \tilde{u}_{tt} + \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}, \quad (x,t) \in R \times R^+, \tag{12}$$

$$\tilde{u}(x,0;\varepsilon) = \varphi(x), \quad x \in R, \tag{13}$$

$$\tilde{u}_t(x,0;\varepsilon) = 0, \quad x \in R. \tag{14}$$

Функция $\widetilde{w}(x,t;\varepsilon) = \tilde{u}(x,t;\varepsilon) - \tilde{v}(x,t)$ представляет собой решение задачи Коши

$$\varepsilon^2 \widetilde{w}_{tt} + \widetilde{w}_t = \widetilde{w}_{xx} - \varepsilon^2 \tilde{v}_{tt}, \quad (x,t) \in R \times R^+,$$

$$\widetilde{w}(x,0;\varepsilon) = 0, \quad x \in R,$$

$$\widetilde{w}_t(x,0;\varepsilon) = -\varphi''(x), \quad x \in R.$$

Аналогично предыдущему, для $\widetilde{w}(x,t;\varepsilon)$ можно записать следующую формулу

$$\tilde{w}(x,t;\varepsilon)=w(x,t;\varepsilon)-$$
$$-\frac{\varepsilon}{2}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{x-\frac{t}{\varepsilon}}^{x+\frac{t}{\varepsilon}} I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}\right)\varphi''(\xi)d\xi. \qquad (15)$$

Предположив дополнительно, что $|\varphi''(x)|\le c_1$ для всех $x\in R$, из представления (15), получим, что для всех $(x,t)\in\Pi_T$ $\tilde{u}(x,t;\varepsilon)\rightrightarrows v(x,t)$ при $\varepsilon\to 0$. Очевидно, что функция $\tilde{u}(x,t;\varepsilon)$ является более «плохой» аппроксимацией $v(x,t)$ в том смысле, что при $\varphi''(x)\ne 0, \tilde{u}_t(x,0;\varepsilon)=0$ не сходится к $v_t(x,0)=\varphi''(x)$.

Рассмотрим обратную задачу для задачи Коши (12)–(14). Пусть чётная функция $\varphi(x)$ неизвестна, а задана функция

$$u(0,t;\varepsilon)=g(t),\quad t>0. \qquad (16)$$

Требуется определить $\varphi(x)$. Очевидно, что при различных ε и фиксированной функции $g(t)$ решение обратной задачи (12)–(14), (16) зависит от ε. Обозначим его $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$.

2. Интегральные уравнения для решения обратных задач

Выведем интегральные уравнения Вольтерра 2 рода для решения сформулированных обратных задач.

Рассмотрим обратную задачу (1)–(3), (11). Функция $u(x,t;\varepsilon)$ является решением (1)–(3). Введя новую функцию $p(x,t;\varepsilon)=e^{\frac{t}{2\varepsilon^2}}\cdot u(x,t;\varepsilon)$ перейдём к задаче Коши для функции $p(x,t;\varepsilon)$. Использовав хорошо известную формулу [1] для её решения, получим формулу для решения задачи Коши (1)–(3)

$$u(x,t;\varepsilon)=e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\frac{\varphi\left(x-\frac{t}{\varepsilon}\right)+\varphi\left(x+\frac{t}{\varepsilon}\right)}{2}+$$
$$+\frac{t}{4\varepsilon}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{x-\frac{t}{\varepsilon}}^{x+\frac{t}{\varepsilon}}\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}}\varphi(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{\varepsilon}{2}e^{-\frac{t}{2\varepsilon^2}}\int\limits_{x-\frac{t}{\varepsilon}}^{x+\frac{t}{\varepsilon}} I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{t^2-\varepsilon^2(x-\xi)^2}\right)\cdot\left[\varphi''(\xi)+\frac{1}{2\varepsilon^2}\varphi(\xi)\right]d\xi.$$

Учитывая чётность искомой функции, используя условие (11) и вводя новую переменную $z=\frac{t}{\varepsilon}$, получим следующее уравнение для $\varphi(z;\varepsilon)$

$$\varphi(z;\varepsilon)+\frac{z}{2\varepsilon}\int_0^z \frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{z^2-\xi^2}}\varphi(\xi;\varepsilon)d\xi+$$

$$+\varepsilon\int_0^z I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)\cdot\left[\varphi''(\xi;\varepsilon)+\frac{1}{2\varepsilon^2}\varphi(\xi;\varepsilon)\right]d\xi = e^{\frac{z}{2\varepsilon}}g(\varepsilon z), \tag{17}$$

$$z\geq 0.$$

Преобразуем интеграл, содержащий вторую производную функции $\varphi(\xi;\varepsilon)$. Интегрируя по частям и используя свойства функций $I_n(x)$, имеем

$$\varepsilon\int_0^z I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)\cdot\varphi''(\xi;\varepsilon)d\xi = \varepsilon\,\varphi'(z;\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^z \xi\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{z^2-\xi^2}}\varphi'(\xi;\varepsilon)d\xi=$$

$$=\varepsilon\,\varphi'(z;\varepsilon)+\frac{z}{8\varepsilon}\varphi(z;\varepsilon)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^z\left(\frac{I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{z^2-\xi^2}}-\frac{\xi^2 I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{2\varepsilon(z^2-\xi^2)}\right)\varphi(\xi;\varepsilon)d\xi.$$

Подставив найденное представление в уравнение (17), получим интегро-дифференциальное уравнение для функции $\varphi(z;\varepsilon)$

$$\varepsilon\,\varphi'(z;\varepsilon)+\left(1+\frac{z}{8\varepsilon}\right)\varphi(z;\varepsilon)=e^{\frac{z}{2\varepsilon}}g(\varepsilon z)-\int_0^z F(z,\xi,\varepsilon)\varphi(\xi;\varepsilon)d\xi, \tag{18}$$

где

$$F(z,\xi,\varepsilon)=\frac{z-\varepsilon}{2\varepsilon\sqrt{z^2-\xi^2}}I_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)+\frac{\xi^2}{4\varepsilon(z^2-\xi^2)}I_2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon}I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right).$$

Интегрируя уравнение (18) с начальным условием $\varphi(0;\varepsilon)=g(0)$ получим для $\varphi(z;\varepsilon)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(z;\varepsilon)+\int_0^z K(z,\xi;\varepsilon)\varphi(\xi;\varepsilon)d\xi=h(z;\varepsilon),\qquad z\geq 0 \tag{19}$$

где

$$K(z,\xi;\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^z \mathrm{e}^{\frac{s^2-z^2+16\varepsilon(s-z)}{16\varepsilon^2}}F(s,\xi,\varepsilon)ds,$$

$$h(z;\varepsilon) = g(0)\mathrm{e}^{\frac{-z^2-16\varepsilon z}{16\varepsilon^2}} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^z e^{\frac{s^2-z^2+24s\varepsilon-16z\varepsilon}{16\varepsilon^2}} g(\varepsilon s)ds.$$

Найдём теперь интегральное уравнение Вольтерра 2 рода для функции $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$, являющейся решением обратной задачи (12)–(14), (16). Очевидно, что его можно получить, положив в уравнение (17) ноль вместо $\varphi''(\xi;\varepsilon)$. Таким образом, $\tilde{\varphi}(z;\varepsilon)$ является решением уравнения Вольтерра 2 рода

$$\tilde{\varphi}(z;\varepsilon) + \int_0^z \tilde{K}(z,\xi;\varepsilon)\tilde{\varphi}(\xi;\varepsilon)d\xi = \tilde{h}(z;\varepsilon), \qquad z \geq 0 \tag{20}$$

где

$$K(z,\xi;\varepsilon) = \frac{zI_1\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right)}{2\varepsilon\sqrt{z^2-\xi^2}} + \frac{1}{2\varepsilon}I_0\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{z^2-\xi^2}\right),$$

$$h(z;\varepsilon) = e^{\frac{z}{2\varepsilon}} g(\varepsilon z).$$

Мы вывели интегральные уравнения Вольтерра 2 рода для решения обратных задач (1)–(3), (11) и (12)–(14), (16). Рассмотрим теперь аналогичную обратную задачу к задаче Коши (4), (5). Требуется найти чётную функцию $\varphi(x)$, если известна дополнительная информация о решении задачи (4), (5)

$$v(0,t) = g(t), \quad t > 0. \tag{21}$$

Из хорошо известной формулы для решения задачи Коши (4), (5) следует, что обратная задача (4), (5), (21) сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма для функции $\varphi(x)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}} \varphi(s)ds = g(t), \qquad t > 0. \tag{22}$$

В связи с тем, что решения задач Коши (1)–(3) и (12)–(14) сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решению задачи Коши (4), (5) возникает вопрос о возможности использования решения интегральных уравнений Вольтерра 2 рода (19) или (20) для приближенного решения уравнения Фредгольма 1 рода (22). Метод использования сингулярного возмущения исходного уравнения в частных производных для решения некоторых обратных задач был предложен в [2]. В последствии этот подход для исследования и решения обратных задач применялся рядом авторов, см., например, [4-7].

3. Результаты вычислительных экспериментов

С целью анализа возможностей применения численных методов, основанных на решении интегральных уравнений Вольтерра 2 рода (19) или (20) для решения обратной задачи для уравнения теплопроводности был проведен ряд вычислительных экспериментов. Они состояли в следующем. Для заданной функции $\bar{\varphi}(x)$ решалась задача Коши

$$u_t = u_{xx}, \quad (x,t) \in R \times R^+,$$
$$u(x,0) = \bar{\varphi}(x), \quad x \in R,$$

и определялась функция

$$g(t) = u(0,t).$$

Далее с этой функцией $g(t)$ решались уравнения (19) и (20) и находились функции $\varphi(x;\varepsilon)$ и $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$ соответственно.

На рис. 1,2 показаны результаты расчётов для функции

$$\bar{\varphi}(x) = x^2 \cdot exp(-4x^2(x-0.01)^4),$$

для $\varepsilon = 0.05$ и $\varepsilon = 0.03$. На рис.1 изображены $\bar{\varphi}(x)$ (test) и $\varphi(x;\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0.05$ и $\varepsilon = 0.03$. На рис.2 изображены $\bar{\varphi}(x)$ (test) и $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0.05$ и $\varepsilon = 0.03$.

Аналогичные результаты расчетов приведены на рис.3 и 4 в случае функции

$$\varphi(x) = 0.5\cos(3.5\pi x^2) \cdot exp(-4x^2),$$

На рис.3 изображены $\bar{\varphi}(x)$ (test) и $\varphi(x;\varepsilon)$, а на рис.4 — $\bar{\varphi}(x)$ (test) и $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$ для $\varepsilon = 0.05$ и $\varepsilon = 0.03$.

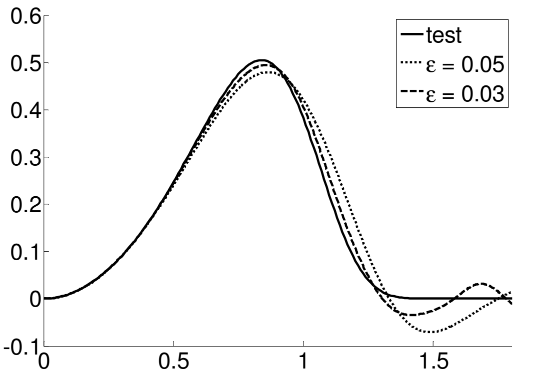

Рис.1

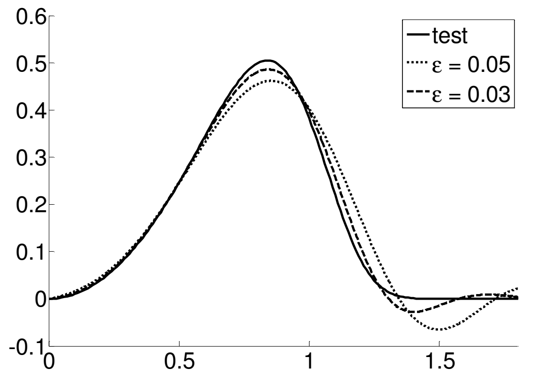

Рис.2

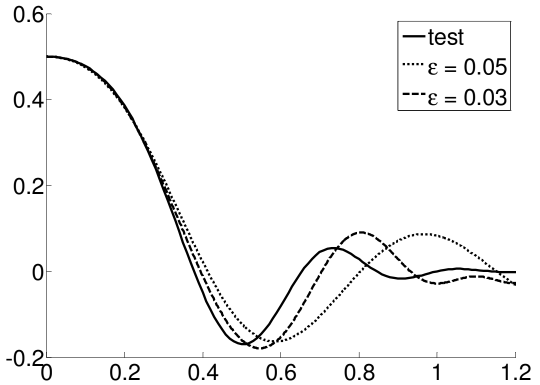

Рис.3

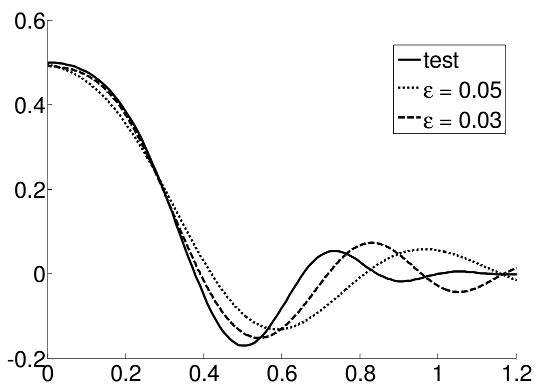

Рис.4

Приведённые графики показывают, что для выбранных функции $\bar{\varphi}(x)$ оба приближенных решения $\varphi(x;\varepsilon)$ и $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$ дают достаточно хороший результат и не позволяют сделать вывод о преимуществах одного по сравнению с другим. Аналогичные результаты были получены и для других функций $\bar{\varphi}(x)$. При значительном уменьшении ε приближенные решения $\varphi(x;\varepsilon)$ и $\tilde{\varphi}(x;\varepsilon)$начинают осциллировать, причем амплитуда осцилляций возрастает с ростом аргумента x. Это достаточно естественно объясняется некорректностью исходного уравнения (22) и плохой обусловленностью уравнений (19) и (20) при малых ε.

Литература.

1. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике: учеб. пособие для студентов ун-тов. – М.: Физматлит. 2004.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ. 2004.
3. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир. 1970.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС. 2004.
5. Короткий А. И., Цепелев И. А., Исмаил-заде А. Т. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики. // Известия уральского университета. 2008. №58. с.78-87.
6. Денисов А.М. Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной. //Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т.53. №5. с.744-752.
7. Yury Ya. Belov, Vera G. Kopylova Determination of source functions in composite type system of equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. т. 7. вып. 3. с. 275–288.