В.И. Дмитриев, Е.С. Куркина, О.Е. Симакова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА РОСТА ГОРОДОВ

Введение. Феномен урбанизации.

Феномен урбанизации, сопровождающийся усилением концентрации населения в городах, – это один из самых первых глобальных и поразительных процессов развития человеческой цивилизации. Будучи чрезвычайно сложным и многосторонним социально-экономическим, демографическим и географическим процессом, урбанизация привносит немало нового в развитие мирового хозяйства. Недаром ее называют тихой революцией.

Первые города зародились в глубокой древности в IV-II тысячелетии до н.э., однако, подавляющее число городов появилось значительно позже. Многие исследователи выделяют три главных этапа в мировом процессе урбанизации. Первый этап приходится на XIX век и охватывает в основном Европу и Северную Америку. Второй этап занимает первую половину XX столетия и характеризуется ускорением темпов роста городского населения и постепенным распространением урбанизации на все регионы мира. Вторая половина XX века – это третий этап процесса урбанизации, получивший название «городской революции» и повлекший глубокие геоурбанистические последствия. Главные его черты – это взрывообразный рост количества городов и численности их жителей, концентрация мировой экономической мощи в сравнительно небольшом числе крупных городов наиболее развитых стран и расширение и развитие городских сетей по всей периферии мирового хозяйства. Начиная с 1950-х годов, каждые двадцать пять лет абсолютная численность горожан практически удваивалась, и их удельный вес во всем населении возрастал. В 2006 г. свершилось эпохальное событие – так называемый *глобальный урбанистический переход*, при котором численность городского населения перевалила 50%, то есть человеческая цивилизация перешла от преимущественно аграрного типа социальных отношений к индустриально-городскому обществу. В развитых странах этот переход осуществился еще в первой половине XX века, и в настоящий момент доля городского населения здесь в среднем составляет 78% [1].

Сам факт эволюционного возникновения, повсеместного распространения, динамического развития и, в конечном итоге, доминирования городских форм расселения не случаен. В компактности размещения производительных сил заложен значительный общественный эффект. Города, особенно крупные, обладают гораздо более высокой эффективностью хозяйственной деятельности. Города предоставляют исключительные возможности для предпринимательства, творческой деятельности и накопления богатства. В них образование, здравоохранение и социальные услуги находятся на более высоком уровне.

Как свидетельствуют данные ООН, при росте абсолютного числа городов все большее количество населения аккумулируют крупнейшие агломерации людностью свыше одного миллиона жителей. В городах-миллионерах формируется городская среда особого качества. Ныне на планете насчитывается свыше 470 агломераций с населением более одного миллиона жителей, в которых проживает примерно 40% горожан и 20% всего населения Земли [2].

Развитие городов тесно связано с социально-экономическим развитием общества, и численность города является важнейшим показателем его развития – параметром порядка, подчиняющим другие показатели. Чем крупнее город, чем больше его численность, тем выше уровень жизни в нем. Численность города в подавляющем числе случаев коррелирует с уровнем развития промышленности, инфраструктуры, экономики, образования, здравоохранения, развитием спорта, уровнем оказываемых услуг и другими важнейшими показателями уровня жизни.

Исследование динамики развития больших и малых городов на региональных и мировом уровнях, изучение изменения характера распределения населения по населенным пунктам является одной из важнейших задач современного развития общества. Прогнозирование развития городов связано с необходимостью решения практических задач сегодня, чтобы они не превратились в почти неразрешимые транспортные, жилищные и др. проблемы завтра. Несмотря на демографический переход, пройденный развитыми странами, в том числе и Россией, и стабилизацию численности населения этих стран, миграционные процессы продолжаются, происходит перераспределение населения по городам. В развитых странах городское население достигло 90%, а в развивающихся странах города продолжают мощно расти.

Анализ темпов развития городов различных государств, прогнозирование роста населения городов возможно с помощью методов математического моделирования. Для этого необходимо построить модель распределения городов в зависимости от их численности. В настоящей работе рассмотрено два подхода к построению математической модели развития городов:

- вероятностная модель зависимости числа городов от численности населения;
- ранговая модель распределения городов по их численности.

1. Вероятностная модель распределения городов по их численности.

Рассмотрим задачу построения функции распределения плотности вероятности $n(x,\overline{\alpha})$ числа городов в зависимости от численности их населения x на данный момент времени. Здесь $\overline{\alpha}$ – это вектор параметров, в общем случае зависящий от времени. Согласно определению $n(x,\overline{\alpha})$ должно удовлетворять условиям:

$$\int_0^\infty n(x,\overline{\alpha})dx = 1, \qquad (1)$$

$$n_i = N \int_{x_i}^{x_{i+1}} n(x,\overline{\alpha})dx, \qquad (2)$$

где n_i – число городов, имеющих население $x \in [x_i, x_{i+1})$, а N – общее число городов. Для определения $n(x,\overline{\alpha})$ имеется список городов исследуемого региона или государства с указанием их численности.

Построение функции $n(x,\overline{\alpha})$ проводилось на основе имеющихся данных по городам России для переписей населения в 1959, 1970, 1979, 1989 и 2002 годах. Для четырех последних переписей брались города с численностью населения от 10 тыс. человек.

Для нахождения вида функции $n(x,\overline{\alpha})$ весь интервал численностей городов разобьем на несколько отрезков $x \in [x_i, x_{i+1})$ (например, 10). Функцию $n(x,\overline{\alpha})$ будем искать в виде:

$$n(x) = Ce^{-f(x)}. \qquad (3)$$

Тогда для определения функции $f(x^*,\overline{\alpha})$ имеем:

$$N \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} n(x,\overline{\alpha})dx \approx CN\Delta x_i e^{-f(x^*,\overline{\alpha})} = n_i. \qquad (4)$$

Используя ту или иную перепись населения, на каждом из выбранных интервалов вычислим значения n_i и сначала построим график зависимости функции $-\ln\left(\frac{n_i}{N\Delta x}\right) \approx n(x^*,\overline{\alpha})$ от x^*.

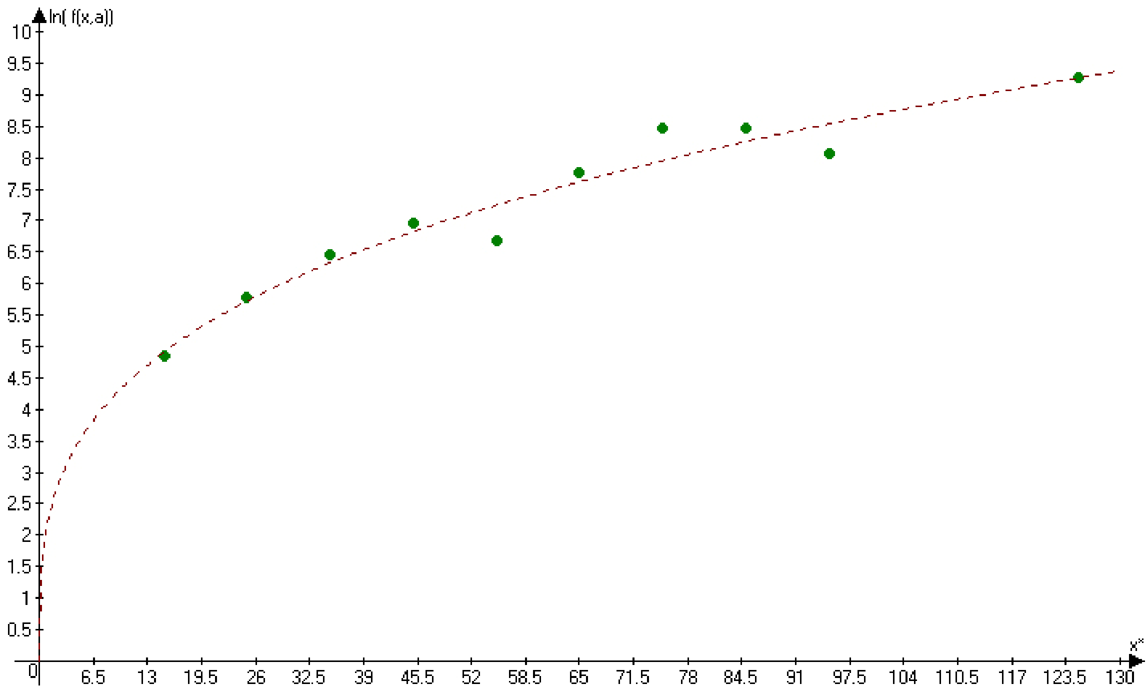

Рис.1.

На рис.1 представлен график зависимости числа городов в зависимости от численности их населения x в 1959 г. Из этого графика видно, что функцию $f(x^*, \overline{\alpha})$ можно искать в виде: $f(x^*, \overline{\alpha}) \sim x^{1/\alpha}$, $\alpha > 1$. Исследования показали, что лучше всего подходит значение $\alpha = 4$.

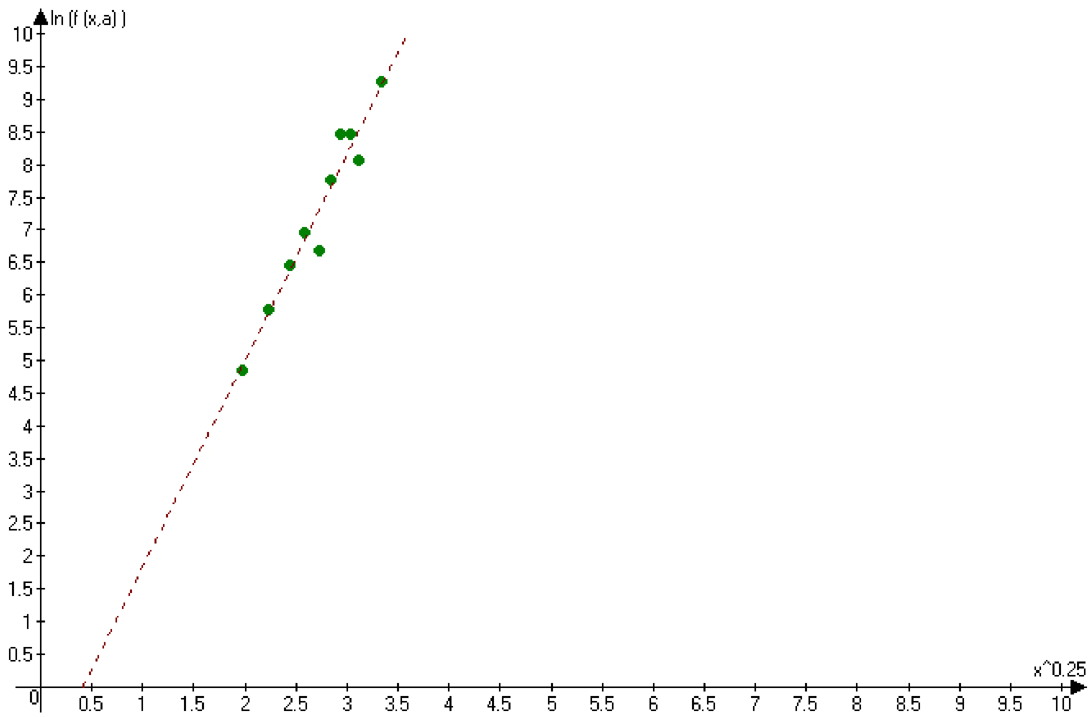

Рис. 2

На рис.2 представлен график функции $-\ln\left(\dfrac{n_i}{N\Delta x}\right) \approx f(\sqrt[4]{x^*}, \alpha)$. Мы видим, что точки хорошо ложатся на прямую.

Таким образом, можно считать, что функция $f(x,\overline{\alpha})$ имеет следующий вид:

$$f(x,\overline{\alpha}) = c + b\sqrt[4]{x}\,. \qquad (5)$$

Исходя из условия нормировки (1) $\int\limits_0^\infty e^{-c-b\sqrt[4]{x}}dx = 1$, найдем зависимость между b и c: $c = \ln\left(b^4/24\right)$.

И окончательно получаем, что функция распределения плотности вероятности $n(x,\alpha)$ числа городов в зависимости от численности их населения x имеет вид:

$$\boxed{n(x,\alpha) = \frac{\alpha}{24} e^{-\sqrt[4]{\alpha x}}}\,, \qquad (6)$$

а число городов n_i, имеющих население $x \in [x_i, x_{i+1})$, находится по формуле:

$$n_i = \frac{\alpha}{24} N \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\sqrt[4]{\alpha x}} dx\,. \qquad (7)$$

Исследования показали, что установленный закон «корня четвертой степени» в выражении (6) для распределения городов справедлив для всех рассмотренных переписей.

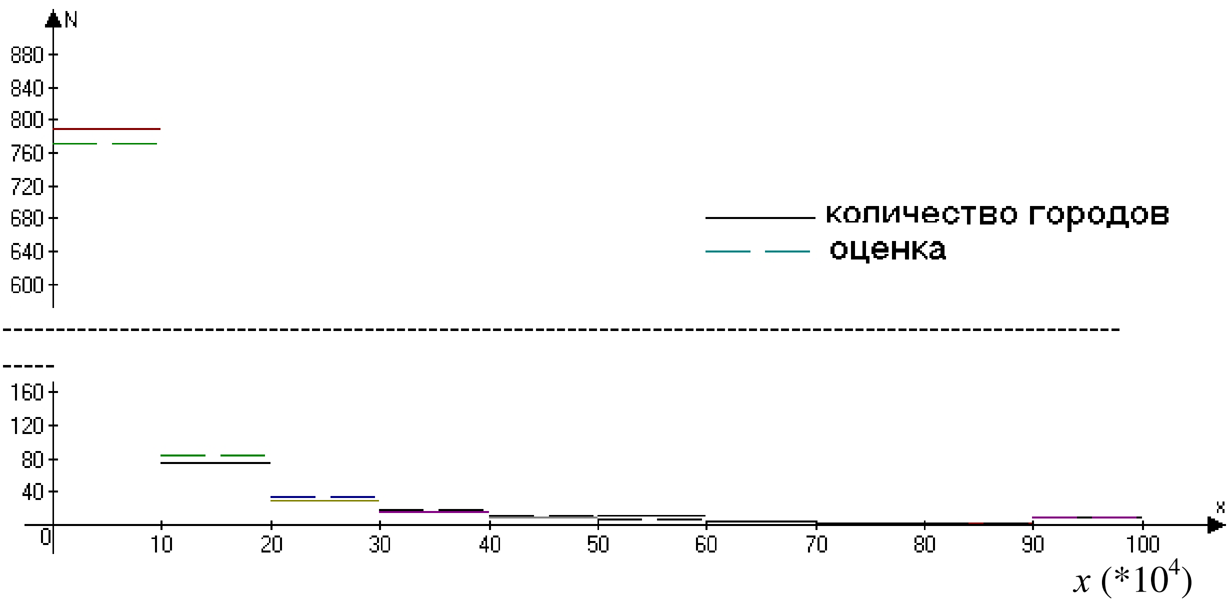

Рис. 3

Коэффициент α определялся из условия наилучшего приближения методом наименьших квадратов к функции (6):

$$I = \min_{\alpha} \sum_{i=1}^{k} \left\{ n_i - \frac{\alpha}{24} N \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\sqrt[4]{\alpha x}} dx \right\}^2 , \qquad (8)$$

где n_i вычислялись по известным данным переписи. Полученные значения α для разных переписей приведены в Таблице 1. А на рис.3 представлено сравнение реального распределения городов по численности в 2002 г с распределением, полученным в модели.

Таблица 1.

год	1959	1970	1979	1989	2002
α	153.52	124.45	111.56	104.85	99.71

Коэффициент α зависит от времени. Эта зависимость представлена на рис.4. Легко видеть, что $\alpha(t)$ монотонно убывает со временем, что говорит об увеличении числа крупных городов. Однако, если в 60-е – 80-е годы прошлого века этот рост был большим ($\alpha(t)$ быстро убывало), то в конце 20-го века он замедлился ($\alpha(t)$ медленно убывало).

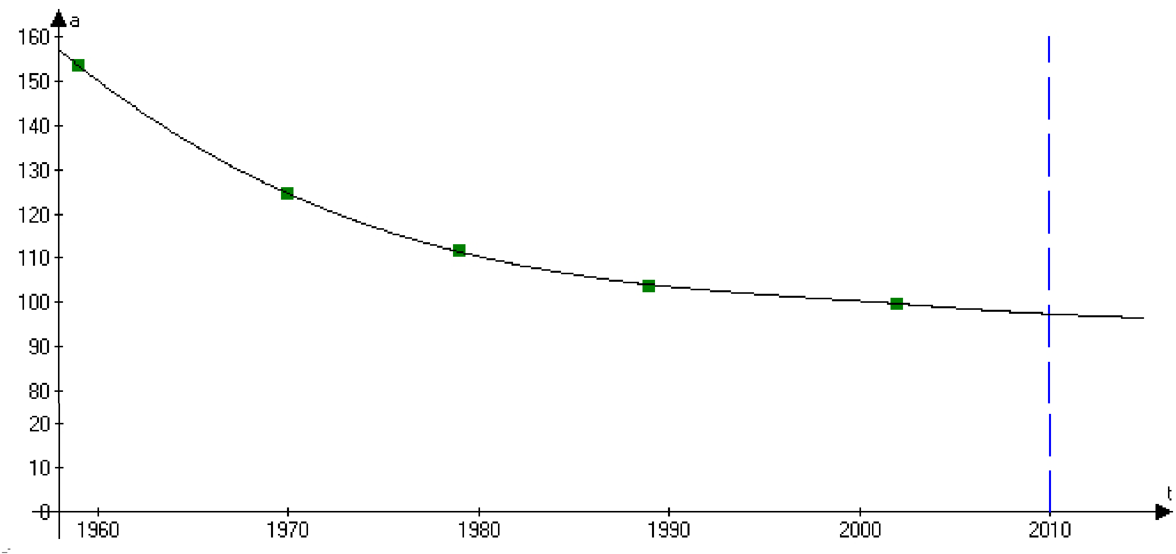

Рис. 4

Интересно сделать прогноз распределения числа городов в зависимости от их численности в будущем, считая, что функция распределения по-прежнему описывается законом (6). Для этого необходимо знать значение коэффициента α в последующие годы, а также общее количество городов.

На основании полученных данных (см. Таблицу 1) аппроксимируем функцию $\alpha(t)$ полиномом второй степени, коэффициенты которого найдем методом наименьших квадратов. Расчеты показали, что пять имеющихся значений α хорошо ложатся на параболу (см. рис. 4):

$$\alpha(t) = 2.37t^2 - 5755.61t + 4.17 * 10^6. \qquad (9)$$

Аналогичным образом найдем функцию, описывающую изменение общей численности городов со временем:

$$N(t) = -0.095t^2 + 378.975t \quad - 378930.72. \qquad (9)'$$

Делая экстраполяцию на конец 2010-го года, из формул (9) и (10) получаем:

$$\alpha(2010) = 97.32, \quad N(2010) = 968. \qquad (10)$$

Зная функцию распределения (6) в 2010 г (10), по формуле (7) сделаем оценку количества городов, имеющих численность населения в заданном интервале. Результаты представлены в Таблице (2). Мы видим, что в 2010 г. по сравнению с 2002 годом число крупных городов должно увеличиться, а число малых городов – уменьшиться.

Таблица 2 (Прогноз на 2010 г.).

Численность населения $*10^4$	Оценка числа городов	Численность населения $*10^4$	Оценка числа городов
0-10	748	60-70	5
10-20	87	70-80	4
20-30	36	80-90	3
30-40	19	90-100	2
40-50	12	100-200	9
50-60	8	Больше 200	2

Таким образом, аппроксимация распределения числа городов по численности населения в соответствии с законом «корня четвертой степени» позволяет анализировать темпы роста городов и давать оценку их роста в ближайшем будущем.

2. Модель взаимодействия городов. формирование распределения типа «ранг-размер».

1. Закон Ципфа, или правило «ранг-размер».

Правило ранг-размер широко используется в экономико-географических исследованиях, поскольку во многих случаях хорошо описывает распределение населения в реальных городских системах. Оно было впервые установлено в 1913 г. Феликсом Ауэрбахом и переоткрыто в 30-х годах американским социологом Джорджем К. Ципфом (G.K. Zipf), который, исходя из экономической целесообразности, попытался дать объяснение этому феномену. Работы Ципфа получили существенно больший резонанс, и правилу «ранг-размер» было присвоено его имя.

Для его формулировки используют ранжированный (то есть упорядоченный по убыванию) ряд численностей населения городов, входящих в систему, как функцию ранга. То есть, если N_r – численность населения r–го по величине города, то распределение населения по населенным пунктам описывается зависимостью $N_r(r)$. Закон Ципфа утверждает, что в различных системах городов (в глобальной системе городов мира, в системах городов крупных стран и регионов) между рангом r и численностью населения N_r имеет место степенная зависимость:

$$N_r \approx \frac{N_0}{r^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad r = 1, 2, ..., R, \tag{11}$$

где N_0 и α постоянные, свои для каждой системы городов. Для значительного количества стран показатель α близок к единице. Поэтому иногда формулировка закона Ципфа выглядит как $N_r = N_0 / r$. В двойной логарифмической шкале график зависимости (11) представляет собой прямую линию:

$$\ln(N_r) = \ln(N_0) - \alpha \ln r. \tag{12}$$

Из формулы (11) видно, что свойства совокупности городов, описываемой степенным распределением, существенно зависят от показателя α. Действительно, найдем общую сумму городских жителей рассматриваемой системы городов, для этого просуммируем численности всех городов в соответствии с формулой (11).

$$N = \sum_1^R N_r \approx \sum_1^R \frac{N_0}{r^{\alpha}}. \tag{13}$$

Если $\alpha<1$, то основной вклад в сумму вносят несколько крупных городов. Если же $\alpha>1$, то доминирующий вклад в сумму вносит основная масса небольших городов. Другими словами, в первом случае большая часть населения проживает в небольшом числе крупных городов, а во втором случае население рассредоточено по большому числу мелких городов. В пограничном случае с $\alpha \approx 1$ одинаково важны большие и малые города.

Многими исследователями отмечено, что на прямую закона Ципфа (12) хорошо ложатся средние и малые города, а для нескольких больших городов наблюдается отклонение от этого закона.

В геоурбанистике соответствие правилу ранг-размер с $\alpha = 1$ долгое время рассматривалось как зрелость сформировавшейся иерархической системы городов, как важная характеристика целостности системы, а отклонение от этого закона заставляло искать исторические объяснения. Так Ленинград еще долгое время возглавлял список городов России после того, как в 1918 г. Москва стала столицей СССР, и только в середине прошлого века он переместился на положенное ему почетное второе место. После развала СССР Каунас в Латвии и Таллинн в Эстонии, бывшие порты огромного государства, не вписываются в закон Ципфа, так как являются слишком большими для отделившихся маленьких государств. Аналогичная ситуация имеет место с Харьковом на Украине и Варшавой в Польше.

Использование показателей степени при n, имеющих значение, отличное от единицы, позволило в огромной степени улучшить соответствие между эмпирическими данными и предсказаниями теории и, соответственно, существенно расширить сферу применения правила «ранг-размер».

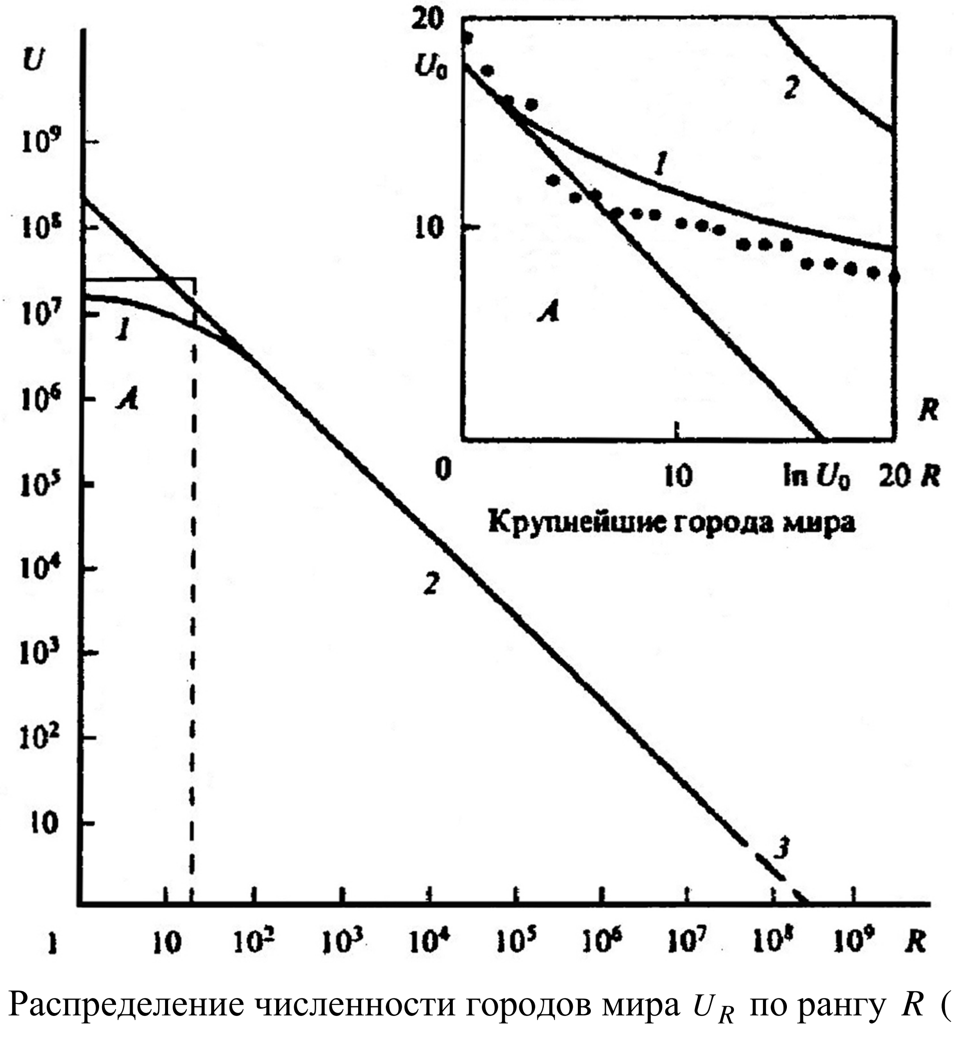

Рис. 5. Распределение численности городов мира U_R по рангу R ($\alpha = 1$).

На рис. 5 приведен график распределения городов мира по рангу для 1985 г., построенный С.П. Капицей [3], который свидетельствует о развитии человечества, как единой глобальной системы. Мы видим, что от закона (12) с $\alpha = 1$ отклоняются только крупнейшие города мира. Аналогичные графики имеют место для целого ряда стран [4,5,6]. При таком построении константа N_0 имеет смысл гипотетической численности первого номера. Для многих распределений городов фактическая численность главного города составляет 0.9 от N_0 [5]. Результаты, полученные А.А. Важениным [5], показывают устойчивость распределения «ранг-размер» для городов мира в XIX-XX вв., несмотря на рост городского населения мира с 45 млн. жит. в 1800г. до 2750 млн. жит. в 1995г. (соответственно, 5% и 48% от общей численности населения).

Закон Ципфа проверен и выполняется для большого количества совокупностей городов. Однако выявлены совокупности городских поселений, не подчиняющиеся закону Ципфа. В работе [7] построена модель роста невзаимодействующих городов в системе, в которых прибытие или убытие населения происходит с вероятностью пропорциональной населению города. Показано, что такая совокупность городов подчиняется закону:

$$N_r = N_0 - \alpha \ln r. \qquad (14)$$

К системам невзаимодействующих между собой городов (или слабо взаимодействующих) можно отнести города, расположенные в окрестности крупного центра, например, Москвы или Санкт-Петербурга. Все эти города, находящиеся в Московской или Ленинградской области, имеют очень сильные взаимодействия с центром, в то время как, их взаимодействия друг с другом относительно слабы. В этой работе [7] показано, что зависимость (14) в шесть раз лучше объясняет распределение городов Московской области в 1979 г. по их размерам, чем правило Ципфа в смысле остаточной (необъясненной) дисперсии (коэффициент корреляции 0.987 против 0.920 для правила Ципфа).

Зависимость (14), по-видимому, характерна для малых городов в региональных системах расселения, поэтому при описании с помощью закона Ципфа всей совокупности городов большого региона наблюдается отклонение от формулы (11) и для малых городов.

Для улучшения соответствия правилу Ципфа в формуле (11) иногда ранжированный ряд начинают не с 1, а с некоторого номера r_0: r_0, r_0+1, r_0+2,…,. Ранг r_0, приписываемый крупнейшему значению, называют *величиной рангового искажения* [4].

Интересные данные собраны и обобщены в работе [4] для совокупности городов России, США, а также для агломераций США и мира в целом. На рис. 6 [4] приведен график распределения людей по населенным пунктам России с населением свыше 200 человек в соответствии с всесоюзной переписью населения в 2002 г. и подобраны константы r_0, α, наилучшим образом описывающие совокупность городов России ($r_0 = 15$, $\alpha = 0.88$). Мы видим, что из закона Ципфа выпадают два крупнейших города: Москва и Санкт-Петербург, а также множество самых мелких населенных пунктов.

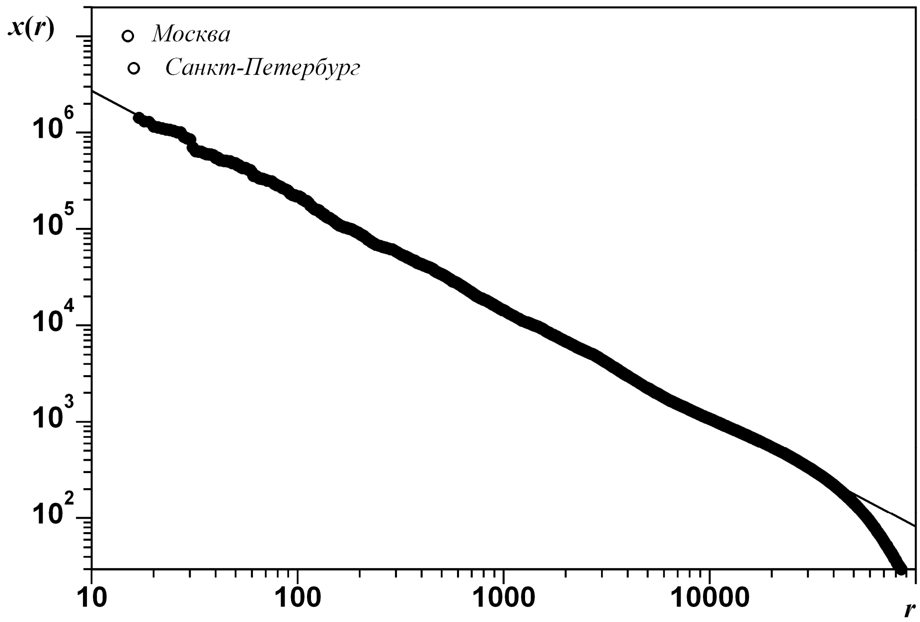

Рис. 6. Ранжировка по числу жителей более 42 тыс. населенных пунктов России с населением свыше 200 человек, 2002 г.[4].

Отмечено, что схожую ситуацию имеет зависимость ранг–размер для урбанизированных районов США. За исключением районов Нью-Йорка, Лос-Анджелеса и Чикаго – центров трех основных центров концентрации американской экономики – остальные объекты подчиняются формуле (11) с r_0=12 и α=0.72. Как и для жителей городов России в распределения жителей США по урбанизированным районам доминирующий вклад приходится на крупные объекты.

В работах [4], [6] дается объяснение механизма формирования распределений типа «ранг-размер» как с $\alpha \geq 1$, так и с $\alpha \leq 1$ для систем любой природы (люди, фирмы, города, страны, космические тела и т.д.). Авторы исходят из теории вероятности и самых общих предположений, касающихся правил дележа общего ресурса (прироста) системы, на основе конкуренции, когда скорость роста оказывается пропорциональной уже достигнутому размеру. В [6] показано, как со временем показатель α может возрастать, проходя через единицу, а, значит, тип распределения может качественно изменяться. Хотя эти модели позволяют получить ранжированный ряд в соответствие с законом ранг-размер, но применительно к системе городов правила дележа общего ресурса представляются весьма искусственными.

В настоящей работе предлагается модель взаимодействия городов, связанных в единую иерархическую систему. В основе модели лежит система ОДУ, описывающая изменение численностей города. Показано, что независимо от начального распределения все города выстраиваются в цепочку, подчиняющуюся закону «ранг-размер», отклонение, как и на практике, наблюдается только нескольких больших и очень малых городов. Подобраны параметры модели для системы городов России. Рассмотрено несколько переписей населения и исследована динамика развития.

2. Распределение «ранг-размер» для городов России.

Возьмем те же данные переписей населения городов России за 1959, 1970, 1979, 1989 и 2002 годы, какие мы брали выше, и упорядочим города по убыванию численности их населения. Таким образом, Москва будет идти под номером 1, Санкт-Петербург – под номером 2 и т.д. В отличие от ранжированного ряда поселений в 2002 г. [4], представленного на рис. 6, мы рассматривали не все населенные пункты, а только города. В двойной логарифмической шкале построим ранжированные графики городов для всех пяти переписей. Результаты показаны на рис. 7.

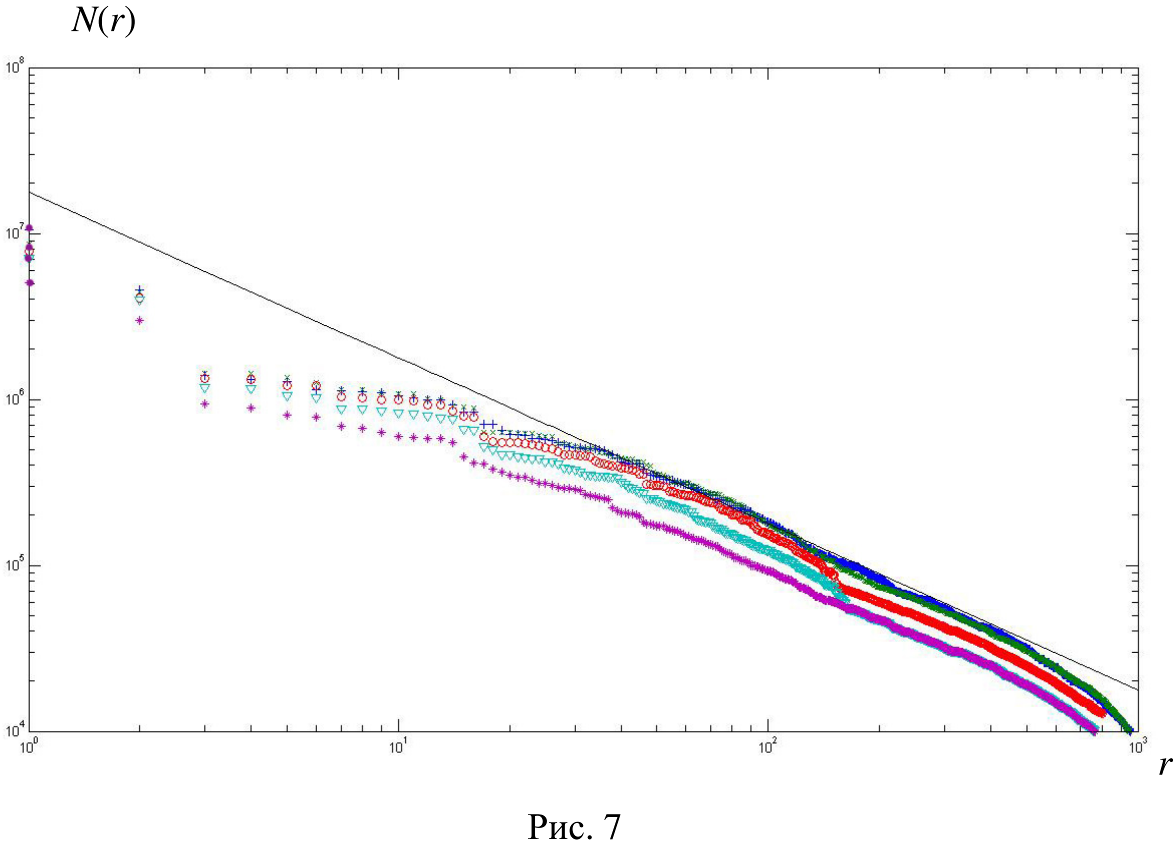

Рис. 7

Мы видим, что большинство городов, кроме самых крупных и самых маленьких, хорошо укладываются на прямую линию (12) с $\alpha = 0.9$, описывающую распределение ранг-размер. Отклонение нескольких самых крупных городов от прямой – довольно распространенное явление. Оно обусловлено отличным механизмом развития крупнейших городов. В то время как увеличение числа жителей обычных населенных пунктов происходит локально, за счет естественного прироста или притока населения из близлежащих населенных пунктов меньшего размера, то столичное население растет за счет притока людей сразу со всей страны, а также из других стран. При построении аналогичного графика для бывшего СССР к перечню таких городов – ядер глобальной концентрации населения, которые не ложатся на общую степенную зависимость, – добавились бы еще Ташкент и Киев. Отклонение также наблюдается и для самых маленьких городов, поскольку они развиваются иначе, чем города большего размера.

Отметим, что из-за недавнего распада СССР и выпадения из списка целого ряда крупных городов, отошедших в соседние республики, систему городов России нельзя считать сформировавшейся (целостной). Этим фактом объясняется более сильное отклонение от закона Ципфа городов России, чем других систем городов, например США. Тем не менее, по графикам на рис. 7 можно проследить общие тенденции в развитии системы городских поселений со временем.

Исследования показывает, что с течением времени города растут, все сильнее приближаясь к прямой (12). При этом города с небольшой численностью растут медленно и со временем достигают своего предела, так что их рост останавливается. Темпы роста самых крупных городов, напротив, увеличиваются, и чем крупнее город, тем он относительно быстрее растет.

3. Модель взаимодействия городов.

Рассмотрим систему городов, в которых население может расти, как за счет рождаемости, так и за счет миграции населения из других городов и деревень. Нашей целью является построение математической модели роста и взаимодействия городов, объясняющей формирование распределения ранг-размер с течением времени.

Будем считать, что численность города является основным параметром порядка, отражающим уровень развития города и качество, предоставляемого им услуг. Как было сказано вначале, чем крупнее город, тем больше жители города имеют возможность получить хорошее образование, культурное и физическое развитие, устроиться на высокооплачиваемую работу, иметь разнообразные культурные, спортивные и др. развлечения и т.д., то есть тем привлекательней город.

Крупные города, как мощные насосы, всасывают в себя население. С другой стороны, большие города имеют много разных проблем (транспортных, жилищных, экологических, экономических и др.), вызывающих отток населения. В результате действия этих двух главных факторов формируется иерархическая система, в которой все города выстраиваются в цепочку.

Разумно предположить, что математическая модель должна иметь тип нелинейного уравнения теплопроводности с источником, в которой нелинейный объемный источник моделирует прирост населения города за счет рождаемости и за счет притока мигрантов вследствие его экономической и социальной привлекательности, а нелинейная диффузия описывает факторы оттока населения из города. Поскольку прирост населения только за счет рождаемости дает линейный источник, то именно нелинейность описывает факторы роста города за счет приезжих. Развитые страны, в том числе и Россия, прошли демографический переход, но крупные города продолжают расти вследствие притока населения извне.

Рассмотрим дискретную систему городов. Занумеруем все города по убыванию численности их населения. Так, $u_1(t)$ − численность первого города, $u_r(t)$ − численность r-го города в момент времени t, где r − это номер в списке или ранг города. При этом $u_{r+1} \le u_r$. Будем предполагать, что скорость изменения численности каждого из городов описывается цепочкой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = W_r + q_0 u_r{}^{\beta}, \quad r = 1,2,...,R, \tag{15}$$

где
$$W_r = \frac{d_0}{\sigma+1}(u_{r+1}^{\sigma+1} - 2u_r^{\sigma+1} + u_{r-1}^{\sigma+1}) \tag{16}$$

для всех городов, кроме первого и последнего ($r = 2,3,...,R-1$),
для первого города ($r = 1$):

$$W_1 = \frac{d_0}{\sigma+1}(u_2^{\sigma+1} - u_1^{\sigma+1}), \tag{17}$$

для последнего города ($r = R$):

$$W_R = \frac{d_0}{\sigma+1}(-u_R^{\sigma+1} + u_{R-1}^{\sigma+1}). \tag{18}$$

Фактически W является разностным аналогом дифференциального оператора диффузии на сетке с шагом 1, а член $q_0 u^{\beta}$ играет роль объемного источника.

В некоторый момент времени в прошлом зададим начальное распределение:

$$u(r,t_0)=u_0(r)\,. \tag{19}$$

Систему уравнений (15)-(19) можно рассматривать как метод прямых решения задачи для одномерного нелинейного уравнения теплопроводности относительно плотности распределения населения $u(r,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=d_0\frac{\partial}{\partial r}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+q_0u^{\beta}\,. \tag{20}$$

Решения нелинейного уравнения теплопроводности (20) хорошо известны [8]. Это уравнение интенсивно изучалось, начиная с 70-х годов прошлого века, в связи с исследованием процессов термоядерного горения в плазме. Было показано, что с течением времени решения, отвечающие произвольным начальным данным (19), стремятся к автомодельным решениям уравнения (20). Другими словами, автомодельные решения играют роль аттракторов и описывают все типы возможных режимов развития начальных данных на асимптотической стадии.

Автомодельные решения уравнения (20) имеют вид [8]:

$$u(r,t)=g(t)\Theta(\xi),\quad \xi=\frac{r}{\varphi(t)}\,, \tag{21}$$

$$g(t)=\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^{m},\ \ \varphi(t)=\left(1-\frac{t}{\tau}\right)^{n},\ m=-\frac{1}{\beta-1},\quad n=\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}, \tag{22}$$

где ξ – автомодельная переменная, τ – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (21). При $\beta>1$ и $\tau>0$ автомодельные решения развиваются *в режиме с обострением*, при котором функция u асимптотически уходит в бесконечность за конечное время τ, называемое временем обострения. Из формул (21), (22) видно, что тип автомодельного режима зависит от соотношения между параметрами β и σ.

Наш сравнительный анализ динамики развития городов и решений уравнения (20) показал, что параметры модели должны лежать в диапазонах:

$$0<\sigma<1,\quad \sigma+1<\beta<\sigma+3\,, \tag{23}$$

что соответствует так называемому *LS*-режиму с обострением ($\beta>\sigma+1$).

Автомодельное уравнение относительно функции $\Theta(\xi)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\Theta^{\sigma}\frac{d\Theta}{d\xi}\right)=-\frac{m}{\tau}\Theta+\frac{n}{\tau}\xi\frac{d\Theta}{d\xi}-\Theta^{\beta} \tag{24}$$

и дополняется следующими граничными условиями:
на бесконечности при $\xi\to\infty$:

$$\Theta^{\sigma} \frac{d\Theta}{d\xi} \underset{\xi \to \infty}{\to} 0, \quad \Theta \underset{\xi \to \infty}{\to} 0, \tag{25}$$

в начале координат:

$$\Theta^{\sigma} \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = 0} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = 0} < \infty. \tag{26}$$

При $\beta > \sigma + 1$ все точки профиля автомодельного решения движутся к центру (так как $r(t) = \xi\phi(t)$ уменьшается со временем) и растут в режиме с обострением, полуширина решения сокращается, и функция $u(r,t)$ обращается в бесконечность при $t = \tau$ только в одной точке – центре симметрии. Автомодельное решение описывает сходящуюся к центру волну.

Автомодельная задача (24)-(26) может иметь несколько решений, но структурно устойчивым решением является только одна функция $\Theta_1(\xi)$, имеющая максимум в центре и монотонно стремящаяся к нулю при $\xi \to \infty$. Причем при $\xi \to \infty$ она имеет степенную асимптотику [8]:

$$\Theta(\xi) \underset{\xi \to \infty}{\to} C\xi^{-p}, \quad p = 2/(\beta - \sigma - 1) > 0, \tag{27}$$

где C – некоторая константа.

Функция $u(r,t)$ (23), соответствующая $\Theta_1(\xi)$, обладает рядом свойств, качественно описывающих динамику развития системы городов. Так асимптотика (27) описывает предельное распределение плотности при $t \to \tau$

$$u(r,t) \underset{t \to \tau}{\to} C\, r^{-p}, \tag{28}$$

которое соответствует распределению ранг-размер. Чем ближе время к моменту обострения, тем ближе прижимается решение $u(r,t)$ к предельному асимптотическому распределению (28).

Естественно было ожидать, что и решения $u_r(t)$, $r = 1,...,R$ системы ОДУ (15)-(19) для городов будет обладать аналогичными свойствами. Действительно, произведенные расчеты для разных значений параметров d_0, σ, q_0, β и разных начальных распределений показали, что с достаточно произвольного начального распределения (19) система (15) со временем стремится к распределению ранг-размер. Зависимость ранг-размер наблюдается для большинства городов, отклонения имеются для самых крупных и малых городов, что качественно описывает наблюдаемые закономерности.

Целью настоящей работы также являлся подбор коэффициентов d_0, σ, q_0, β, описывающих динамику роста городов России и формирование распределения ранг-размер, как показано на рис.7. Было взято 1000 городов. Начальное ранжированное распределение городов по численности было линейным: $u_r(t_0) = u^0 - a \cdot r$. Исследования показали, что хорошее соответствие достигается при $d_0 = 0.5$, $\sigma = 0.9$, $q_0 = 1$, $\beta = 2.5$.

На рис.8 приведены графики распределения $u(r)$ в разные моменты времени. Мы видим, что со временем происходит формирование зависимости ранг-размер; в двойной логарифмической шкале города ложатся на прямую. Отклонения наблюдаются для малых и самых крупных городов. Также графики показывают, что темпы роста разных городов сильно различаются. Наблюдается бурный рост крупных городов, причем, чем крупнее город, тем он быстрее растет. Рост же средних и малых городов со временем замедляется, и они прекращают расти. В ближайшее время модель предсказывает заметный рост только главного города России – Москвы и незначительный рост Санкт-Петербурга.

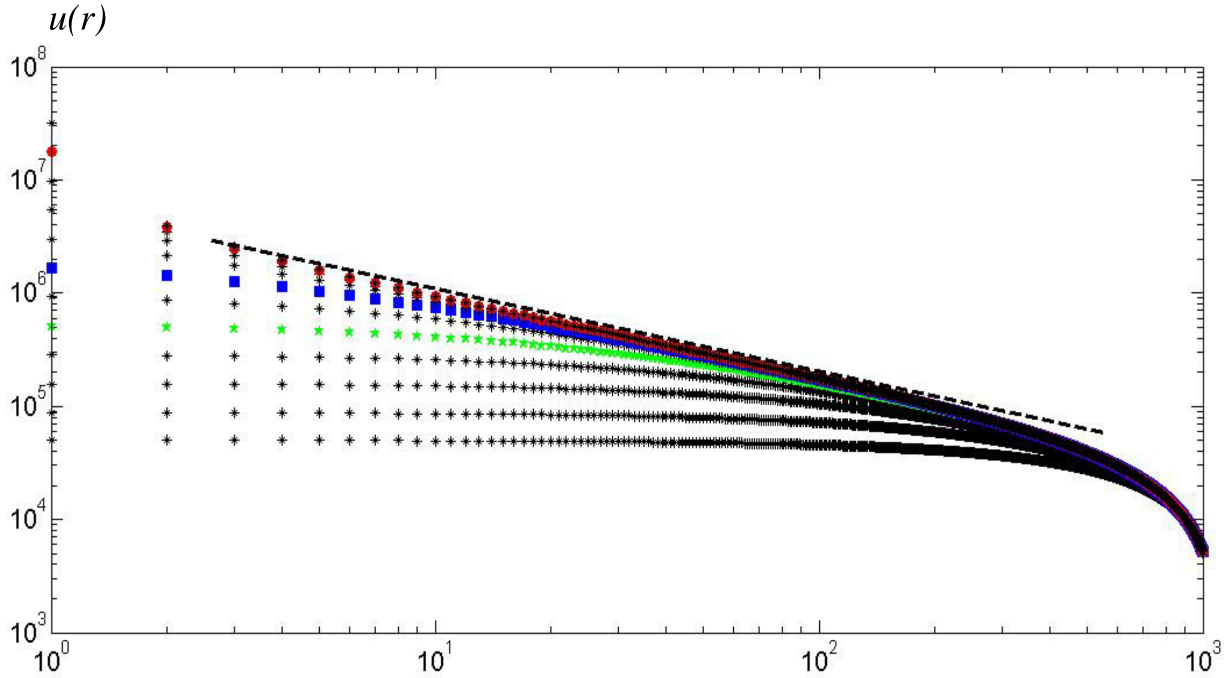

Рис. 8

Изменения в распределении городов по их численности может внести изменившийся в конце прошлого века закон воспроизводства населения, а также усиление процессов глобализации и в связи с этим усиление миграционных процессов. Но в ближайшие годы будут расти только крупные города. Это предсказывает и рассмотренная выше вероятностная модель.

Литература

1. *Н.А. Слука* «Градоцентрическая модель мирового хозяйства.» – М.: Пресс-Соло, 2005. 168 с.
2. Глобальный город: теория и реальность //Под ред. Н.А. Слуки. – Москва: ООО «Аванглион», 2007. 243 с.
3. *Капица С.П., С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий* «Синергетика и прогнозы будущего.»2-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. 288 с.
4. *А.В. Подлазов* «Закон Ципфа и модели конкурентного роста» //В. сб. Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании. Ред. Г.Г.Малинецкий. Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. С.229-256.
5. *Важенин А.А.* «Устойчивость распределения городских поселений в системах расселения» // Изв. РАН. Сер. географ. 1999. № 1. С. 55-59.
6. *L. Benguiguia*, *E. Blumenfeld-Lieberthal* «A dynamic model for city size distribution beyond Zipf 's law.» //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, V. 384, 2007, P. 613-627.
7. *С.М.Гусейн-Заде* «Модели размещения населения и населенных пунктов.» –М.: Издательство Московского Университета, 1988. 91 с.
8. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.