В.И. Дмитриев

Обратные задачи оптики слоистых сред.

Введение

Обратные задачи оптики подразделяются на три класса:

- Задача синтеза слоистых сред, в которой определяются параметры диэлектрической среды имеющей заданный коэффициент отражении;
- Задача распознавания диэлектрической слоистой среды, в которой по частотной зависимости коэффициента отражения определяются параметры среды;
- Задача мониторинга диэлектрической среды, в которой по измерениям коэффициента отражения в зависимости от частоты определяется состояние среды.

Коэффициент отражения слоистой среды $R(\omega)$ вычисляется через распределение диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ в виде

$$R(\omega) = A[\varepsilon(z), \omega], \qquad (1)$$

где A - нелинейный оператор, зависящий от частоты поля ω. Выражение (1) можно рассматривать как уравнение для определения $\varepsilon(z)$ по заданному $R(\omega)$.

Данная задача неустойчива, т.е. для любого $c > 0$ существует такое $\delta > 0$, что найдутся два распределения $\varepsilon_1(z)$ и $\varepsilon_2(z)$ сильно отличающиеся друг от друга $\|\varepsilon_1(z) - \varepsilon_2(z)\| \geq c$, а при этом их коэффициенты отражения близки $\|R_1(\omega) - R_2(\omega)\|_{L_2} \leq \delta$. В задачах синтеза возможно отсутствие решения задачи (1), т.к. $R(\omega)$ может не входить в область значений оператора A.

Наиболее эффективно обратные задачи оптики решаются методом регуляризации [1], [2], разработанный А.Н. Тихоновым. Большой вклад в развитии теории обратных задач оптики внесли работы А.В. Тихонравова, подробно описанные в [3]

В работе [4] было показано, что в обратной задачи оптики слоистых сред устойчиво определяется интегральная диэлектрическая проницаемость

$$e(z) = \int_0^z \varepsilon(z)dz\ , \qquad z \in [0, H] \qquad (2)$$

Использование интегральной характеристики позволяет эффективно решать обратные задачи оптики [5].

Применение метода регуляризации сводит обратную задачу к вариационной задаче на минимум сглаживающего функционала [1], для решения который необходимо вычислять многократно градиент функционала. В настоящей статье рассматриваются методы быстрого вычисления градиента функционала для обратных задач оптики.

1 Определение коэффициента отражения слоистой среды

Пусть дан диэлектрический слой с переменной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)$, $z \in [0, H]$. При $z < 0$ имеем однородное подпространство $\varepsilon = \varepsilon_0$, $z < 0$, а при $z > H$ $\varepsilon = \varepsilon_H$. На этот слой нормально падает электромагнитная волна по оси $0z$. Тогда поле имеет следующие компоненты:

электрическое поле $\overline{E} = (E_x, 0, 0)$;

магнитное поле $\overline{H} = (0, H_y, 0)$.

Согласно уравнениям Максвелла поля связаны соотношениями:

$$\frac{dE_x}{dz} = i\omega\mu H_y; \quad \frac{dH_y}{dz} = i\omega\varepsilon(z) E_x \tag{3}$$

Из (3) получаем уравнения для электрического поля

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \omega^2 \mu\varepsilon(z) E_x = 0, \quad z \in (-\infty, \infty), \tag{4}$$

При $z > 0$ имеем падающую и отраженную волну

$$E_x(z) = A_0\left(e^{ik_0 z} + R(\omega) e^{-ik_0 z}\right), \quad z \in (-\infty, 0), \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu}$$

где $R(\omega)$ – коэффициент отражения от слоя, а при $z > H$ имеем только прошедшую волну:

$$E_x(z) = A_0 D(\omega) e^{ik_H(z-H)}, \; z \in (H, \infty)$$

где $D(\omega)$ – коэффициент прохождения. Из этих соотношений, учитывая непрерывность $E_x(z)$ и $E_x'(z)$ при $z = 0$ и $z = H$ находим граничные условия:

$$E_x'(0) + ik_0 E_x(0) = 2ik_0 A_0; \quad E_x'(H) - ik_H E_x(H) = 0 \tag{5}$$

В результате (4) и (5) дают нам краевую задачу для определения $E_x(z)$.

Если ввести нормированное электрическое поле

$$u(z) = E_x(z) / A_0 \tag{6}$$

то получим для $u(z)$ следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u''(z) + \omega^2 \mu\varepsilon(z) u(z) = 0, \quad z \in [0, H]; \\ u'(0) + ik_0 u(0) = 2ik_0; \\ u'(H) - ik_H u(H) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Зная $u(z)$, легко определить $R(\omega)$ и $D(\omega)$ в виде:

$$R(\omega)=u(z=0)-1;\ \ D(\omega)=u(z=H) \tag{8}$$

Краевую задачу (7) обычно решают сведением к уравнению Риккати для адмитансной функции:

$$Y(z)={u'(z)}\big/{u(z)}, \tag{9}$$

Которая, согласно (7), является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} Y'(z)+Y^2(z)=-\omega^2\mu\varepsilon(z), \quad z\in[0,H] \\ Y(H)=ik_H=i\omega\sqrt{\mu\varepsilon_H}. \end{cases}, \tag{10}$$

Определив из(10) $Y(z=0)$, легко находим коэффициент отражения. Согласно (7), краевое условие при $z=0$ дает:

$$u'(0)+ik_0u(0)=Y(z=0)u(z=0)+ik_0u(z=0)=2ik_0$$

Следовательно, находим

$$u'(z=0)=\frac{2ik_0}{Y(z=0)+ik_0};\ \ R(\omega)=\frac{ik_0-Y(z=0)}{ik_0+Y(z=0)} \tag{11}$$

Для определения коэффициента прохождения $D(\omega)$ необходимо решить задачу Коши для $u(z)$:

$$\begin{cases} u''(z)+\omega^2\mu\varepsilon(z)u(z)=0, \ z\in[0,H] \\ u(z=0)={2ik_0}\big/{\left(ik_0+Y(0)\right)} \\ u'(z=0)={2ik_0Y(0)}\big/{\left(ik_0+Y(0)\right)} \end{cases} \tag{12}$$

Определив $u(z=H)$, находим, согласно (8), $D(\omega)=u(H)$.

Если для обратной задачи достаточно определить $R(\omega)$, то такой подход достаточно эффективен. Однако, если необходимо определить $D(\omega)$ или $u(z)$ во внутренних точках $z\in(0,H)$, то более удобно, свести задачу (7) к интегральному уравнению. Для этого введем функцию

$$u_0(z)=\frac{2k_0}{Q}\left((k_c+k_H)e^{ik_cz}+(k_c-k_H)e^{ik_c(2H-z)}\right), \tag{13}$$

$$\text{где}\, Q=(k_c+k_H)(k_c-k_0)-(k_c-k_H)(k_c-k_0)e^{2ik_cH}, \tag{14}$$

которая является решением краевой задачи

$$\begin{cases} u_0''+k_c^2u_0=0, \quad z\in[0,H],\ k_c=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}; \\ u'(0)+ik_0u_0(0)=2ik_0; \\ u'(H)-ik_Hu_0(H)=0. \end{cases} \tag{15}$$

Тогда представим решение задачи (7) в виде:

$$u(z) = u_0(z) + v(z) \tag{16}$$

Функция $v(z)$, согласно (7) и (15), является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v''(z) + k_c^2 v(z) = \left(k_c^2 - k^2(z)\right)u(z), \quad z \in [0,H],\ k(z) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon(z)}; \\ v'(0) + ik_0 v(0) = 0; \\ v'(H) - ik_H v(H) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Введем функцию Грина $G(z,z_0)$ для задачи (17), которая является решением задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2G}{dz^2} + k_c^2 G = \delta(z - z_0), \quad z \in [0,H],\ z_0 \in [0,H] \\ \left.\dfrac{dG}{dz}\right|_{z=0} + ik_0 G\big|_{z=0} = 0, \quad z_0 \in [0,H] \\ \left.\dfrac{dG}{dz}\right|_{z=H} + ik_H G\big|_{z=H} = 0, \quad z_0 \in [0,H] \end{cases} \tag{18}$$

Задача (18) легко решается и функция Грина имеет вид:

$$G(z,z_0) = \frac{1}{2ik_c}\left(e^{ik_c|z-z_0|} + c_1 e^{ik_c(z+z_0)} + c_2 e^{ik_c(2H-z-z_0)}\right), \tag{19}$$

$$\text{где}\, c_1 = \frac{k_c - k_0}{Q}\left((k_c + k_H) + (k_c - k_H)e^{2ik_c(H-z_0)}\right) \tag{20}$$

$$c_2 = \frac{k_c - k_H}{Q}\left((k_c + k_0) + (k_c - k_0)e^{2ik_0 z_0}\right) \tag{21}$$

а Q – определено формулой (14).

Используя формулу Грина, сведем задачу (17) к интегральному уравнению

$$u(z) = u_0(z) + \int_0^H G(z,z_0)\left(k_c^2 - k^2(z_0)\right)u(z_0)dz_0 \tag{22}$$

Решая интегральное уравнение Фредгольма второго рода (22), мы находим $u(z)$ на всем интервале $z \in [0,H]$ и следовательно, согласно (8), определяем $R(\omega)$ и $D(\omega)$.

Таким образом мы имеем два метода вычисления коэффициентов отражения и прохождения для слоистой среды. Один метод дифференциальный, основанный на решении уравнения Риккати для адмитансной функции, а другой основан на решении интегрального уравнения.

2. Постановка обратных задач.

Мы рассмотрим метод решения обратной задачи оптики слоистой среды с использованием интегральной диэлектрической проницаемости(2). Представим искомую диэлектрическую проницаемость в виде кусочно – постоянной функции на сетке с постоянным шагом h.

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_n \text{ при } (n-1)h<z<nh\,,\ n\in[1,N]\,, h=\frac{H}{N} \tag{23}$$

Тогда вычисляемый коэффициент отражения, согласно (1), будет функцией от вектора переменных $\bar{\varepsilon}=\{\varepsilon_n\}$, $n\in[1,N]$ и частоты ω.

$$R^c(\bar{\varepsilon},\omega)=A\left[\varepsilon(z),\omega\right] \tag{24}$$

В обратной задаче синтеза задается требуемый коэффициент отражения $R^0(\omega)$ в зависимости от частоты ω, а в задаче распознавания мы имеем наблюденный коэффициент отражения $R^0(\omega)$. В обратной задаче будем искать квазирешение задачи реализующее минимум невязки вычисленного $R^c(\varepsilon,\omega_m)$ от заданного $R^0(\omega_m)$ на некоторой сетке частот $\{\omega_m\}$, $m\in[1,M]$, т.е.

$$\min_{\bar{\varepsilon}}\sum_{m=1}^{N}\left|R^c(\bar{\varepsilon},\omega_m)-R^0(\omega)\right|^2 \tag{25}$$

Так как обратная задача неустойчивая, то полученное решение $\bar{\varepsilon}$ из задачи минимизации (25) будет сильно отличатся от истинного решения. Однако, как говорилось выше, интегральная диэлектрическая проницаемость определяется устойчиво. Поэтому $\tilde{l}(z)$ вычисленное по формуле (2) даст приближенное значение истинного $l(z)$. В результате мы получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода для определения $\varepsilon(z)$:

$$\int_0^z \varepsilon(\zeta)d\zeta=\tilde{l}(z),\quad z\in[0,H] \tag{26}$$

Таким образом, мы трансформировали нелинейную неустойчивую обратную задачу к решению линейного интегрального уравнения первого рода. Решение этой задачи неустойчиво, но для его решения существует метод регуляризации. Для решения задачи минимизации (25) нам необходимо вычислять градиент коэффициента отражения $R^c(\overline{\varepsilon},\omega)$ по переменным $\overline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N)$.

3. Быстрое вычисление градиента.

Рассмотрим вначале вычисление градиента $R(\overline{\varepsilon},\omega)$ с помощью адмитансной функции $Y(z)$. Согласно (11) имеем:

$$q=\frac{\partial R(\overline{\varepsilon},\omega)}{\partial\varepsilon_n}=\frac{2ik_0}{\left(ik_0+Y(z=0)\right)^2}\cdot\left.\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon_n}\right|_{z=0} \tag{27}$$

Функция $\varphi_n(z)=\dfrac{\partial Y(z)}{\partial\varepsilon_n}$, согласно (10), является решение задачи Коши:

$$\begin{cases}\varphi_n'(z)+2Y(z)\varphi_n(z)=-\omega^2\mu\cdot f_n(z), \quad z\in[0,H]\\ \varphi_n(z=H)=0\end{cases} \tag{28}$$

$$\text{где } f_n(z)=\begin{cases}1 \ \text{ при } \ z\in[z_{n-1},z_n]\\ 0 \ \text{ при } \ z\notin[z_{n-1},z_n]\end{cases} \tag{29}$$

так как $f_n(z)=0$ при $z\in[z_n,H]$, то, согласно (28), получаем $\varphi_n(z_n)=0$. Тогда рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\varphi_n'(z)+2Y(z)\varphi_n(z)=-\omega^2\mu, \quad z\in[z_{n-1},z_n]\\ \varphi_n(z_n)=0\end{cases} \tag{30}$$

Откуда находим

$$\varphi_n(z)=\omega^2\mu e^{-2P(z)}\int_z^{z_n}e^{+2P(\xi)}d\xi \tag{31}$$

$$\text{где } P(z)=\omega^2\int_{z_n}^{z}Y(\zeta)d\zeta \tag{32}$$

Откуда получаем

$$\varphi_n(z_{n-1})=\omega^2\mu\int_{z_{n-1}}^{z_n}e^{-2\alpha(\xi)}d\xi \tag{33}$$

$$\text{где } \alpha(\xi)=P(z_{n-1})-P(\xi)=\int_{\xi}^{z_{n-1}}Y(\zeta)d\zeta \tag{34}$$

В результате для определения $\varphi_n(z=0)$ получаем задачу:

$$\begin{cases}\varphi_n'(z)+2Y(z)\varphi_n(z)=0, \quad z\in[0,z_{n-1}]\\ \varphi_n(z_{n-1})=\omega^2\mu\displaystyle\int_{z_{n-1}}^{z_n}e^{-2\alpha(\xi)}d\xi\end{cases} \tag{35}$$

Откуда получаем, окончательно,

$$\varphi_n(z=0)=\varphi_n(z_{n-1})e^{+2\int\limits_0^{z_{n-1}}Y(\zeta)d\zeta} \tag{36}$$

Тогда, согласно (27), находим

$$q_n=\frac{\partial R(\overline{\varepsilon},\omega)}{\partial \varepsilon_n}=\frac{2ik_0\varphi_n(z_{n-1})}{\left(ik_0Y(z=0)\right)^2}\cdot e^{2\int\limits_0^{z_{n-1}}Y(\zeta)d\zeta} \tag{37}$$

Подставив (33) в (37), получим, окончательно:

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_n}=\frac{2ik_0\omega^2\mu}{\left(ik_0+Y(z=0)\right)^2}\int\limits_{z_{n-1}}^{z_n}e^{2P_0(\xi)}d\xi \tag{38}$$

$$\text{где } P_0(\xi)=\int\limits_0^{\xi}Y(\zeta)d\zeta \tag{39}$$

Выражение (38) можно упростить, учитывая, что $P_0(\xi)$ при $\xi\in[z_{n-1},z_n]$ изменяется незначительно. Тогда приближенно можно представить:

$$P_n(\xi)\cong P_0(z_{n-1})+Y(z_{n-1})(\xi-z_{n-1}),\ \xi\in[z_{n-1},z_n]$$

Подставив полученное выражение в (38) и проведя интегрирование, найдем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon_n}=\frac{2ik_0\omega^2\mu\cdot e^{2P_0(z_{n-1})}}{Y(z_{n-1})\left(ik_0+Y(z=0)\right)^2}\cdot\left(e^{2Y(z_{n-1})h}-1\right) \tag{40}$$

Таким образом, решив задачу (10) и определив адмитансную функцию $Y(z)$ при $z\in[0,H]$, мы по формулам (11) и (38) (или (40)) легко определяем как коэффициент отражения $R(\omega)$ так $\partial R/\partial\varepsilon_n$, $n\in[1,N]$. Это существенно убыстряет процесс минимизации при решении обратной задачи (25). Особенно это имеет большое значение, если число разбиений N велико.

Рассмотрим теперь использование интегрального уравнения (22) для вычисления градиента $R(\overline{\varepsilon},\omega)$ и $D(\overline{\varepsilon},\omega)$. Используя кусочно-постоянное представление диэлектрической проницаемости (23) мы можем представить интегральное уравнение (22) в виде:

$$u(z)=u_0(z)+\sum_{n=1}^{N}\omega^2\mu\left(\varepsilon_c-\varepsilon_n\right)\int\limits_{(n-1)h}^{nh}G(z,z_0)u(z_0)dz_0 \tag{41}$$

Решение интегрального уравнения зависит от $\bar{\varepsilon}=\{\varepsilon_n\}$, ядро уравнения $G(z,z_0)$ не зависит от $\bar{\varepsilon}$. Введем функцию $d_n(z)=\dfrac{\partial u(z)}{\partial\varepsilon_n}$. Тогда продифференцировав (41) по ε_n получим уравнений для $d_n(z)$:

$$d_n(z)=f(z)+\sum_{n=1}^{N}\omega^2\mu(\varepsilon_0-\varepsilon_n)\int_{(n-1)h}^{nh}G(z,z_0)d_n(z_0)dz_0 \qquad (42)$$

$$\text{где } f(z)=-\omega^2\mu(\varepsilon_0-\varepsilon_n)\int_{(n-1)h}^{nh}G(z,z_0)u(z_0)dz_0 \qquad (43)$$

Отметим, что ядра интегральных уравнений одни и те же, как для определения $u(z)$, так и для $d_n(z)$, $n\in[1,N]$. Поэтому уравнения можно решать одновременно на основе параллельных вычислений. В соответствии с (8), решив интегральные уравнения (41) и (42), находим

$$R(\omega)=u(z=0)-1, \qquad D(\omega)=u(z=H)$$

$$\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_n}=\frac{\partial u(z=0)}{\partial\varepsilon_n}=d_n(z=0);\quad \frac{\partial D}{\partial\varepsilon_n}=\frac{\partial u(z=H)}{\partial\varepsilon_n}=d_n(z=H) \qquad (44)$$

Таким образом мы получаем быстрое вычисление коэффициентов отражения и прохождения, а также их градиенты по $\bar{\varepsilon}$. Это позволяет эффективно решать обратные задачи оптики слоистых сред.

Литература

1. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. Наука, Москва 1986.
2. Гласко В.Б., Тихонов А.Н., Тихонравов А.В. О синтезе многослойных покрытий. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974, т. 14, №1, с. 135-144.
3. Sh. A. Furmanm, A.V. Tikhonravov. Basics of optics of multilayer systems, 1992
4. Дмитриев В.И. Интегральные характеристики в обратных задачах оптики. Вестник Московского Государственного Университета, серия 15, “Вычислительная математика и кибернетика” 1998, №4, стр 10-13.//
5. В.И. Дмитриев, А.С. Чернявский. Метод интегральных характеристик в обратной задаче синтеза оптических покрытий. Прикладная математика и информатика. №5. Москва, Макс Пресс 2000. // V.I. Dmitriev, A.S. Chernyavskii Integral Characteristic Method in the Inverse Problem of Optical Coating Design. Computational Mathematics and Modeling. 2001, Volume 12, Issue 2, pp 128-136