В.И. Дмитриев, Е.В.Захаров

ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ МОРСКИХ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ЗОНДИРОВАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД[1].

Введение

Магнитотеллурические зондирования — один их основных способов изучения строения земной толщи. Его основы были заложены А.Н.Тихоновым и Каньяром в 50-х годах прошлого столетия. Существенную роль в моделировании магнитотеллурического поля играет дневная поверхность (граница "земля-воздух"), разделяющая среды с резким скачком электропроводности, что позволило построить ряд канонических моделей (при этом электропроводность воздуха полагается равной нулю (см. например [1])).

Изучение магнитотеллурического поля на дне морей или океанов требует построения новых моделей, учитывающих отличную от нуля электропроводность морской воды небольшой (до десяти единиц) перепад электропроводности при переходе через границу раздела "морская вода-донные отложения". При этом дневная поверхность отодвигается от поверхности измерения магнитотеллурического поля (импедансов или компонент аномального магнитного поля) на достаточно большое расстояние, а пространство между ними занято сильно проводящей средой (морской водой). Возникает модель вмещающей слоистой среды: полупространство $z<-H$ (воздух), проводимость которого σ_0 достаточно мала и может быть положена равной нулю, затем толща морской воды $0>z>-H$ с большой электропроводностью. Поверхность $z=0$ (морское дно) является поверхностью, на которой измеряется магнитотеллурическое поле. Под этой поверхностью расположен слой донных отложений ($0<z<h$), лежащий на кристаллическом фундаменте ($z>h$) с относительно малой проводимостью.

В кристаллическом фундаменте расположена трехмерная область V, заполненная проводящей средой с проводимостью отличной от проводимости вмещающей среды. Необходимо изучить аномальное электромагнитное поле $\left\{E^A, H^A\right\}$ на поверхности $z=0$ с целью определения геометрических размеров области V и проводимость среды ее заполняющей.

Поэтому на начальном этапе исследования возникает достаточно простая модель вмещающей среды: два однородных проводящих

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 07-05-00523

полупространства, разделенных плоской границей раздела $z=0$. В нижнем полупространстве ($z>0$) расположена ограниченная (локальная) трехмерная область V, заполненная проводящей средой, отличной от электропроводности вмещающей среды. Будем считать, что неоднородность квазиизометрична, т.е. ее размеры по координатным осям x, y, z конечны и не отличаются на порядки. Область неоднородности можно погрузить в куб (или в параллелепипед), электропроводность среды в котором будет кусочно-дифференцируемой функцией координат.

Источник возбуждаемого электромагнитного (магнитотеллурического) поля расположен в верхнем полупространстве и представляет собой систему магнитных диполей, произвольно ориентированных относительно границы раздела сред ($z=0$). В этом случае проблема изучения аномального электромагнитного поля, создаваемого областью V, сводится к решению трехмерной (векторной) задачи для системы уравнений Максвелла. В данной работе будет поставлена граничная трехмерная задача для уравнений Максвелла в частотном режиме (зависимость $e^{-i\omega t}$) для ряда моделей морских магнитотеллурических зондирований, получены векторные интегральные уравнения по области V, допускающие решения численными методами.

Основы применения метода интегральных уравнений к трехмерным задачам электродинамики неоднородных слоистых сред были созданы сравнительно давно [2-4] и эффективно применены для анализа трехмерных моделей электроразведки [5-6].

Постановка задачи

Пусть имеется проводящая плоскопараллельная среда (рис1). В нижнем полупространстве ($z>h$) расположена область V, ограниченная поверхностью S и заполненная неоднородной проводящей средой с удельной электропроводностью $\sigma=\sigma_T(M), M(x,y,z)$. В дальнейшем будем считать, что функция $\sigma=\sigma_T(M)$ является непрерывно дифференцируемой функцией. При этом предел функции $\sigma_T(M)$ при стремлении точки M к границе S всюду одинаков и равен проводимости вмещающей среды σ_3. Такое ограничение на поведение $\sigma_T(M)$ упрощает методику перехода от краевой задачи для уравнений Максвелла к интегральным уравнениям по области V. Сами же интегральные уравнения будут справедливы и для кусочно-дифференцируемой функции $\sigma_T(x,y,z)$ при условии постоянства магнитной проницаемости μ_0 во всем пространстве.

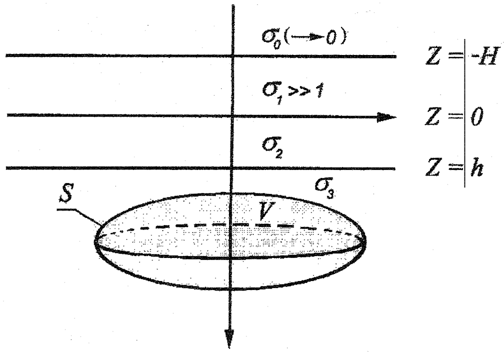

Рис.1

На всех границах раздела сред непрерывны касательные к границам компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. На бесконечности выполнены условия убывания $\vec{E}(M) \sim o(\frac{1}{r})$; $\vec{H}(M) \sim o(\frac{1}{r})$ (в силу того, что $\sigma \neq 0$).

Поставленная граничная задача для уравнений Максвелла может быть сведена к векторным интегральным уравнениям по области V относительно компонент вектора электрической напряженности $\vec{E}(M)$.

Заметим, что в низкочастотной электродинамике такого типа уравнения наиболее приемлемы в силу простоты их структуры и небольших относительных размеров носителей (характерные размеры области V). Кроме того, постоянство магнитной проницаемости во всем пространстве упрощает систему граничных условий именно на компоненты вектора $\vec{E}$.

В данной неоднородной среде с помощью системы дипольных источников магнитного типа, расположенных в верхнем полупространстве $(z < -H)$ возбуждается электромагнитное поле. Не ограничивая общности будем считать, что сторонние источники локализованы в области V_0.

Вывод интегральных уравнений

Сведем поставленную граничную задачу для системы уравнений Максвелла к системе интегральных уравнений по области V относительно декартовых составляющих вектора электрической напряженности $\vec{E}\left\{E_x, E_y, E_z\right\}$. Следуя [7], введем тензорные функции Грина N-слойной слоистой среды (в нашем случае N=4) (рис.1) электрического $\hat{G}_E(M,P)$ и $\hat{G}_H(M,P)$ магнитного типа соответственно. Функции $\hat{G}_E(M,P)$ и

$\hat{G}_H(M,P)$ по координатам точки $M(x,y,z)$ удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\hat{G}_H = \sigma(z)\hat{G}_E + \hat{\delta}(M,P), \\ \mathrm{rot}\hat{G}_E = i\omega\mu_0\hat{G}_H, \end{cases} \tag{1}$$

где $\hat{\delta}(M,P)$—диагональная матрица-функция, операции $\mathrm{rot}\hat{G}_E$ и $\mathrm{rot}\hat{G}_H$ определены, например, в [2], а $\sigma(z)$—кусочно-постоянная функция, соответствующая четырехслойной слоистой среде (рис.1).

Функции $\hat{G}_E(M,P)$ и $\hat{G}_H(M,P)$ могут быть представлены с помощью тензорного потенциала $\hat{G}(M,P)$.

$$\hat{G}_H(M,P) = \frac{1}{i\omega\mu_0}\mathrm{rot}\hat{G}(M,P), \tag{2}$$

$$\hat{G}_E(M,P) = \hat{G}(M,P) + \frac{1}{i\omega\mu_0\sigma(z)}\mathrm{grad\ div}\,\hat{G}(M,P).$$

Тензорный потенциал $\hat{G}(M,P)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta\hat{G} + i\omega\mu_0\sigma(z)\hat{G} = -i\omega\mu_0\hat{\delta}(M,P)$$

и имеет вид

$$\hat{G}(M,P) = \begin{pmatrix} G_1(M,P) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(M,P) & 0 \\ \dfrac{\partial g(M,P)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(M,P)}{\partial y} & G_2(M,P) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

На границах разрыва кусочно-постоянной функции $\sigma(z)$ выполнены условия:

$$[G_1] = 0;\quad [G_2] = 0;\quad [g] = 0;\quad \left[\frac{\partial G_1}{\partial z}\right] = 0; \tag{4}$$

$$\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial G_2}{\partial z}\right] = 0;\quad \left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial g}{\partial z}\right] = -\left[\frac{1}{\sigma}\right]\mathrm{G}_1.$$

Полная постановка задачи для матричных элементов тензора $\hat{G}(M,P)$, а также алгоритмы его вычисления изложены в [7].

Пусть далее имеется область V_0 (в верхнем полупространстве $z < -H$), в которой расположены дипольные источники электромагнитного поля с плотностью токов $j(M)$.

Тогда векторы $\vec{E}^{норм}$ и $\vec{H}^{норм}$ представляются в виде:

$$\vec{E}^{норм} = \int_{V_0} \hat{G}_E(M,P) j(p) d\tau_p,$$

$$\vec{H}^{норм} = \int_{V_0} \hat{G}_H(M,P) j(p) d\tau_p,$$

где $\vec{E}^{норм}$ и $\vec{H}^{норм}$ — электромагнитное поле в слоистой среде (N=4), создаваемое заданными источниками в отсутствии неоднородности (область V).

Перепишем систему уравнений Максвелла (пока формально), вводя токи поляризации, заполняющие область V:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{H} &= \sigma(z)\vec{E} + \vec{J}(M) + \vec{j}(M), \\ \mathrm{rot}\vec{E} &= i\omega\mu_0\vec{H}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $$\vec{J}(M) = \begin{cases} 0, & M \notin V \\ (\sigma_T(M) - \sigma_4)\vec{E}(\mathrm{M}), & \mathrm{M} \in \mathrm{V} \end{cases}$$

Полное поле $\vec{E}(M)$ в соответствии со свойствами тензора $\hat{G}_E(M,P)$ представляется в виде:

$$\vec{E}(M) = \int_V \hat{G}_E(M,P)\vec{J}(P) d\tau_P + \vec{E}^{норм}(M). \tag{6}$$

Последнее представление при $M \in V$ дает векторное интегральное уравнение относительно вектора $\vec{E}(M)$:

$$\vec{E}(M) - \int_V \left(\sigma_T(P) - \sigma_4\right)\hat{G}_E(M,P)\vec{E}(P) d\tau_P = \vec{E}^{норм}(M) \quad M \in V \tag{7}$$

Соотношение (7) дает необходимое интегральное уравнение, которое может быть решено численными методами.

Определив из интегрального уравнения (7) электрическое поле $\vec{E}(M)$ при $M \in V$, согласно (6), можно вычислить электрическое поле $\vec{E}(M)$ в любой точке. Кроме того, зная тензор Грина магнитного типа $\hat{G}_H(M,P)$, можно вычислить магнитное поле

$$\vec{H}(M) = \int_V \left(\sigma_T(P) - \sigma_4\right)\hat{G}_H(M,P)\vec{E}(P) d\tau_P + \vec{H}^{норм}(M) \quad M \in V \tag{8}$$

Таким образом, математическое моделирование электромагнитного поля сводится к решению интегрального уравнения, в котором необходимо знать $\vec{E}^{норм}$. Если источник известен, то всегда можно рассчитать поле источника в слоистой среде и определить $\vec{E}^{норм}(M)$ и $\vec{H}^{норм}(M)$. Это так называемое электромагнитное зондирование с контролируемым источником.

Однако можно проводить зондирование с неизвестным удаленным источником. К такому виду зондирования относятся магнитотеллурическое и магнитовариационное зондирования. Если источники удалены достаточно далеко, то можно считать, что их поле в окрестности неоднородности не зависит от координат вдоль земной поверхности. Это означает, что такое поле можно приблизить полем двух ортогональных плоских волн с нормальным падением на земную поверхность:

$$\begin{aligned}
&1.\ \vec{E}=\left(0, H_x^0 e_y^0(z), 0\right);\ \vec{H}=\left(H_x^0 h_x^0(z), 0, 0\right), \\
&2.\ \vec{E}=\left(H_y^0 e_x^0(z), 0, 0\right);\ \vec{H}=\left(0, H_y^0 h_y^0(z), 0\right).
\end{aligned} \qquad (9)$$

Постоянные H_x^0 и H_y^0 определяются мощностью источников поля. Функции $e_x^0(z)$, $e_y^0(z)$, $h_x^0(z)$, $h_y^0(z)$ легко рассчитываются для слоистой среды.

Если мы рассчитаем поле в неоднородной среде и определим поля

$$\begin{aligned}
&1.\ \vec{E}^{(1)}(M),\ \vec{H}^{(1)}(M) \quad \text{при} \quad H_y^0=0;\ H_x^0=1, \\
&2.\ \vec{E}^{(2)}(M),\ \vec{H}^{(2)}(M) \quad \text{при} \quad H_x^0=0;\ H_y^0=1,
\end{aligned} \qquad (10)$$

тогда измеряемые поля можно записать в виде:

$$\vec{E}(M)=H_x^0\vec{E}^{(1)}(M)+H_y^0\vec{E}^{(2)}(M)\ ; \qquad (11)$$

$$\vec{H}(M)=H_x^0\vec{H}^{(1)}(M)+H_y^0\vec{H}^{(2)}(M). \qquad (12)$$

Из первых двух уравнений системы (12) легко определить:

$$H_x^0=\frac{H_x H_y^{(2)}-H_y H_x^{(2)}}{\Delta};\ H_y^0=\frac{-H_x H_y^{(1)}+H_y H_x^{(1)}}{\Delta}\ ; \qquad (13)$$

где $\Delta=H_x^{(1)}H_y^{(2)}-H_y^{(1)}H_x^{(2)}$.

Подставив (13) в (11) и в последнее уравнение системы (12), получим:

$$E_x=Z_{xx}H_x+Z_{xy}H_y;\quad E_y=Z_{yx}H_x+Z_{yy}H_y; \qquad (14)$$

$$H_z=W_{xx}H_x+W_{zy}H_y, \qquad (15)$$

где тензор импеданса $\hat{Z}$ и вектор типпера $\vec{W}$ зависят только от свойств среды. Измеряя поля, мы можем определить $\hat{Z}$ и $\vec{W}$, а по импедансу и типперу можно решать обратную задачу. Это стандартный подход.

Однако, как показано [8], если мы находимся не очень далеко от источников поля, то в нормальном поле кроме плоских волн (9) появляется поле, имеющее вертикальную составляющую магнитного поля:

$$\begin{aligned}
&\vec{E}=\left(H_z^0 u(z)y;\ H_z^0 u(z)x; 0\right); \\
&\vec{H}=\left(H_z^0 v(z)x;\ H_z^0 v(z)y; H_z^0 w(z)\right).
\end{aligned} \qquad (16)$$

Функции $u(z), v(z)$ и $w(z)$ легко вычисляются для слоистой среды, а константа H_z^0 определяется источником поля. Теперь при расчете поля в неоднородной среде у нас появится поле $\vec{E}^{(3)}(M)$ и $\vec{H}^{(3)}(M)$, рассчитанное для нормального поля (16) при $H_z^0 = 1$. Таким образом, измеряемые поля вместо (11-12) будут определяться соотношениями:

$$\vec{E} = \hat{E} \cdot \vec{H}^0; \quad \vec{H} = \hat{H} \cdot H^0; \tag{17}$$

где

$$\hat{E} = \left(\vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}, \vec{E}^{(3)}\right); \hat{H} = \left(\vec{H}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}, \vec{H}^{(3)}\right); \vec{H}^0 = \left(H_x^0, H_y^0, H_z^0\right).$$

Из (17) легко получаем

$$\vec{H}^0 = \hat{H}^{-1} \cdot \vec{H}; \quad \vec{E} = \hat{Z}^0 \cdot \vec{H}; \quad \hat{Z}^0 = \hat{E} \cdot \hat{H}^{-1}. \tag{18}$$

Таким образом, мы получим обобщенный тензор импеданса $\hat{Z}^0$, который зависит только от свойств среды и не зависит от источника поля. Однако при морских исследованиях обычно измеряют только магнитное поле, а в случае $H_z^0 \neq 0$ обычный типпер (15) не определяется. Для того чтобы воспользоваться измерениями магнитного поля, необходимо знать связь между H_x^0, H_y^0, H_z^0. Из асимптотик поля магнитного диполя можно определить такую связь в первичном поле $f(\vec{H}^0) = 0$. Тогда подставив в это условие $\vec{H}^0 = \hat{H}^{-1}\vec{H}$, получим магнитное соотношение

$$f\left(\hat{H}^{-1}\vec{H}\right) = 0. \tag{19}$$

Это аналог соотношения (15), но нелинейный. Измеряя $\vec{H}$, можно найти $\vec{H}^{-1}$, зависящее только от свойств среды, которое и используется в обратной задаче.

Литература

1. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Магнитотеллурическое зондирование горизонтальных однородных сред. "Недра" Москва 1991,250 с.
2. Захаров Е.В., Ильин И.В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. Известия АН СССР "Физика Земли", №8, с. 62-71, 1970.
3. Захаров Е.В., Ильин И.В. Метод расчета электромагнитных полей в плоско-параллельной слоистой среде с локальными неоднородностями. Изд-во МГУ Сб. "Вычислительные методы и программирование" вып. XVI, с.83-107, 1971.
4. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. Изд-во МГУ 1987.
5. Дмитриев В.И., Позднякова Е.Е.Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. "Актуальные вопросы прикладной математики" Сб.трудов факультета ВМК МГУ, 1989, с.98-104.
6. Дмитриев В.И., Позднякова Е.Е. Метод и алгоритм расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью в произвольном слое. В кн. "Методы математического моделирования и вычисл. диагностики", Изд-во Моск. ун-та,1990, с.133-142.
7. Дмитриев В.И., Силкин А.Н., Фарзан Р. Тензорная функция Грина для системы уравнений Максвелла в слоистой среде. /Сборник работ "Прикладная математика и информатика", изд-во "МАКС Пресс", Москва, 2001, №7, с.5-18.
8. Дмитриев В.И., Бердичевский М.Н. Обобщенная модель импеданса. Изв. РАН "Физика Земли" №10, 2002, с.106-112.