*В.И. Дмитриев, П.С. Белкин, Н.А. Мерщикова*

# МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОДЕЛИРОВАНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ*

## Введение

В прикладной электродинамике часто необходимо проводить математическое моделирование электромагнитных полей в неоднородных проводящих средах. Такие задачи лежат в основе теории электроразведки, электрокаротажа и электромагнитных методов исследования строения Земли. Численные исследования описанных задач эффективно проводятся с помощью метода интегальных уравнений [1-4]. В этом случае рассматривается задача расчета электромагнитного поля на земной поверхности $(z=0)$ в слоистой среде с распределением электропроводности $\sigma_c(z), z>0$, в которой расположена локальная неоднородность V с произвольной электропроводностью $\sigma(x,y,z)$. В работах [1-3] и [6] рассмотрены трехмерные задачи. В настоящей статье мы проведем переход от трехмерных задач к двумерным и исследуем особенности получаемых задач при применении к их решению метода интегральных уравнений.

## 1. Постановка задачи

Если представить электрическое $\overline{E}(M)$ и магнитное $\overline{H}(M)$ поля в виде суммы нормального и аномального полей:

$$\overline{E}(M)=\overline{E}^N(M)+\overline{E}^a(M);\ \overline{H}(M)=\overline{H}^N(M)+\overline{H}^a(M), \tag{1}$$

где $\overline{E}^N$ и $\overline{H}^N$ — нормальные поля в слоистой среде, а $\overline{E}^a$ и $\overline{H}^a$ — аномальные поля, возникающие из-за наличия неоднородности. Эти поля являются решением уравнений Максвелла:

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\overline{H}^a=\sigma_c(z)\overline{E}^a+\left(\sigma(M)-\sigma_c(z)\right)\overline{E}^N,\\ \mathrm{rot}\overline{E}^a=i\omega\mu\overline{H}^a,\end{cases} \tag{2}$$

где $\mu$ — магнитная проницаемость, а $\omega$ — частота поля. Нормальное по-

---

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 02-01-00300 и проект 03-05-64167) и Научной программы "Университеты России" (проект 03.03.032/04).

ле $\overline{E}^N$ считается известным. Как показано в [1] задача (2) легко редуцируется к интегральному уравнению с помощью тензорных функций Грина $\hat{G}_E(M,M_0)$ электрического типа и $\hat{G}_H(M,M_0)$ магнитного типа в виде:

$$\overline{E}(M)=\overline{E}^N(M)+\int\limits_V \hat{G}_E(M,M_0)\bar{j}(M_0)dv_{M_0}, \tag{3}$$

$$\overline{H}(M)=\overline{H}^N(M)+\int\limits_V \hat{G}_H(M,M_0)\bar{j}(M_0)dv_{M_0}, \tag{4}$$

где $\bar{j}(M_0)$ — избыточный ток в области неоднородности

$$\bar{j}(M\ )=(\sigma(M)-\sigma_c(M))\overline{E}(M) \tag{5}$$

является решением интегрального уравнения

$$\bar{j}(M)-(\sigma(M)-\sigma_c(z))\int\limits_V \hat{G}_E(M,M_0)\bar{j}(M_0)dv_{M_0}=(\sigma(M)-\sigma_c(z))\overline{E}^N_{(M)}. \tag{6}$$

Тензорные функции Грина $\hat{G}_E$ и $\hat{G}_H$ являются решением задачи

$$\mathrm{rot}\hat{G}_H=\sigma_c(z)\hat{G}_E+\hat{\delta};\mathrm{rot}\hat{G}_E=i\omega\mu\hat{G}_H, \tag{7}$$

где $\hat{\delta}$ — тензорная функция Дирака, равная

$$\hat{\delta}=\begin{pmatrix}\delta(r_{MM_0}) & 0 & 0\\ 0 & \delta(r_{MM_0}) & 0\\ 0 & 0 & \delta(r_{MM_0})\end{pmatrix}, \tag{8}$$

а $\delta(r_{MM_0})=\begin{cases}\infty & M=M_0\\ 0 & M\neq M_0\end{cases}$ — трехмерная функция Дирака.

В работах [4-5] показано, что тензорные функции Грина электрического и магнитного типа выражаются через единую тензорную функцию $\hat{G}(M,M_0)$ в виде:

$$\hat{G}_E=\hat{G}(M,M_0)+\mathrm{grad}\left(\frac{1}{i\omega\mu_0\sigma_c(z)}\mathrm{div}\hat{G}\right), \tag{9}$$

$$\hat{G}_H=\frac{1}{i\omega\mu_0}\mathrm{rot}\hat{G}(M,M_0), \tag{10}$$

где $\hat{G}(M,M_0)$ имеет специальный вид

$$\hat{G}(M,M_0)=\begin{pmatrix} G_1(M,M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(M,M_0) & 0 \\ \dfrac{\partial g(M,M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(M,M_0)}{\partial y} & G_2(M,M_0) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Причем функции $G_1$ и $G_2$ и $g$ являются решениями уравнений

$$\Delta G_1 + k^2 G_1 = -i\omega\mu_0\delta(r_{M,M_0}),\ k^2 = i\omega\mu_0\sigma_c(z),$$

$$\sigma_c(z)\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma_c(z)}\operatorname{grad}G_2\right)+k^2G_2 = -i\omega\mu_0\delta(r_{M,M_0}), \tag{12}$$

$$\sigma_c(z)\operatorname{div}\left(\frac{1}{\sigma_c(z)}\operatorname{grad}g\right)+k^2g = -\sigma_c(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sigma_c(z)}\right)G_1$$

с условиями сопряжения на границах разрыва $\sigma_c(z)$, где непрерывны

$$G_1,\ G_2,\ g,\ \frac{\partial G_1}{\partial z},\ \frac{1}{\sigma_c}\frac{\partial G_2}{\partial z}\ \text{ и }\ \frac{1}{\sigma_c}\left(\frac{\partial g}{\partial z}+G_1\right). \tag{13}$$

Как показано в [4-5], функции $G_1$, $G_2$ и $g$ можно представить в виде преобразования Бесселя

$$I_0(f)=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)f(z,\lambda)\lambda d\lambda,\ \rho=\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2} \tag{14}$$

от фундаментальной функции $U_\gamma^a(z,\lambda)$, которая в случае кусочно-постоянной слоистой среды является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U_\gamma^a}{dz^2}-\eta^2(z)U_\gamma^a=0,\ z\in(-\infty,z^0)\cup(z^0,\infty),\ \eta^2=\lambda^2-k^2(z), \\ \left[U_\gamma^a\right]_{z_{m-1}}=0;\left[\dfrac{1}{\gamma(z)}\dfrac{dU_\gamma^a}{dz}\right]_{z_{m-1}}=0,\ m\in[1,N],\ z_{m-1}\neq z^0, \\ \left[U_\gamma^a\right]_{z^0}=-2a;\left[\dfrac{dU_\gamma^a}{dz}\right]=-2(1-a), \\ U_\gamma^a\to 0\ \text{ при } |z|\to\infty,\ \operatorname{Re}\eta>0. \end{cases} \tag{15}$$

Искомые функции $G_1$, $G_2$ и $g$ в этом случае имеют вид:

$$G_1=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}I_0(U_1^0),\ G_2=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}I_0(U_\sigma^0),$$
$$g=\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(U_\sigma^1-\frac{dU_1^0}{dz}\right)\right). \tag{16}$$

## 2. Переход к двумерной задаче

Если неоднородность $V$ имеет бесконечное простирание по оси $Ox$, причем электропроводность в неоднородности не зависит от координаты $x$, то мы приходим к двумерной среде. Если нормальное поле также не зависит от $x$, то имеем двумерное электромагнитное поле. Для того, чтобы перейти от описанной выше задаче к двумерному случаю достаточно проинтегрировать имеющиеся формулы по $x$ от $-\infty$ до $\infty$. Тогда формулы (3-4) преобразуются к виду

$$\overline{E}(y,z)=\overline{E}^N(y,z)+\int\limits_S \hat{G}_E^{(2)}(y-y^0,z,z^0)\bar{j}(y^0,z^0)dy^0dz^0, \tag{17}$$

$$\overline{H}(y,z)=\overline{H}^N(y,z)+\int\limits_S \hat{G}_H^{(2)}(y-y^0,z,z^0)\bar{j}(y^0,z^0)dy^0dz^0, \tag{18}$$

где двумерные функции Грина вычисляются через трехмерную:

$$\hat{G}_E^{(2)}(y-y^0,z,z^0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_E(x,y-y^0,z,z^0)dx, \tag{19}$$

$$\hat{G}_H^{(2)}(y-y^0,z,z^0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{G}_H(x,y-y^0,z,z^0)dx. \tag{20}$$

Учитывая формулы (9-11), получаем после интегрирования двумерные тензорные функции Грина в виде:

$$\hat{G}_E^2=\begin{pmatrix} G_{xx} & 0 & 0\\ 0 & G_{yy} & G_{yz}\\ 0 & G_{zy} & G_{zz}\end{pmatrix};\quad \hat{G}_H^2=\begin{pmatrix} 0 & Q_{xy} & Q_{xz}\\ Q_{yx} & 0 & 0\\ Q_{zx} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

где

$$G_{xx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_1(x,y-y_0,z,z_0)dx;\quad G_{yy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[G_1+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right)\right]dx;$$

$$G_{zy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right)\right)dx;\quad G_{yz}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial G_2}{\partial y}\right)\right)dx; \tag{22}$$

$$G_{zz}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(G_2+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial G_2}{\partial z}\right)\right)dx;\quad Q_{yx}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G_1}{\partial z}dx;$$

$$Q_{zx}=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G_1}{\partial y}dx;\ Q_{xy}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-\frac{\partial G_1}{\partial z}\right)dx;\ Q_{xz}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G_2}{\partial y}dx.$$

Интегральное уравнение (6), естественно, примет вид:

$$\bar{j}(y,z)-(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))\int_S \hat{G}_E^{(2)}\bar{j}(y^0,z^0)dx^0dy^0=(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))\bar{E}^N(y,z). \quad (23)$$

Легко видеть, что полученная векторная задача для двумерных электромагнитных полей разбивается на две независимых задачи, которые следуют из (17-23).

*E-поляризованное поле*

$$E_x(y,z)=E_x^N(y,z)+\int_S G_{xx}(y-y^0,z,z^0)j_x(y^0,z^0)dy^0dz^0,$$

$$H_y(y,z)=H_y^N(y,z)+\int_S Q_{yx}(y-y^0,z,z^0)j_x(y^0,z^0)dy^0dz^0, \quad (24)$$

$$H_z(y,z)=H_z^N(y,z)+\int_S Q_{zx}(y-y^0,z,z^0)j_x(y^0,z^0)dy^0dz^0.$$

Интегральное уравнение

$$j_x(y,z)-(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))\int_S G_{xx}(y-y^0,z,z^0)j_x(y^0,z^0)dy^0dz^0=$$

$$=(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))E_x^N(y,z). \quad (25)$$

*H-поляризованное поле*

$$E_y(y,z)=E_y^N(y,z)+$$

$$+\int_S \left(G_{yy}(y-y^0,z,z^0)j_y(y^0,z^0)+G_{yz}(y-y^0,z,z^0)j_z(y^0,z^0)\right)dy^0dz^0 \quad (26)$$

Система интегральных уравнений

$$j_y(y,z)-(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))\int_S \left(G_{yy}j_y+G_{yz}j_z\right)dx^0dy^0=(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))E_y^N \quad (27)$$

$$j_z(y,z)-(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))\int_S \left(G_{zy}j_y+G_{zz}j_z\right)dx^0dy^0=(\sigma(y,z)-\sigma_c(z))E_z^N \quad (28)$$

Мы рассмотрим подробно решение в случае H-поляризации.

## 3. Двумерная функция Грина

Алгоритм вычисления тензорной функции Грина для уравнений Максвелла в трехмерном случае подробно описан в [5]. В этой работе компоненты тензорной функции Грина определяются с помощью преобразования Бесселя

$$I_0(f)=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)f(\lambda)\lambda d\lambda,\quad \rho=\sqrt{(x-x^0)^2-(y-y^0)^2}, \quad (29)$$

где $J_0(\lambda\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Заметим, что преобразование Бесселя связано с двумерным преобразованием Фурье

$$\int_0^\infty J_0(\rho\eta)f(\eta)\eta d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\lambda x+\nu y)}f(\eta)d\lambda d\nu, \tag{30}$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\eta=\sqrt{\lambda^2+\nu^2}$. Если проинтегрировать выражение (30) по $x$, то получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^\infty J_0\left(\eta\sqrt{x^2+y^2}\right)f(\eta)\eta d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\nu x+\lambda y)}f\left(\sqrt{\lambda^2+\nu^2}\right)d\lambda d\nu.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\nu x}dx = 2\pi\delta(\nu)$, то получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^\infty J_0\left(\eta\sqrt{x^2+y^2}\right)f(\eta)\eta d\eta = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda y}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\sqrt{\lambda^2+\nu^2})\delta(\nu)d\nu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda y}f(|\lambda|)d\lambda = 2\int_0^\infty \cos\lambda y\cdot f(\lambda)d\lambda.$$

Таким образом, мы нашли, что интеграл от преобразования Бесселя равен удвоенному косинус-преобразованию Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty}I_0(f)dx = 2F_c(f) = 2\int_0^\infty \cos\lambda\left(y-y^0\right)\cdot f(\lambda)d\lambda. \tag{31}$$

Тогда при переходе к двумерной задаче мы должны в (16) заменить в выражениях для компонент тензора Грина преобразование Бесселя на удвоенное косинус-преобразованию Фурье. Получим, согласно (16) и (22), компоненты тензора Грина

$$G_{yy}\left(y-y_0,z,z_0\right)=\frac{i\omega\mu_0}{2\pi}F_c\left(U_1^0\right)+\frac{1}{2\pi\sigma_c}\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_c\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(k^2U_1^0+\frac{dU_\sigma^1}{dz}\right)\right)=-\frac{1}{2\pi\sigma_c}F_c\left(\frac{dU_\sigma^1}{dz}\right)$$

$$G_{yz}\left(y-y_0,z,z_0\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_c(z)}\frac{\partial}{\partial y}F_c\left(\frac{dU_\sigma^0}{dz}\right);\ G_{zy}=\frac{1}{2\pi\sigma_c}\frac{\partial}{\partial y}F_c\left(U_\sigma^1\right); \tag{32}$$

$$G_{zz}=\frac{1}{2\pi\sigma_c}F_c\left(\lambda^2U_\sigma^0\right)$$

Функции $U_\sigma^0(z)$ и $U_\sigma^1(z)$ определяются из задачи

$$\sigma\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sigma(z)}\frac{dU_\sigma^a}{dz}\right)-\left(\lambda^2-k^2(z)\right)U_\sigma^a=0,\ z\in\left(-\infty,z^0\right)\cup\left(z^0,\infty\right). \tag{33}$$

На разрыве электропроводности $\sigma_c(z)$ условия

$$\left[U_\sigma^a\right]_z = 0 \text{ и } \left[\frac{1}{\sigma(z)}\frac{dU_\sigma^a}{dz}\right]_z = 0,$$

а при $z = z^0$ имеем условия

$$\left[U_\sigma^a\right]_{z^0} = -2a, \left[\frac{dU_\sigma^a}{dz}\right]_{z^0} = -2(1-a), \; a = 0 \text{ или } a = 1,$$

$$U_\sigma^a \to 0 \text{ при } |z| \to \infty \text{ и } \operatorname{Re}\sqrt{\lambda^2 - k^2(z)} > 0.$$

## 4. Алгоритм расчета функции Грина

Рассмотрим слоистую среду с кусочно-постоянным распределением электропроводности:

$$\sigma(z) = \sigma_i \text{ при } z_{i-1} < z < z_i, i \in [1, n], z_0 = 0, z_n = \infty$$

Нам необходимо построить алгоритм расчета функции Грина $U_\sigma^a(z, z^0)$ при $0 \le z, z^0 \le z_{n-1}$, которая является решением задачи (33). Для этого введем импедансные функции

$$Z(z) = \sigma(z) U_\sigma^a(z) \Big/ \frac{dU_\sigma^a(z)}{dz} \quad \text{при } 0 \le z \le z^0 \tag{34}$$

и

$$Y(z) = \sigma(z) U_\sigma^a(z) \Big/ \frac{dU_\sigma^a(z)}{dz} \quad \text{при } z^0 \le z \le z_{n-1}. \tag{35}$$

Импедансные функции являются решениями задачи Коши для уравнения Риккати:

$$\begin{cases} Z'(z) + \dfrac{\lambda^2 - k^2}{\sigma(z)} Z^2(z) = \sigma(z) \quad \text{при} \quad 0 \le z \le z^0, \\ Z(z = 0) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

$$\begin{cases} Y'(z) + \dfrac{\lambda^2 - k^2}{\sigma(z)} Y^2(z) = \sigma(z) \quad \text{при} \quad z^0 \le z \le z_{n-1}, \\ Y(z = z_{n-1}) = -\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{\lambda^2 - k_n^2}}. \end{cases} \tag{37}$$

Так как $z^0$ может быть любым, то вначале решаются задачи (36) и (37) и определяются

$$Z(z = z_i) = Z_i; \; Y(z = z_i) = Y_i; i \in [0, n-1].$$

Расчеты проводятся по реккурентным формулам:

$$Z_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}} \frac{\left(\sigma_i + \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Z_{i-1}\right) - \left(\sigma_i - \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Z_{i-1}\right) e^{-2\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}(z_i - z_{i-1})}}{\left(\sigma_i + \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Z_{i-1}\right) + \left(\sigma_i - \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Z_{i-1}\right) e^{-2\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}(z_i - z_{i-1})}} \quad (38)$$

$i \in [1, n-1]$, $Z_0 = 0$.

$$Y_{i-1} = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}} \frac{\left(\sigma_i - \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Y_i\right) - \left(\sigma_i + \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Y_i\right) e^{-2\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}(z_i - z_{i-1})}}{\left(\sigma_i - \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Y_i\right) + \left(\sigma_i + \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} Y_i\right) e^{-2\sqrt{\lambda^2 - k_i^2}(z_i - z_{i-1})}} \quad (39)$$

$i \in [n-1, 1]$, $Y_{n-1} = -\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{\lambda^2 - k_n^2}}$.

Зная $Z_i$ и $Y_i$ при $i \in [0, n-1]$, можно вычислить импедансные функции в произвольной точке $z^0 \in [z_{i-1}, z_i]$ по формулам:

$$Z(z^0) = A(Z_{i-1}) = \frac{\sigma_i}{\eta_i} \frac{(\sigma_i + \eta_i Z_{i-1}) - (\sigma_i - \eta_i Z_{i-1}) e^{-2\eta_i (z^0 - z_{i-1})}}{(\sigma_i + \eta_i Z_{i-1}) + (\sigma_i - \eta_i Z_{i-1}) e^{-2\eta_i (z^0 - z_{i-1})}}, \quad (40)$$

где $\eta_i = \sqrt{\lambda^2 - k_i^2}$. Аналогично

$$Y(z^0) = B(Y_i) = -\frac{\sigma_i}{\eta_i} \frac{(\sigma_i - \eta_i Y_i) - (\sigma_i + \eta_i Y_i) e^{-2\eta_i (z_i - z^0)}}{(\sigma_i - \eta_i Y_i) + (\sigma_i + \eta_i Y_i) e^{-2\eta_i (z_i - z^0)}} \quad (41)$$

Теперь мы можем определить $U_\sigma^a(z^0)$ и $\dfrac{dU_\sigma^a(z^0)}{dz}$, используя формулы сопряжения при $z = z^0$.

Рассмотрим вначале случай $a = 0$. Тогда

$$U_\sigma^0(z^0 + 0) = U_\sigma^0(z^0 - 0); \frac{dU_\sigma^0(z^0 - 0)}{dz} = \frac{dU_\sigma^0(z^0 + 0)}{dz} + 2.$$

Используя (34-35), найдем

$$\frac{\sigma(z^0) U_\sigma^0(z^0)}{Z(z^0)} = \frac{\sigma(z^0) U_\sigma^0(z^0)}{Y(z^0)} + 2.$$

Откуда получаем:

$$U_\sigma^0(z^0) = \frac{2Z(z^0) Y(z^0)}{\sigma(z^0)\left(Y(z^0) - Z(z^0)\right)}, \quad (42)$$

а учитывая (34-35), находим

$$\frac{dU_\sigma^0(z^0 - 0)}{dz} = \frac{2Y(z^0)}{Y(z^0) - Z(z^0)}; \quad \frac{dU_\sigma^0(z^0 + 0)}{dz} = \frac{2Z(z^0)}{Y(z^0) - Z(z^0)}. \quad (43)$$

Аналогично определяются $U_\sigma^1$ и $\dfrac{dU_\sigma^1}{dz}$. При $a = 1$ имеем условия сопряжения

$$U_\sigma^1(z^0+0)=U_\sigma^1(z^0-0)-2\ ;\ \frac{dU_\sigma^1(z^0+0)}{dz}=\frac{dU_\sigma^1(z^0-0)}{dz}.$$

Используя (34-35), находим

$$U_\sigma^1(z^0-0)=\frac{2Z(z^0)}{Z(z^0)-Y(z^0)}\ ;\ U_\sigma^1(z_0+0)=\frac{2Y(z_0)}{Z(z_0)-Y(z_0)}, \tag{44}$$

$$\frac{dU_\sigma^1(z_0-0)}{dz}=\frac{dU_\sigma^1(z^0+0)}{dz}=\frac{2\sigma(z^0)}{Z(z^0)-Y(z^0)}\ . \tag{45}$$

Зная $U_\sigma^a(z^0)$ и $\frac{dU_\sigma^a(z^0)}{dz}$, мы можем определить $U_\sigma^a(z)$ для любой точки $z$ из задачи (33). Как видно из выражений (32), для определения функций Грина нам необходимо знать $U_\sigma^0(z)$, $U_\sigma^1(z)$, $\frac{dU_\sigma^0(z)}{dz}$ и $\frac{dU_\sigma^1(z)}{dz}$.

Представим решение задачи (33) при $z_{i-1}<z<z^0$ в виде:

$$U_\sigma^a(z)=C_1e^{\eta_i(z-z^0)}+C_2e^{-\eta_i(z-z^0)} \tag{46}$$

При $z=z^0$ имеем

$$U_\sigma^a(z^0-0)=C_1+C_2\ ;\ \frac{dU_\sigma^a}{dz}\Big|_{z=z^0}=\frac{\sigma_i}{Z(z^0)}U_\sigma^a(z^0-0)=\eta_i(C_1-C_2).$$

Откуда находим

$$C_1=\left(\eta_iZ(z^0)+\sigma_i\right)\cdot\frac{U_\sigma^a(z^0-0)}{2\eta_iZ(z^0)};C_2=\left(\eta_iZ(z^0)-\sigma_i\right)\cdot\frac{U_\sigma^a(z^0-0)}{2\eta_iZ(z^0}\ . \tag{47}$$

Подставив (40) в (47), получим

$$C_1=U_\sigma^a(z^0-0)\frac{\sigma_i+\eta_iZ_{i-1}}{(\sigma_i+\eta_iZ_{i-1})-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-2\eta_i(z^0-z_{i-1})}};$$

$$C_2=U_\sigma^a(z^0-0)\frac{-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-2\eta_i(z^0-z_{i-1})}}{(\sigma_i+\eta_iZ_{i-1})-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-2\eta_i(z^0-z_{i-1})}}.$$

Подставив найденные $C_1$ и $C_2$ в выражение (46), получим окончательно при $z_{i-1}<z<z^0$:

$$U_\sigma^a(z)=U_\sigma^a(z^0-0)\frac{(\sigma_i+\eta_iZ_{i-1})e^{\eta_i(z-z^0)}-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-\eta_i(z+z^0-2z_{i-1})}}{(\sigma_i+\eta_iZ_{i-1})-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-2\eta_i(z^0-z_{i-1})}}; \tag{48}$$

$$\frac{dU_\sigma^a(z)}{dz}=\eta_iU_\sigma^a(z^0-0)\frac{(\sigma_i+\eta_iZ_{i-1})e^{\eta_i(z-z^0)}-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-\eta_i(z+z^0-2z_{i-1})}}{(\sigma_i+\eta_iZ_{i-1})-(\sigma_i-\eta_iZ_{i-1})e^{-2\eta_i(z^0-z_{i-1})}}. \tag{49}$$

Аналогично при $z^0 < z < z_i$ получаем

$$U_\sigma^a(z) = U_\sigma^a(z^0+0)\frac{(\sigma_i - \eta_i Y_i)e^{\eta_i(z-z^0)} - (\sigma_i + \eta_i Y_i)e^{\eta_i(z+z^0-2z_i)}}{(\sigma_i - \eta_i Y_i) - (\sigma_i + \eta_i Y_i)e^{-2\eta_i(z_i - z^0)}}; \quad (50)$$

$$\frac{dU_\sigma^a(z)}{dz} = -\eta_i U_\sigma^a(z^0+0)\frac{(\sigma_i - \eta_i Y_i)e^{-\eta_i(z-z^0)} + (\sigma_i + \eta_i Y_i)e^{\eta_i(z+z^0-2z_i)}}{(\sigma_i - \eta_i Y_i) - (\sigma_i + \eta_i Y_i)e^{-2\eta_i(z_i - z^0)}}. \quad (51)$$

Зная, согласно (42) и (44), величины $U_\sigma^0(z^0)$ и $U_\sigma^1(z^0 \pm 0)$, мы можем по формулам (48-51) рассчитать $U_\sigma^a(z)$ и $\frac{dU_\sigma^a(z)}{dz}$ при $z \in [z_{i-1}, z_i]$ и $z^0 \in [z_{i-1}, z_i]$. Если при $z^0 \in [z_{i-1}, z_i]$ необходимо рассчитать функцию Грина в других слоях, то для $U_\sigma^a(z)$ и $\frac{dU_\sigma^a(z)}{dz}$ можно получить выражения аналогичные (48-51). Например,

при $z^0 \in [z_{i-1}, z_i]$, $z \in [z_{i-2}, z_{i-1}]$

$$U_\sigma^a(z) = U_\sigma^a(z_{i-1})\frac{(\sigma_{i-1} + \eta_{i-1} Z_{i-2})e^{-\eta_i(z_{i-1}-z)} - (\sigma_{i-1} - \eta_{i-1} Z_{i-2})e^{-\eta_{i-1}(z - z_{i-2} + h_{i-1})}}{(\sigma_{i-1} + \eta_{i-1} Z_{i-2}) - (\sigma_{i-1} - \eta_{i-1} Z_{i-2})e^{-2\eta_{i-1}h_{i-1}}}, \quad (52)$$

при $z^0 \in [z_{i-1}, z_i]$, $z \in [z_i, z_{i+1}]$

$$U_\sigma^a(z) = U_\sigma^a(z_i)\frac{(\sigma_{i+1} - \eta_{i+1} Y_{i+1})e^{-\eta_{i+1}(z-z_i)} - (\sigma_{i+1} + \eta_{i+1} Y_{i+1})e^{-\eta_{i+1}(z_{i+1} - z + h_{i+1})}}{(\sigma_{i+1} - \eta_{i+1} Y_{i+1}) - (\sigma_{i+1} + \eta_{i+1} Y_{i+1})e^{-2\eta_{i+1}h_{i+1}}}, \quad (53)$$

где $h_m = z_m - z_{m-1}$, а $U_\sigma^a(z_{i-1})$ и $U_\sigma^a(z_i)$ рассчитываются по формулам (48) и (50). Таким образом, $U_\sigma^a$ и $\frac{dU_\sigma^a}{dz}$ рассчитываются при любом $z \ge 0$ и $z^0 \ge 0$, а, следовательно, по (32) можно найти все компоненты тензора Грина.

## 5. Решение интегрального уравнения

Система интегральных уравнений (27-28) решается блочным методом, при котором вся область неоднородности разбивается на блоки, где считается постоянным избыточный ток $j_y$ и $j_z$. Область неоднородности выбирается всегда в виде прямоугольника $y \in [0, l], z \in [h, h+H]$, где $l$ — длина неоднородности, $h$ — глубина залегания неоднородности, а $H$ — ее толщина. Это не ограничивает общность модели, так как там, где нет неоднородности электропроводности внутри прямоугольника, достаточно положить $\sigma=\sigma_c$, и получим неоднородность, ограниченную произвольным контуром, приближенным прямоугольной сеткой.

Выбранный прямоугольник разбивается, как правило, на одинаковые прямоугольные подобласти:

$$S_{mn}:\{y_{m-1}<y<y_m, z^{(n-1)}<z<z^n,\ m\in[1,M], n\in[1,N]\}, \qquad (54)$$

где $y_0=0, y_M=l, z^0=h, z^N=h+H$. Средняя точка подобласти $S_{mn}$ равна $M_{mn}=\left\{\frac{l}{M}\left(m-\frac{1}{2}\right),\ h+\frac{H}{h}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Считаем, что избыточный ток в подобласти $S_{mn}$ приближенно равен значению в средней точке:

$$j_y(M)\approx j_y(M_{mn})=j_y^{(mn)};\ j_z(M)\approx j_z(M_{mn})=j_z^{(mn)} \text{ при } M\in S_{mn}. \qquad (55)$$

Кроме того выбираем разбиение подобласти так, чтобы внутри подобласти аномальная электропроводность была постоянной:

$$\sigma(y,z)-\sigma_c(z)=\delta\sigma_{pq} \text{ при } M(y,z)\in S_{pq}. \qquad (56)$$

Тогда система интегральных уравнений (27-28) может быть редуцирована к линейной системе алгебраических уравнений для $j_y^{(mn)}$ и $j_z^{(mn)}$:

$$\begin{cases} j_y^{(pq)}-\delta\sigma_{pq}\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(K_{mn}^{pq}\cdot j_y^{(mn)}+L_{mn}^{pq}\cdot j_z^{(mn)}\right)=F_{pq}, p\in[1,M], \\ j_z^{(pq)}-\delta\sigma_{pq}\sum\limits_{m=1}^{M}\sum\limits_{n=1}^{N}\left(P_{mn}^{pq}\cdot j_y^{(mn)}+Q_{mn}^{pq}\cdot j_z^{(mn)}\right)=\Phi_{pq}, q\in[1,N], \end{cases} \qquad (57)$$

где

$$K_{mn}^{pq}=\int\limits_{S_{mn}}G_{yy}(M_{pq},M_0)dS_{M_0};\ L_{mn}^{pq}=\int\limits_{S_{mn}}G_{yz}(M_{pq},M_0)dS_{M_0}; \qquad (58)$$

$$P_{mn}^{pq}=\int\limits_{S_{mn}}G_{zy}(M_{pq},M_0)dS_{M_0};\ Q_{mn}^{pq}=\int\limits_{S_{mn}}G_{zz}(M_{pq},M_0)dS_{M_0}; \qquad (59)$$

$$F_{pq}=\delta\sigma_{pq}E_y^N(M_{pq});\ \Phi_{pq}=\delta\sigma_{pq}E_z^N(M_{pq}). \qquad (60)$$

Как было показано выше, любая компонента тензорной функции Грина $G_{\alpha\beta}, \alpha,\beta\in(y,z)$ представима в виде:

$$G_{\alpha\beta}(M_{pq},M_0)=\int\limits_0^{\infty}\cos\lambda(y_p-y^0)\left(f_{\alpha\beta}(\lambda)e^{-\eta(z^0+z_q)}+\varphi_{\alpha\beta}(\lambda)e^{-\eta(z^0-z_q)}\right)d\lambda. \qquad (61)$$

Подставив (61) в (58-59) и проинтегрировав по $y^0$ и $z^0$, получим удобные представления для ядер системы алгебраических уравнений.

Разработанный алгоритм позволяет эффективно моделировать двумерные поля Н-поляризации с помощью решения системы интегральных уравнений. Особенно эффективен данный метод при решении обратных задач. Это связано с тем, что при расчете поля функция Грина рассчитывается один раз в прямоугольнике, которому принадлежат все возможные модели, рассматриваемые в обратной задаче.

## Литература


1. В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1987, с. 167.
2. В.И. Дмитриев, Е.Е. Позднякова. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. Известия РАН, Физика Земли, №11, 1993.
3. В.И. Дмитриев, Е.Е. Позднякова. Математическое моделирование низкочастотных электромагнитных полей в трехмерной неоднородной среде. В кн.: "Прямые и обратные задачи математической физики". Изд-во Моск. ун-та. 1990. Стр. 139-152.
4. В.И. Дмитриев. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1969, с. 131.
5. В.И. Дмитриев, А.Н. Силкин, Р. Фарзан. Тензорная функция Грина для системы уравнений Максвелла в слоистой среде// Прикладная математика и информатика, №7, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2001, с.5-18.
6. В.И.Дмитриев, А.С.Барашков, П.С.Белкин. Метод интегральных уравнений в обратных задачах электромагнитных зондирований. //Прикладная математика и информатика №12, М.:Изд-во факультета ВМК МГУ, 2002, с.5-11.