В.И. Дмитриев, А.С. Барашков, П.С. Белкин

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ*

Электромагнитные зондирования используются для определения неоднородностей электропроводности в проводящей среде. Электромагнитные поля в проводящей среде подчиняются уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\overline{H} = \sigma\overline{E} + \overline{j}_0;\ \operatorname{rot}\overline{E} = i\omega\mu\overline{H}, \tag{1}$$

где $\overline{H}$ и $\overline{E}$ – напряженности, соответственно, магнитного и электрического полей, $\overline{j}_0$ – сторонний ток, возбуждающий электромагнитное поле, ω – частота колебаний поля, μ – магнитная проницаемость, а $\sigma(M)$ – распределение электропроводности:

$$\sigma(M) = \sigma_c(z) + \sigma_a(M);\ \sigma_a(M) = 0 \text{ при } M \notin V, \tag{2}$$

где V – область неоднородности, $\sigma_c(z)$ – слоистая среда, $\sigma_a(M)$ – аномальная электропроводность.

Задача (1) является задачей для определения электромагнитного поля при заданных источниках.

Обычно используют другую постановку задачи при заданных нормальных полях. Под нормальным электромагнитным полем понимается поле $\overline{E}^N$ и $\overline{H}^N$, возбуждаемое током $\overline{j}_0$ в слоистой среде $\sigma_c(z)$, которое удовлетворяет уравнениям:

$$rot\,\overline{H}^N = \sigma_c(z)\overline{E}^N + \overline{j}_0;\ rot\,\overline{E}^N = i\omega\mu\overline{H}^N \tag{3}$$

Решение задачи (3) при условии убывания поля на бесконечности и непрерывности тангенциальных составляющих полей на границах $z = z_i$, $i \in [1,n]$ разрыва $\sigma_c(z)$ хорошо известно [1-2]. Зная нормальные поля, мы можем полное поле представить в виде:

$$\overline{E}(M) = \overline{E}^N + \overline{E}^a;\qquad \overline{H}(M) = \overline{H}^N + \overline{H}^a, \tag{4}$$

где $\overline{E}^a$, $\overline{H}^a$ – аномальное электромагнитное поле.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00300 и проект 00-05-64660).

Задача для аномального поля получается при подстановке (4) в (1) и учете (3). Тогда имеем

$$rot\,\overline{H}^a = \sigma(z)\overline{E}^a + \sigma_a\overline{E}^N; \quad rot\,\overline{E}^a = i\omega\mu\overline{H}^a \tag{5}$$

где тангенциальные составляющие полей на всех границах непрерывны, а сами поля убывают на бесконечности. Поставленная задача имеет единственное решение при $\sigma \neq 0$.

Обратная задача электромагнитных зондирований возникает, если по известной частотной зависимости электромагнитного поля в некоторой области V_0 необходимо определить распределение электропроводности $\sigma(M)$. В задачах электроразведки полезных ископаемых и глубинного строения Земли обычно электромагнитное поле измеряется на земной поверхности $(z = 0)$.

Прямая задача (5) решается либо разностным методом [3-4], либо методом интегральных уравнений [5-7]. При применении разностного метода соответствующая система линейных алгебраических уравнений для поля имеет порядок много больше, чем система, получаемая из метода интегральных уравнений, т.к. в последнем рассматривается только область неоднородности V. Однако, в методе интегральных уравнений в отличие от разностного метода матрица системы полностью заполнена, и расчеты элементов матрицы значительно сложнее. Поэтому при создании систем математического моделирования электромагнитных полей в проводящих неоднородных средах используются оба метода. Причем на основе разностного метода систем создано больше, т.к. они реализуются проще.

Однако при создании систем решения обратных задач электромагнитных зондирований метод интегральных уравнений существенно эффективнее. Это связано с тем, что при моделировании полей для большого числа близких моделей строения среды, что имеет место при решении обратных задач. Метод интегральных уравнений позволяет значительно сократить время расчета. При этом алгоритм решения прямой задачи должен быть специальным образом адаптирован к решению обратной задачи.

Рассмотрим вначале редукцию прямой задачи (5) к интегральным уравнениям. Для этого введем тензорные функции Грина электрического $\hat{G}_E(M,M_0)$ и магнитного $\hat{G}_H(M,M_0)$ типа для уравнений Максвелла в слоистой среде [8], которые являются решениями уравнений:

$$rot\,\hat{G}_H = \sigma_c(z)\hat{G}_E + \hat{\delta}; \quad rot\,\hat{G}_E = i\omega\mu\hat{G}_H, \tag{6}$$

где $\hat{\delta}$ – тензорная функция Дирака, равная

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta(r_{MM_0}) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(r_{MM_0}) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(r_{MM_0}) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

а $\delta(r_{MM_0}) = \begin{cases} \infty \text{ при } M = M_0 \\ 0 \text{ при } M \neq M_0 \end{cases}$ – трехмерная функция Дирака. Решений задачи (6) в слоистой среде хорошо известно [2]. Задачу (5) можно записать в виде:

$$rot\,\overline{H}^a = \sigma_c(z)\overline{E}^a + \overline{j}; \quad rot\,\overline{E}^a = i\omega\mu\overline{H}^a, \qquad (8)$$

где $\overline{j} = \sigma_a(M) \cdot \overline{E}(M)$ – избыточный ток в неоднородности. Тогда, используя тензорную функцию Грина (6), можно аномальные поля во всем пространстве записать в виде:

$$\overline{E}(M) = \overline{E}^N(M) + \int\limits_V \hat{G}_E(M, M_0)\overline{j}(M_0)\,dv_{M_0} \qquad (9)$$

$$\overline{H}(M) = \overline{H}^N(M) + \int\limits_V \hat{G}_H(M, M_0)\overline{j}(M_0)\,dv_{M_0} \qquad (10)$$

Выражение (9) дает нам интегральное уравнение для плотности избыточного тока $\overline{j}(M) = \sigma_a(M)\overline{E}(M)$:

$$\overline{j}(M) - \sigma_a(M)\int\limits_V \hat{G}_E(M, M_0)\overline{j}(M_0)\,dv_{M_0} = \sigma_a(M)\overline{E}^N(M), \;\; M \in V. \qquad (11)$$

Определив из (11) $\overline{j}(M)$, мы легко с помощью (9-10) вычислим электрическое и магнитное поле на земной поверхности. Как показано в работе [8-9], по известному тензору импеданса или типперам легко синтезируется магнитное поле $\overline{H}^s(x,y)$ на земной поверхности для заданной поляризации первичного поля. Именно это поле и используется для решения обратной задачи, т.е. имеем дополнительное условие при $z = 0$:

$$\int\limits_V \hat{G}_H(x, y, z = 0, M_0)\overline{j}(M_0)\,dv_{M_0} = \overline{H}^s(x, y, \omega) - \overline{H}^N(\omega), \qquad (12)$$

где $\overline{j}(M_0)$ определяется из (11) по известному $\sigma_a(M)$.

Таким образом, при заданной y-ой компоненты $\overline{H}^s$ обратную задачу можно записать в виде:

$$A[\sigma_a(M)] = \overline{H}_y^s(x,y,\omega) - \overline{H}_y^s(\omega) \tag{13}$$

где нелинейный оператор $A[\sigma_a(M)]$ определяется выражениями (11-12). Компоненту магнитного поля выбирают перпендикулярно вытянутости неоднородной зоны V. В нашем случае мы считаем, что размер V по x больше, чем размер V по y. Полученная обратная задача неустойчива и требует регуляризации [10]. Для устойчивого решения возможно два подхода:

- проверка гипотезы строения неоднородности;
- выбор наиболее плавного изменения аномальной электропроводности.

В первом случае на основе априорной информации строится гипотетическое распределение аномальной электропроводности σ_a, зависящее от небольшого числа параметров $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, т.е. $\sigma_a = \sigma_a(M, \overline{p})$, $p \in P$. Причем множество возможных функций σ_a является компактным в множестве кусочно-непрерывных функций. Расчет магнитного поля, согласно (11-12), дает нам на земной поверхности аномальное магнитное поле, зависящее от параметров $\overline{p}$, т.е. имеем $\overline{H}^a(x,y,\omega,\overline{p})$. Тогда обратная задача сводится к определению параметров $\overline{p}_{\min}$, при которых достигается

$$\inf_{p \in P} \left\{ \left\| H_y^s(x,y,\omega) - H_y^N(\omega) - \overline{H}^a(x,y,\omega,\overline{p}) \right\|^2 + \alpha \left\| \overline{p} - \overline{p}_0 \right\|^2 \right\}, \tag{14}$$

где $\overline{p}$ – гипотетическое распределение параметров, а α – параметр регуляризации.

При данном подходе к решению обратной задачи важную роль играет интерпретатор, который строит множество гипотетических моделей строения аномальной зоны электропроводности, зависящее от вектора параметров $\overline{p}$. Интегральное уравнение (11) наиболее эффективно при описанном методе обратной задачи, т.к. область интегрирования V фиксирована. Функция Грина $\hat{G}_E(M, M_0)$ рассчитывается один раз для $M \in \mathrm{V}$ и $M_0 \in V$. Изменение модели при решении обратной задачи происходит только за счет изменения коэффициента $\sigma_a(M)$ в уравнении (11). Поэтому переход от одной модели к другой требует небольшого времени компьютера. Особенно просто реализуется градиентный метод минимизации функционала (14), т.к. $\dfrac{\partial \bar{j}(M)}{\partial p_k}$ удовлетворяет тому же интегральному уравнению (11), только с другой правой частью:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \bar{j}(M)}{\partial p_k} - \sigma_a(M) \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \frac{\partial \bar{j}(M)}{\partial p_k} dv_{M_0} = \\
= \frac{\partial \sigma_a(M)}{\partial p_k} \left(E^N(M) + \int_V \hat{G}_E(M, M_0) \bar{j}_0(M_0)\, dv_{M_0} \right).
\end{gathered} \tag{15}
$$

Рассмотрим теперь второй подход к решению обратной задачи, когда нам известна только область V, которой принадлежит область неоднородности $V \subset V_0$. В этом случае ищется наиболее плавное изменение искомого распределения $\sigma(M)$. Заметим, что при этом мы найдем не истинное распределение электропроводности $\sigma(M)$, а некоторое его сглаженное представление. Однако, зоны повышенной проводимости мы определим достаточно точно.

Таким образом, в данном случае стабилизатором решения обратной задачи является функционал:

$$
\Omega(\sigma) = \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] dv \tag{16}
$$

Теперь вместо (14) обратная задача сводится к задаче минимизации функционала

$$
\inf_{\sigma} \left\{ \left\| H_y^s(x, y, \omega) - H_y^N(\omega) - H_y^a(x, y, \omega) - \right\|^2 + \alpha \Omega(\sigma) \right\}, \tag{17}
$$

где $H_y^a(x, y, \omega)$ – вычисленное на земной поверхности магнитное поле в зависимости от точки наблюдения $M = (x, y, z = 0)$, и частоты поля ω. Параметр регуляризации α определяет вес (значимость) условия плавности изменения электропроводности.

Легко видеть, что метод интегральных уравнений и в этом случае является эффективным инструментом решения обратной задачи. Единственное отличие от предыдущего случая в том, что фиксированной областью является не область неоднородности V, а область V_0, которой принадлежит V. Расчет функции Грина $G(M, M_0)$ проводится для $M \in V_0$ и $M_0 \in V_0$. Таким образом, при любом $V \subset V_0$ функция Грина нам известна, и мы легко решаем интегральное уравнение.

Основная проблема при данном подходе к решению обратной задачи состоит в том, что распределение электропроводности σ является плавной функцией в области неоднородности V и кусочно-постоянной функцией в области $V_0 - V$. Если мы возьмем функционал (16) по области V, то эта область будет изменяться в зависимости от $\sigma_a(M)$, что крайне неудобно.

Преодоление этой трудности возможно двумя путями:

1. Функционал (16) берется по фиксированной области V_0 $(V \in V_0)$, т.е.

$$\Omega(\sigma) = \int\limits_{V_0} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] dv \tag{18}$$

В этом случае мы имеем не только плавное распределение электропроводности $\sigma(M)$ в области V, но и плавный переход к слоистой среде вне V. Ясно, что сглаживание приводит к искажению слоистой среды в области $V_0 - V$. В результате несколько искажается распределение $\sigma(M)$ в аномальной зоне V. Однако зоны повышенной проводимости при этом выделяются достаточно точно.

2. Второй подход состоит в том, что область V_0 разбивается на несколько подобластей $V_0 = \sum_{n=1}^{N} V_n$, каждая из которых расположена в различных слоях слоистой среды. Тогда функционал (16) имеет вид:

$$\Omega(\sigma) = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{V_N} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right)^2 \right] dv, \tag{19}$$

т.е. требуется плавность распределения электропроводности в каждом слое, где есть аномальная зона. Недостатком данного подхода является разрыв распределения аномальной электропроводности на границах слоев, что не всегда выполняется в реальных условиях. Данный подход наиболее удобен, если аномальная зона находится в одном слое.

Литература

1. В.И. Дмитриев. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1969, с. 131.
2. В.И. Дмитриев, А.Н. Силкин, Р. Фарзан. Тензорная функция Грина для системы уравнений Максвелла в слоистой среде// Прикладная математика и информатика, №7, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2001, с.5-18.
3. Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Конечно-разностная технология решения прямой 2D задачи геоэлектрики в классе региональных моделей. Электромагнитное зондирование Земли. М.: ИЗМИРАН. 1985. С. 124-144.
4. Mackie R.L., Smith J.T., Madden T.R. 3D EM modeling using FD equations: the MT example // Radio Science. 1993. V. 29. №4. P. 923-935.
5. В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1987, с. 167.
6. В.И. Дмитриев, Е.Е. Позднякова. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. Известия РАН, Физика Земли, №11, 1993.
7. В.И. Дмитриев, Е.Е. Позднякова. Математическое моделирование низкочастотных электромагнитных полей в трехмерной неоднородной среде. В кн.:"Прямые и обратные задачи математической физики". Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1990, с. 139-152.
8. А.С. Барашков. Восстановление электромагнитных полей на поверхности Земли по тензору импеданса. Известия АН СССР, Физика Земли, №11, 1993.
9. В.И. Дмитриев, Н.А. Мерщикова. Синтез магнитотеллурического поля. Известия РАН, Физика Земли, №11, 2002, с. 69-75.
10. А.Н. Тихонов, В.Д. Арсенин. Методы решения некорректных задач. – М.; Наука, 1974, 222с.