В.И. Дмитриев, А.Н. Силкин, Р. Фарзан

ТЕНЗОРНАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Введение

В прикладной электродинамике часто необходимо проводить математическое моделирование электромагнитных полей в проводящих неоднородных средах. В частности, такие задачи лежат в основе теории электроразведки, электрокаротажа и электромагнитных методов глубинного исследования Земли. В этом случае фундаментальной моделью строения среды является неоднородная область V с произвольным изменением электропроводности $\sigma(x,y,z)$, расположенная в слоистой среде $\sigma(z)$ (электропроводность изменяется только с глубиной). Такие задачи часто решают с помощью интегральных уравнений [1-3]. Для редукции задачи к интегральному уравнению по области V необходимо знать функцию Грина для уравнений Максвелла в слоистой среде. Причем необходимо иметь эффективный алгоритм, адаптированный к использованию в методе интегральных уравнений. Это означает, что необходимо уметь быстро рассчитывать функцию Грина во многих близких точках области V. Причем необходимо выделять отдельно ту часть функции Грина, которая имеет особенность. Именно этой проблеме посвящена настоящая статья.

1. Постановка задачи

Пусть нам дана система уравнений Максвелла в проводящей слоистой магнитооднородной (магнитная проницаемость $\mu = \mu_0 = \text{const}$) среде:

$$\operatorname{rot}\bar{H} = \sigma(z)\bar{E} + \bar{j}; \qquad \operatorname{rot}\bar{E} = i\omega\mu_0\bar{H} \tag{1}$$

где ω – частота изменения электромагнитного поля, а электропроводность $\sigma(z)$ зависит только от глубины, т.е. мы имеем слоистую среду. Будем предполагать, что $\sigma(z)$ – кусочно-постоянная функция:

$$\sigma(z) = \sigma_m \quad \text{при} \quad z_{m-1} < z < z_m, \qquad m \in [0, N], \tag{2}$$

причем $z_{-1} = -\infty, z_N = +\infty, z_0 = 0, z_{N-1} = H_0$.

Электрическое и магнитное поле в этом случае для произвольных источников $\bar{j}(M)$ определяются с помощью тензорных функций Грина электрического $\hat{G}_E(M,M')$ и магнитного $\hat{G}_H(M,M')$ типов в виде:

$$\bar{E}(M) = \int_V \hat{G}_E(M,M')\bar{j}(M')dv_{M'}, \qquad M=(x,y,z), \tag{3}$$

$$\bar{H}(M) = \int_V \hat{G}_H(M,M')\bar{j}(M')dv_{M'}, \qquad M'=(x,y,z). \tag{4}$$

Тензорные функции Грина $\hat{G}_E(M,M')$ и $\hat{G}_H(M,M')$ по переменной M удовлетворяют системе уравнений Максвелла:

$$\text{rot}\,\hat{G}_H = \sigma(z)\hat{G}_E + \hat{\delta}(M,M'); \quad \text{rot}\,\hat{G}_E = i\omega\mu_0\hat{G}_H, \tag{5}$$

где $\hat{\delta}(M,M')$ – тензорная дельта-функция

$$\hat{\delta}(M,M') = \begin{pmatrix} \delta(r_{MM'}) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(r_{MM'}) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(r_{MM'}) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

а $\delta(r_{MM'}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$ – скалярная трехмерная дельта функция, $r_{MM'} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

Электромагнитные тензоры Грина можно выразить через единую тензорную функцию Грина для слоистой среды $\hat{G}(M,M')$ в виде:

$$\hat{G}_H(M,M') = \frac{1}{i\omega\mu_0}\text{rot}\,\hat{G}; \tag{7}$$

$$\hat{G}_E(M,M') = \hat{G} + \text{grad}\left(\frac{1}{k^2(z)}\text{div}\,\hat{G}\right), \qquad k^2 = i\omega\mu_0\sigma(z). \tag{8}$$

Тензорная функция Грина $\hat{G}(M,M')$ по переменной M удовлетворяет уравнению

$$\Delta\hat{G} + k^2\hat{G} + \hat{Q} = -i\omega\mu_0\hat{\delta}(M,M'), \tag{9}$$

где $\hat{Q} = k^2\text{grad}\left(\frac{1}{k^2}\text{div}\,\hat{G}\right) - \text{grad div}\,\hat{G}$.

Так как k^2 зависит только от z, то

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

В этом случае легко показать, что $\hat{G}(M,M')$ представима в виде

$$\hat{G}(M,M') = \begin{pmatrix} G_1(M,M') & 0 & 0 \\ 0 & G_1(M,M') & 0 \\ \dfrac{\partial g(M,M')}{\partial x} & \dfrac{\partial g(M,M')}{\partial y} & G_2 \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где функции $G_{1,}\, G_2$ и g по переменной M удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} &\Delta G_1 + k^2 G_1 = -i\omega\mu_0 \delta(r_{MM'}) \\ &k^2 \mathrm{div}\left(\frac{1}{k^2}\,\mathrm{grad}\; G_2\right) + k^2 G_2 = -i\omega\mu_0 \delta(r_{MM'}) \\ &k^2 \mathrm{div}\left(\frac{1}{k^2}\,\mathrm{grad}\; g\right) + k^2 g = -k^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{k^2}\right) G_1 \end{aligned} \qquad (12)$$

с условиями сопряжения на границах разрыва $k^2(z)$ (электропроводности $\sigma(z)$) в точках (z_{m+1}), $m \in [0,N]$, где непрерывны:

$$G_1,\ G_2,\ g,\ \frac{\partial G_1}{\partial z},\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial G_2}{\partial z} \ \text{ и } \ \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial g}{\partial z} + G_1\right). \qquad (13)$$

В случае кусочно-постоянного распределения $\sigma(z)$ (2) уравнения (12) упрощаются и приобретают вид:

$$\begin{aligned} &\Delta G_1 + k^2(z) G_1 = -i\omega\mu_0 \delta(r_{MM'}) \\ &\Delta G_2 + k^2(z) G_2 = -i\omega\mu_0 \delta(r_{MM'}) \\ &\Delta g + k^2 g = 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

с условиями сопряжения

$$
\begin{aligned}
&[G_1]_{z_{m-1}} = 0, && \left[\frac{\partial G_1}{\partial z}\right]_{z_{m-1}} = 0,\\
&[G_2]_{z_{m-1}} = 0, && \left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial G_2}{\partial z}\right]_{z_{m-1}} = 0, \qquad (15)\\
&[g]_{z_{m-1}} = 0, && \left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial g}{\partial z}\right]_{z_{m-1}} = -\left[\frac{1}{\sigma}\right]_{z_{m-1}} G_1,
\end{aligned}
$$

где $[\varphi]_{z_{m-1}} = \varphi(z_{m-1}+0) - \varphi(z_{m-1}-0)$, а $m \in [1, N]$.

При $|z| \to \infty$ функции G_1, G_2 и g удовлетворяют парциальным условиям излучения.

2. Алгоритм расчета функции Грина

Введем понятие оператора Бесселя

$$I_0(f) = \int_0^\infty J_0(\lambda,\rho) f(z,\lambda)\lambda\, d\lambda, \quad \rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \qquad (16)$$

где $J_0(\lambda\rho)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Если применить оператор Бесселя к задачам (14-15) и ввести обозначения:

$$
\begin{cases}
G_1(\rho,z,z') = \dfrac{i\omega\mu_0}{4\pi}\cdot I_0(V_1)\\
G_2(\rho,z,z') = \dfrac{i\omega\mu_0}{4\pi}\cdot I_0(V_2)\\
g(\rho,z,z') = \dfrac{i\omega\mu_0}{4\pi}\cdot I_0(v)
\end{cases} \qquad (17)
$$

то получим задачи для V_1, V_2, v в виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2V_1}{dz^2} - \eta^2(z)V_1 = -2\delta(z-z')\\
[V_1]_{z_{m-1}} = 0, \quad \left[\dfrac{dV_1}{dz}\right]_{z_{m-1}} = 0, \quad m \in [1, N], \quad z_{m-1} \neq z',
\end{cases} \qquad (18)
$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V_2}{dz^2} - \eta^2(z)V_2 = -2\delta(z-z') \\ [V_2]_{z_{m-1}} = 0, \left[\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{dV_2}{dz}\right]_{z_{m-1}} = 0, \qquad m \in [1,N],\ z_{m-1} \neq z', \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dz^2} - \eta^2(z)v = 0 \\ [v]_{z_{m-1}} = 0, \left[\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{dv}{dz}\right]_{z_{m-1}} = -\left[\dfrac{1}{\sigma}\right]_{z_{m-1}} \cdot V_1, m \in [1,N],\ z_{m-1} \neq z', \end{cases} \tag{20}$$

где $\eta^2(z) = \lambda^2 - k^2(z)$, $k^2(z) = i\omega\mu\sigma(z)$, $\sigma(z)$ – кусочно-постоянная функция, определенная согласно (2).

Последняя задача (20) может быть упрощена, если ввести новую функцию

$$W(z,\lambda) = \lambda^2 v(z,\lambda) + \frac{dV_1}{dz}, \tag{21}$$

которая является решением задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2W}{dz^2} - \eta^2(z)W = -2\delta'(z-z') \\ [W]_{z_{m-1}} = 0, \qquad \left[\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{dW}{dz}\right]_{z_{m-1}} = 0, \qquad m \in [1,n], \qquad z_{m-1} \neq z'. \end{cases} \tag{22}$$

При этом, согласно (17) и (21), имеем:

$$g(\rho,z,z') = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\left(I_0\left(\frac{W}{\lambda^2}\right) - I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{dV_1}{dz}\right)\right). \tag{23}$$

Задачи (18), (19) и (22) могут быть сведены [4] к общей, так называемой фундаментальной, функции слоистой среды $U_a^\alpha(z,\lambda)$, которая по переменной z является решением задачи:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2U_a^\alpha}{dz^2} - \eta^2(z)U_a^\alpha = 0, & z \in (-\infty, z') \bigcup (z', \infty), \\
[U_a^\alpha]_{z_{m-1}} = 0, \quad \left[\dfrac{1}{a(z)}\dfrac{dU_a^\alpha}{dz}\right]_{z_{m-1}} = 0, & m \in [1, N], \quad z_{m-1} \neq z', \\
[U_a^\alpha]_{z'} = -2\alpha, \quad \left[\dfrac{d^2U_a^\alpha}{dz^2}\right]_{z'} = -2(1-\alpha) & \\
U_a^\alpha \to 0 \text{ при } |z| \to \infty, & \mathrm{Re}\,\eta > 0.
\end{cases} \tag{24}
$$

Параметры α, a принимают значения $\alpha = [0,1]$, $a = [1, \sigma]$. Тогда

$$
V_1 = U_1^0; \qquad V_2 = U_\sigma^0; \qquad W = U_\sigma^1, \tag{25}
$$

откуда, согласно (17) и (23), имеем

$$
\begin{gathered}
G_1 = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} I_0\left(U_1^0\right); \qquad G_2 = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} I_0\left(U_\sigma^0\right); \\
g = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\left(I_0\left(\frac{U_\sigma^1}{\lambda^2}\right) - I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{dU_1^0}{dz}\right)\right).
\end{gathered} \tag{26}
$$

Подставив (26) в (8), получим

$$
\begin{gathered}
G_E^{xx} = G_1 + \frac{1}{k^2(z)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}\right) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} I_0\left(U_1^0\right) + \\
+ \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_0\left(U_1^0 + \frac{1}{\lambda^2}\frac{dU_\sigma^1}{dz} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2U_1^0}{dz^2}\right) = \\
= \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \cdot I_0\left(U_1^0\right) + \frac{1}{4\pi\sigma(z)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(k^2 U_1^0 + \frac{dU_\sigma^1}{dz}\right)\right).
\end{gathered} \tag{27}
$$

Аналогично имеем:

$$
G_E^{yx} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(k^2 U_1^0 + \frac{dU_\sigma^1}{dz}\right)\right), \tag{28}
$$

$$
G_E^{xz} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} I_0\left(U_\sigma^1\right), \tag{29}
$$

$$
G_E^{xy} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(k^2 U_1^0 + \frac{dU_\sigma^1}{dz}\right)\right), \tag{30}
$$

$$G_E^{yy} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} I_0\left(U_1^0\right) + \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_0\left(\frac{1}{\lambda^2}\left(k^2 U_1^0 + \frac{dU_\sigma^1}{dz}\right)\right), \qquad (31)$$

$$G_E^{zy} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} I_0\left(U_\sigma^1\right), \qquad (32)$$

$$G_E^{xz} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} I_0\left(\frac{dU_\sigma^0}{dz}\right), \qquad (33)$$

$$G_E^{yz} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} I_0\left(\frac{dU_\sigma^0}{dz}\right), \qquad (34)$$

$$G_E^{zz} = \frac{1}{4\pi\sigma(z)} I_0\left(\lambda^2 U_\sigma^0\right). \qquad (35)$$

Производные от оператора $I_0(\varphi)$ определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} I_0(\varphi) = -\frac{x-x'}{\rho} I_1(\lambda\varphi); \qquad \frac{\partial}{\partial y} I_0(\varphi) = -\frac{y-y'}{\rho} I_1(\lambda\varphi); \qquad (36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_0(\varphi) = -\frac{(x-x')^2}{\rho^2} I_0(\lambda^2\varphi) + \frac{(x-x')^2 - (y-y')^2}{\rho^3} I_1(\lambda\varphi), \qquad (37)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} I_0(\varphi) = -\frac{(y-y')^2}{\rho^2} I_0(\lambda^2\varphi) + \frac{(y-y')^2 - (x-x')^2}{\rho^3} I_1(\lambda\varphi), \qquad (38)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_0(\varphi) = -\frac{(x-x')(y-y')}{\rho}\left(I_0(\lambda^2\varphi) - \frac{2}{\rho} I_1(\lambda\varphi)\right), \qquad (39)$$

где оператор

$$I_1(\lambda\varphi) = \int_0^\infty J_1(\lambda\rho)\varphi(\lambda)\lambda^2 d\lambda. \qquad (40)$$

Таким образом, все сводится к вычислению интегралов Бесселя от фундаментальной функции U_a^α, являющейся решением задачи (24). Для расчета магнитного поля необходимо знать тензорную функцию Грина магнитного типа $\hat{G}_H$, которая, согласно (7) и (11), вычисляется через G_1, G_2 и g:

$$G_H^{xx}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y};\ G_H^{xy}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-\frac{\partial G_1}{\partial z}\right);\ G_H^{xz}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial G_2}{\partial y},$$

$$G_H^{yx}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z}-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right);\ G_H^{yy}=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y};\ G_H^{yz}=\frac{-1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial G_2}{\partial x}, \tag{41}$$

$$G_H^{zx}=\frac{-1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial G_1}{\partial y};\ G_H^{zy}=\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial G_1}{\partial x};\ G_H^{zz}=0,$$

где G_1, G_2 и g находятся по (26), а производные от оператора Бесселя по (36).

3. Алгоритм расчета фундаментальной функции слоистой среды

Расчет тензорных функций Грина уравнений Максвелла электрического типа $\hat{G}_E(M,M')$ и магнитного типа $\hat{G}_H(M,M')$ сводится к расчету операторов Бесселя $I_0(\varphi)$ и $I_1(\psi)$ от фундаментальной функции $U_a^\alpha(z)$, которая является решением задачи (24). Опишем наиболее эффективный алгоритм решения задачи (24) для кусочно-постоянного распределения электропроводности $\sigma(z)$. Для этого введем непрерывную импедансную функцию

$$Z(z)=\frac{a(z)U_a^\alpha(z)}{dU_a^\alpha/dz},\quad a(z)\neq 0, \tag{42}$$

которая является решением уравнения Риккати:

$$Z'+\frac{\eta^2}{a}Z^2=a. \tag{43}$$

В полупространствах при $z<0$ и $z>H_0$ фундаментальная функция имеет вид:

$$\begin{aligned} &U_a^\alpha(z)=U_a^\alpha(z=0)e^{\lambda z} \quad \text{при} \quad z<0\\ &U_a^\alpha(z)=U_a^\alpha(z=H_0)e^{-\eta_n(z-H_0)} \quad \text{при} \quad z>H_0, \end{aligned} \tag{44}$$

откуда определяем начальные данные для уравнения Риккати (43):

$$Z(z=0)=\frac{a(z=-0)}{\lambda}; \tag{45}$$

$$Z(z=H_0)=-\frac{a(z=H_0+0)}{\eta_n}. \tag{46}$$

Фундаментальная функция зависит от местоположения второй точки, т.е. от z'. Поэтому предположим, что

$$z_{p-1} < z' < z_p. \tag{47}$$

Тогда определим импедансную функцию $Z^+(z)$ при $0 \le z \le z_{p-1}$, являющуюся решением уравнения (43) с начальным условием (45), и функцию $Z^-(z)$ при $z_p < z < H_0$ – решение уравнения (43) с начальным условием (46). Вычислив $Z^+(z_{p-1})$ и $Z^-(z_p)$, мы можем, согласно (24) и (42), представить при $z \in [z_{p-1}, z_p]$ фундаментальную функцию в виде:

$$U_a^\alpha(z) = \left(-\alpha\frac{z-z'}{|z-z'|} + \frac{1-\alpha}{\eta_p}\right)e^{-\eta_p|z-z'|} + \left(C_{p_1}e^{-\eta_p(z-z_{p-1})} + C_{p_2}e^{\eta_p(z-z_p)}\right). \tag{48}$$

Первый член в (48) удовлетворяет условиям разрыва при $z = z'$ в (24), а второй член – это общее решение уравнения (24), где константы находятся, согласно (42), из условий:

$$\left.\left(\frac{dU_a^\alpha}{dz} - \frac{a(z)}{Z^+(z)}U_a^\alpha\right)\right|_{z=z_{p-1}} = 0; \qquad \left.\left(\frac{dU_a^\alpha}{dz} - \frac{a(z)}{Z^-(z)}U_a^\alpha\right)\right|_{z=z_p} = 0. \tag{49}$$

Условия (49) дают систему уравнений:

$$C_{p_1}\left(\eta_p Z^-(z_p) + a_p\right)e^{-\eta_p h_p} - C_{p_2}\left(\eta_p Z^-(z_p) - a_p\right) =$$
$$= \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{\eta_p}\right)\left(Z^-(z_p)\eta_p + a_p\right)e^{-\eta_p(z_p - z')},$$

$$C_{p_1}\left(\eta_p Z^+(z_{p-1}) + a_p\right) - C_{p_2}\left(\eta_p Z^+(z_{p-1}) - a_p\right)e^{-\eta_p h_p} =$$
$$= \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{\eta_p}\right)\left(\eta_p Z^+(z_{p-1}) - a_p\right)e^{-\eta_p(z' - z_{p-1})},$$

где $a_p = a(z')$, $h_p = z_p - z_{p-1}$.

Из полученной системы определяем

$$C_{p_1} = \frac{\eta_p Z^+(z_{p-1}) - a_p}{N_p}\left(\alpha\left(A^- - B^- e^{-\eta_p h_p}\right) + \frac{1-\alpha}{\eta_p}\left(A^- + B^- e^{-\eta_p h_p}\right)\right) \tag{50}$$

$$C_{p_2} = \frac{\eta_p Z^-(z_p) + a_p}{N_p}\left(\alpha\left(A^+ e^{-\eta_p h_p} - B^+\right) + \frac{1-\alpha}{\eta_p}\left(A^+ e^{-\eta_p h_p} + B^+\right)\right), \tag{51}$$

где

$$N_p = \left(\eta_p Z^+(z_{p-1}) + a_p\right)\left(\eta_p Z^-(z_p) - a_p\right) - \\ -\left(\eta_p Z^+(z_{p-1}) - a_p\right)\left(\eta_p Z^-(z_p) + a_p\right)e^{-2\eta_p h_p} \tag{52}$$

$$A^q = \left(\eta_p Z^q - a_p\right)e^{-\eta_p(z'-z_{p-1})}, \\ B^q = \left(\eta_p Z^q + a_p\right)e^{-\eta_p(z_p-z')}, \quad q = (+,-) \tag{53}$$

Таким образом, мы полностью определили фундаментальную функцию, а следовательно, и тензор Грина при $z_{p-1} < z,\ z' < z_p$ и выделили часть U_a^α, которая определяет особенность тензора Грина

$$U_{a0}^\alpha = \left(-\alpha\frac{z-z'}{|z-z'|} + \frac{1-\alpha}{\eta_p}\right)e^{-\eta_p|z-z'|}, \qquad z_{p-1} < z,\ z' < z_p. \tag{54}$$

Если необходимо вычислить фундаментальную функцию при $z < z_{p-1}$ или при $z > z_p$, то это легко достигается методом продолжения, т.к. мы знаем $Z^+(z_m)$ при $m \in [0, p-1]$ и $Z^-(z_m)$ при $m \in [p, N-1]$. Рассмотрим, для примера, расчет $U_a^\alpha(z)$ при $z < z_{p-1}$.

В слое $z_{p-2} < z < z_{p-1}$ общее решение для $U_a^\alpha(z)$ представимо в виде:

$$U_a^\alpha(z) = C_{(p-1)1}e^{-\eta_{p-1}(z-z_{p-2})} + C_{(p-1)2}e^{\eta_{p-1}(z-z_{p-1})}. \tag{55}$$

Так как из (48) мы знаем $U_a^\alpha(z_{p-1})$, то мы имеем

$$C_{(p-1)1}e^{-\eta_{p-1}h_{p-1}} + C_2 = U_a^\alpha(z_{p-1}), \quad h_{p-1} = z_{p-1} - z_{p-2}, \tag{56}$$

а из условия (42) при $z = z_{p-2}$ получаем

$$\left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) + a_{p-1}\right)C_{(p-1)1} - \left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) - a_{p-1}\right)e^{-\eta_{p-1}h_{p-1}}C_{(p-1)2} = 0. \tag{57}$$

Из системы уравнений (56-57) находим:

$$C_{(p-1)1} = U_a^\alpha(z_{p-1})\frac{\left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) - a_{p-1}\right)e^{-\eta_{p-1}h_{p-1}}}{\left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) + a_{p-1}\right) + \left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) - a_{p-1}\right)e^{-2\eta_{p-1}h_{p-1}}} \tag{58}$$

$$C_{(p-1)2} = U_a^\alpha(z_{p-1})\frac{\left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) + a_{p-1}\right)}{\left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) + a_{p-1}\right) + \left(\eta_{p-1}Z^+(z_{p-2}) - a_{p-1}\right)e^{-2\eta_{p-1}h_{p-1}}}. \tag{59}$$

Зная $C_{(p-1)1}$ и $C_{(p-1)2}$, мы можем, согласно (55), вычислить $U_a^\alpha(z)$ при $z_{p-2} < z < z_{p-1}$. Теперь мы знаем $U_a^\alpha(z_{p-2})$ и $Z^+(z_{p-3})$ и можем аналогично продолжить $U_a^\alpha(z)$ на интервал $[z_{p-3}, z_{p-2}]$. Таким образом, мы можем найти $U_a^\alpha(z)$ при любом $z<z_{p-1}$. Аналогично определяется $U_a^\alpha(z)$ при $z>z_{p-1}$.

В результате, мы получили простой алгоритм определения $U_a^\alpha(z)$ для любого z, а следовательно, расчет тензорной функции Грина к вычислению интегралов Бесселя (27-35).

4. Исследование особенности тензорной функции Грина

Особенность функции Грина дает часть фундаментальной функции U_{a0}^α, определенная по формуле (54). Для того чтобы определить, какие особенности имеют различные элементы тензорной функции, необходимо в выражения (27-35) подставить U_a^α из (54). При этом надо учитывать, что

$$U_{10}^0 = U_{\sigma 0}^0 = \frac{1}{\eta_p}\cdot e^{-\eta_p|z-z'|};\quad U_{\sigma 0}^1 = \frac{dU_{\sigma 0}^0}{dz};$$

$$\frac{dU_{\sigma 0}^1}{dz} = \eta_p e^{-\eta_p|z-z'|};\quad \frac{1}{\lambda^2}\left(k_p^2 U_{10}^0 + \frac{dU_{\sigma 0}^1}{dz}\right) = U_{10}^0 = \frac{1}{\eta_p}\cdot e^{-\eta_p|z-z'|}.$$

Если обозначить

$$G_0(M,M') = I_0\left(\frac{1}{\eta_p}\cdot e^{-\eta_p|z-z'|}\right) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\eta_p|z-z'|}\frac{\lambda d\lambda}{\eta_p} = \frac{e^{ik_pR}}{R}, \tag{60}$$

где $R=\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$, $\rho=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$, то особая часть тензорной функции Грина может быть представлена согласно (27-35) в виде:

$$\hat{G}_E^0(M,M') = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\cdot\hat{I}\cdot G_0(M,M') + \frac{1}{4\pi\sigma_p}\cdot\hat{D}\cdot G_0(M,M'), \tag{61}$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица, а $\hat{D}$ – матричный дифференциальный оператор:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2}{\partial y\partial z} & \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Таким образом, (60-62) дает нам аналитическое представление особенностей элементов тензорной функции Грина.

Тензорная функция Грина обычно используется для редукции задачи для уравнений Максвелла в неоднородной среде к системе интегральных уравнений, где ядром уравнений является тензор Грина. В этом случае большое значение имеет интеграл от тензора Грина по малой области

$$\hat{g}_E = \int_{\Delta V} \hat{G}_E^0(M,M')dv_{M'}, \qquad (63)$$

где ΔV – элементарная область с центром в точке M. При теоретических исследованиях обычно берут в качестве элементарной области шар радиуса r_0 с центром в точке M. Однако при численных расчетах это неудобно, т.к. общий объем обычно разбивается на параллелепипеды. Оказывается, что особую часть тензора Грина можно аналитически проинтегрировать и по параллелепипеду. В этом случае представим $\hat{G}_E^0$ в виде

$$\hat{G}_E^0(M,M') = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\cdot\hat{I}\cdot\frac{e^{ikR}}{R} + \frac{1}{4\pi\sigma_p}\cdot\hat{D}\cdot\frac{e^{ik_pR}-1}{R} + \frac{1}{4\pi\sigma_p}\cdot\hat{D}\cdot\frac{1}{R}. \qquad (64)$$

Первые два члена имеют слабую особенность, и интеграл от них легко вычисляется. Главную сингулярную часть представляет третий член в выражении (64).

Рассмотрим

$$\hat{g}_E^0 = \frac{1}{4\pi\sigma_p}\int_{\Delta V}\hat{D}\cdot\left(\frac{1}{R}\right)dx'dy'dz'.$$

Так как $\frac{1}{R}$ – четная функция по $(x'-x), (y'-y)$ и $(z'-z)$, то интегралы от всех смешанных производных от $\frac{1}{R}$ будут равны нулю, и мы получим:

$$\hat{g}_E^0 = \begin{pmatrix} \frac{a_x}{4\pi\sigma_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_y}{4\pi\sigma_p} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_z}{4\pi\sigma_p} \end{pmatrix}, \qquad (65)$$

где

$$a_\alpha = \int_{\Delta V} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{1}{R}\right) dx'dy'dz', \ \alpha \in (x,y,z). \tag{66}$$

Если параллелепипед имеет стороны длиной h_x, h_y, h_z, то мы имеем:

$$a_x = \int_{-h_z/2}^{h_z/2} dz \int_{-h_y/2}^{h_y/2} dy \int_{-h_x/2}^{h_x/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) dx =$$

$$= -h_x \int_{-h_z/2}^{h_z/2} dz \int_{-h_y/2}^{h_y/2} \frac{dy}{\left(\frac{h_x^2}{4}+y^2+z^2\right)^{3/2}} = -8h_x \int_{-h_z/2}^{h_z/2} dz \int_0^{h_y} \frac{dt}{\left(h_x^2+4z^2+t^2\right)^{3/2}} =$$

$$= -8h_x h_y \int_{-h_z/2}^{h_z/2} \frac{dz}{\left(h_x^2+4z^2\right)\sqrt{h_x^2+h_y^2+4z^2}} = \tag{67}$$

$$= -8h_x h_y \int_0^{h_z} \frac{d\zeta}{\left(h_x^2+\zeta^2\right)\sqrt{h_x^2+h_y^2+\zeta^2}} =$$

$$= -8\,\mathrm{arctg}\frac{h_y h_z}{h_x\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_z^2}}.$$

Аналогично,

$$a_y = -8\,\mathrm{arctg}\frac{h_x h_z}{h_y\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_z^2}}; \quad a_z = -8\,\mathrm{arctg}\frac{h_x h_y}{h_z\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_z^2}}. \tag{68}$$

В частном случае, когда $h_x = h_y = h_z$, имеем:

$$a_x^0 = a_y^0 = a_z^0 = -8\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{4\pi}{3}. \tag{69}$$

Заметим, что полученные a_α^0 не зависят от шага h, т.е. при $\Delta V \to 0$ мы имеем конечное значение интеграла от тензора Грина.

Описанный метод позволяет активно использовать метод интегральных уравнений при решении задач электродинамики неоднородных сред.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 99-01-00089, и Научной программы “Университеты России”, проект №015.03.02.05.

Литература

1. В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1987, с. 167.

2. В.И. Дмитриев, Е.Е. Позднякова. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. Известия РАН, Физика Земли, №11, 1993.

3. В.И. Дмитриев, Е.Е. Позднякова. Математическое моделирование низкочастотных электромагнитных полей в трехмерной неоднородной среде. В кн.: "Прямые и обратные задачи математической физики". Изд-во Моск. ун-та. 1990. Стр. 139-152.

4. В.И. Дмитриев. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1969, с. 131.