

Спектральный метод в обратной задаче вертикального электрического зондирования двумерных квазислоистых сред.

Введение.

Вертикальное электрическое зондирование состоит в определении распределения электропроводности в Земле по измерениям электрического поля на земной поверхности, возбуждаемого постоянным током, расположенным в точке $M_s = (0, y_s, 0)$. Мы рассмотрим случай зондирования двумерной квазислоистой среды, в которой распределение электропроводности определяется в виде:

$$\sigma(y, z) = \begin{cases} \sigma_0 = 0 & \text{при } 0 > z, \quad -\infty < y < \infty, \\ \sigma_c(z) & \text{при } 0 < z < H(y), \quad -\infty < y < \infty, \\ \sigma_0 = 0 & \text{при } H(y) < z < \infty, \quad -\infty < y < \infty; \end{cases} \quad (1)$$

$$H(y) = \begin{cases} H(y) & \text{при } 0 < y < l, \\ H_0 = const & \text{при } y < 0 \text{ и } y > l. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, мы имеем слой переменной мощности $H(y)$, внутри которого электропроводность распределена одномерно в зависимости от глубины $\sigma_c(z)$ (рис.1).

Измеряемое электрическое поле $\vec{E}(M)$ выражается через скалярный потенциал $U(M)$ в виде:

$$\vec{E}(M) = -gradV(M). \quad (3)$$

Скалярный потенциал является решением граничной задачи

$$\begin{cases} div(\sigma_c(z) gradU(M)) = -I\delta(x)\delta(y - y_s)\delta(z), \\ \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{z=H(y)} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где I — ток в источнике, \vec{n} — нормаль к поверхности $z = H(y)$.

Внутри слоя $0 < z < H(y)$ на границе разрыва $\sigma_c(z)$ выполняются условия непрерывности U и $\sigma \frac{\partial U}{\partial z}$.

Обратная задача вертикального электрического зондирования (ВЭЗ) заключается в определении $\sigma_c(z)$ и $H(y)$ по измеренной на земной поверхности компоненте электрического поля

$$E_x(x, y_s, z=0) = F(x, y_s). \quad (5)$$

Для каждого положения источника $M_s = (0, y_s, 0)$ поле измеряется вдоль профиля по оси OX , проходящего через точку источника. Измерения поля вдоль оси

OX , а не вдоль оси OY , связано с тем, что исследуемая зона находится в ущелье или горной долине, протяженной вдоль оси OX . В этом случае, как было показано в работе [1], удобно использовать спектральный подход, в котором вместо поля и потенциала рассматриваются их образы Фурье по координате x .

Спектр потенциала

$$u_v(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-ix} dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) \cos vx dx \quad (6)$$

является, согласно (4), решением граничной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_c(z) \frac{\partial u_v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_c(z) \frac{\partial u_v}{\partial z} \right) - v^2 \sigma_c(z) u_v = -I \delta(y - y_s) \delta(z) \\ \frac{\partial u_v}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_v}{\partial n} \Big|_{n=H(y)} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Внутри слоя $0 < z < H(y)$, $-\infty < y < \infty$ непрерывны $u_v(y, z)$ и $\sigma_c(z) \frac{\partial u_v}{\partial z}$.

Обратная задача состоит в определении $\sigma_c(z)$ и $H(y)$ по известному спектру аномального электрического поля:

$$S_E(v, y_s) = \int_0^{\infty} \left(F(x, y_s) - \frac{I}{2\eta\sigma_1 x^2} \right) \sin vx dx = f(v, y_s), \quad (8)$$

где

$$S_E(v, y_s) = \int_0^{\infty} \left(E_x(x, y_s, z=0) - \frac{I}{2\eta\sigma_1 x^2} \right) \sin vx dx, \quad (9)$$

а $\sigma_1 = \sigma(z=+0)$.

Как было показано в [1] на примере одномерной обратной задачи, вместо спектра аномального поля удобнее использовать спектр аномального кажущегося сопротивления

$$S_\rho(v, y_s) = \frac{4\pi}{Iv} S_E(v, y_s). \quad (10)$$

п.1. Вывод интегрального уравнения.

Для решения обратной задачи необходим алгоритм вычисления спектра электрического поля на земной поверхности, т.е. нам необходим метод решения граничной задачи (7). Для этого введем спектр аномального потенциала

$$w_v(y, z) = u_v(y, z) - u_v^0(y, z), \quad (11)$$

где $u_v^0(y, z)$ — спектр потенциала в слоистом пространстве, являющийся решением следующей задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_c(z) \frac{\partial u_v^0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_c(z) \frac{\partial u_v^0}{\partial z} \right) - v^2 \sigma_c(z) u_v^0 = -I \delta(y - y_c) \delta(z) \\ \text{при } -\infty < y < \infty, 0 < z < \infty, \text{ где} \\ \sigma_c(z) = \sigma_c(z = H_0) \text{ при } z \geq H_0 = \max_y H(y), \\ \frac{\partial u_v^0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; u_v^0 \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \\ u_v^0 \text{ и } \sigma_c \frac{\partial u_v^0}{\partial z} \text{ непрерывны на разрывах } \sigma_c(z). \end{array} \right. \quad (12)$$

Тогда, согласно (7) и (12), имеем задачу для $w_v(y, z)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_c(z) \frac{\partial w_v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_c(z) \frac{\partial w_v}{\partial z} \right) - v^2 \sigma_c(z) w_v = 0 \\ \text{при } -\infty < y < \infty, 0 < z < H(y), \\ \frac{\partial w_v}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \frac{\partial w_v}{\partial n} \Big|_{z=H(y)} = - \frac{\partial u_v^0}{\partial n} \Big|_{z=H(y)}, \\ w_v \text{ и } \sigma_c \frac{\partial w_v}{\partial z} \text{ непрерывны на разрывах } \sigma_c(z). \end{array} \right. \quad (13)$$

Задача (13) легко редуцируется к интегральному уравнению. Для этого представим спектр аномального потенциала в виде потенциала простого слоя

$$w(M) = \int_L \mu(M_0) G(M, M_0) dl_{M_0}; \quad M = (y, z), M_0 = (y_0, z_0), \quad (14)$$

где L — нижняя граница слоя $z = H(y)$, а $G(M, M_0)$ — функция Грина для задачи (12), т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma_c(z) \operatorname{grad} G) - v^2 \sigma_c(z) G = -\delta(y - y_0) \delta(z - z_0); |y| < \infty; 0 < z < \infty, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \text{ при } z=0, G \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \\ G \text{ и } \sigma_c \frac{\partial G}{\partial z} \text{ непрерывны на разрывах } \sigma_c(z). \end{array} \right. \quad (15)$$

Функция $w(M)$, представленная в виде (14), удовлетворяет всем условиям задачи (13) кроме граничного условия на L при $z = H(y)$. Подставив (14) в условие на L и учитывая свойства потенциала простого слоя, получим

$$\mu(M) - 2 \int_L \mu(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} = 2 \frac{\partial u_v^0(M)}{\partial n_M} \quad \text{при } M \in L \quad (16)$$

Заметим, что M и M_0 принадлежат L , т.е. $M = (y, z = H(y))$ и $M_0 = (y_0, z_0 = H(y_0))$. Поэтому интегральное уравнение можно записать в следующем виде:

$$q(y) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} q(y_0) K(y, y_0) dy_0 = 2f(y), \quad y \in (-\infty, \infty), \quad (17)$$

где

$$q(y) = \mu(y, z = H(y)),$$

$$K(y, y_0) = \frac{\partial G(y, z, y_0, z_0)}{\partial n_M} \Big|_{\substack{z=H(y), \\ z_0=H(y_0)}} \sqrt{1 + (H'(y_0))^2}, \quad (18)$$

$$f(y) = \frac{\partial u_v^0(M)}{\partial n_M} \Big|_{z=H(y)}. \quad (19)$$

Интегральное уравнение (17) легко решается численно. Для его решения необходимо знать функцию Грина. Метод расчета этой функции мы рассмотрим ниже.

II.2. Функция Грина.

Функция Грина является решением задачи (15) и может быть представлена в виде:

$$G(y - y_0, z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Z(z, z_0, \eta) \cos \lambda(y - y_0) d\lambda, \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}, \quad (20)$$

где подынтегральная функция $Z(z, z_0, \eta)$ по переменной z является решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \left(\sigma_c(z) \frac{dZ}{dz} \right) - \eta^2 \sigma_c(z) Z = -2\delta(z - z_0); \quad 0 < z < H_0 = \max_y H(y), \quad z \neq z_0, \\ \frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dZ}{dz} + \eta Z = 0 \quad \text{при } z = H_0, \\ Z \text{ и } \sigma_c \frac{dZ}{dz} \text{ - непрерывны } \eta^2 = \lambda^2 + \nu^2. \end{array} \right. \quad (21)$$

Если ввести функцию

$$(z) = \frac{\sigma_c(z)}{Z(z, z_0, \lambda)} \frac{dZ}{dz}, \quad (22)$$

то для (z) получим задачу Коши для уравнения Риккати

$$\frac{dY}{dz} + \frac{1}{\sigma_c(z)} Y^2 = \eta^2 \sigma_c(z) \quad \text{при } 0 < z < z_0 \quad \text{и} \quad z_0 < z \leq H_0 \quad (23)$$

с начальными данными

$$Y(z=0) = 0 \text{ и } Y(z=H_0) = -\eta\sigma_c(z=H_0). \quad (24)$$

Определив из (23-24) функции (z) при $0 < z < z_0$ и при $z_0 < z < H_0$ легко найти $Z(z, z_0, \eta)$. Из (22) следует

$$Z(z, z_0, \eta) = Z(z_0, z_0, \eta) \exp^{z_0 \int_{z_0}^z \frac{Y(\xi)}{\sigma_c(\xi)} d\xi}. \quad (25)$$

Так как при $z = z_0$ должны выполняться условия

$$Z(z = z_0 + 0, z_0, \eta) = Z(z = z_0 - 0, z_0, \eta) = Z(z_0, z_0, \eta),$$

$$\sigma_c(z_0 + 0) \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=z_0+0} - \sigma_c(z_0 - 0) \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=z_0-0} = -2 =$$

$$= [Y(z_0 + 0, z_0, \eta) - Y(z_0 - 0, z_0, \eta)] Z(z_0, z_0, \eta),$$

то находим

$$Z(z_0, z_0, \eta) = \frac{2}{Y(z_0 - 0) - Y(z_0 + 0)}. \quad (26)$$

Подставив (26) в (25), а затем в (20), получим окончательно

$$G(y - y_0, z, z_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda(y - y_0)}{Y(z_0 - 0) - Y(z_0 + 0)} e^{z_0 \int_{z_0}^z \frac{Y(\xi) d\xi}{\sigma_c(\xi)}} d\lambda. \quad (27)$$

Таким образом, вычисление функции Грина сводится к расчету интеграла (27) от функций (z) , являющихся решениями задач Коши (23-24).

Для решения интегрального уравнения (17) нам необходимо знать правую часть, определяемую, согласно (19), через $u_v^0(y, z)$ — спектр потенциала в слоистой среде. Функция $u_v^0(y, z)$ является решением задачи (12). Сравнивая задачи (12) и (15), получаем

$$u_v^0(y, z) = IG_v(y, y_0 = y_s, z, z_0 = 0). \quad (28)$$

Откуда, учитывая, что $Y(z = -0) = 0$, согласно (27), имеем:

$$u_v^0(y, z) = -\frac{I}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) e^{z_0 \int_{z_0}^z \frac{Y(\xi) d\xi}{\sigma_c(\xi)}} \frac{d\lambda}{Y(z = +0)}, \quad (29)$$

где $Y(z)$ находится из задачи Коши (23) при $0 < z < H_0$ с начальными данными $Y(z = H_0) = -\eta\sigma_c(H_0)$.

В частном случае для однородного полупространства ($\sigma_c(z) = \sigma_1$ при $0 < z < \infty$) находим:

$$Y(z) = \sigma_1 \eta \frac{1 - e^{-2\eta z}}{1 + e^{-2\eta z}} \text{ при } 0 < z < z_0 < H_0,$$

$$Y(z) = -\sigma_1 \eta \text{ при } 0 < z_0 < z < H_0.$$

Откуда

$$Z(z_0, z_0, \eta) = \frac{1}{\sigma_1 \eta} (1 + e^{-2\eta z_0}).$$

Тогда

$$Z(z, z_0, \eta) = \frac{1}{\sigma_1 \eta} (e^{-\eta(z_0-z)} + e^{-\eta(z_0+z)}) \quad \text{при } 0 < z < z_0 < H_0,$$

$$Z(z, z_0, \eta) = \frac{1}{\sigma_1 \eta} (e^{-\eta(z-z_0)} + e^{-\eta(z+z_0)}) \quad \text{при } 0 < z_0 < z < H_0.$$

Или

$$Z(z, z_0, \eta) = \frac{1}{\sigma_1 \eta} (e^{-\eta|z-z_0|} + e^{-\eta(z+z_0)}) \quad (30)$$

Подставив (30) в (20), определим функцию Грина

$$\begin{aligned} G(y-y_0, z, z_0) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty (e^{-\eta|z-z_0|} + e^{-\eta(z+z_0)}) \cos \lambda(y-y_0) \frac{d\lambda}{\eta} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1} \left(K_0 \left(\nu \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right) + K_0 \left(\nu \sqrt{(y-y_0)^2 + (z+z_0)^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда.

Подставив (31) в (28), найдем спектр потенциала однородного полупространства

$$u_v^0(y, z) = \frac{I}{\pi\sigma_1} K_0(\nu \sqrt{(y-y_s)^2 + z^2}). \quad (32)$$

Таким образом мы можем рассчитывать функцию Грина и спектр потенциала, а, следовательно, мы можем численно решить интегральное уравнение (17-19). Зная $q(y)$, мы, согласно (14), легко вычисляем спектр аномального потенциала на земной поверхности ($z=0$):

$$w_0(\nu, y_s) = w(y_s, z=0) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(y_0) G(y_s, z=0, y_0, z_0=H(y_0)) \sqrt{1+H'^2(y_0)} dy_0. \quad (33)$$

Используя вычисленный спектр аномального потенциала, мы можем решать обратную задачу с условием (10), т.к.

$$S_E(\nu, y_s) = \frac{\nu}{2} w_0(\nu, y_s); \quad S_\rho(\nu, y_s) = \frac{4\pi}{I\nu} S_E(\nu, y_s) = \frac{2\pi}{I} w_0(\nu, y_s). \quad (34)$$

Таким образом, зная $\sigma_c(z)$ и $H(y)$, можно по описанному алгоритму вычислить $S_\rho(\nu, y_s)$. Обозначим этот алгоритм следующим образом:

$$S_\rho(\nu, y_s) = A[\sigma_c(z), H(y)]. \quad (35)$$

Рассмотрим метод решения обратной задачи.

п.3. Метод решения обратной задачи.

Пусть при некотором наборе местоположения источника постоянного поля

$\{y_{Sn}\} n \in [1, N]$ измерено в зависимости от x электрическое поле $E_x^e(x, y_S, z=0)$. Обратная задача состоит в определении $\sigma_c(z)$ и $H(y)$ по измеренному электрическому полю в зависимости от x и y_S . Трансформируем E_x^e в $S_\rho^e(v, y_S)$ и получим согласно (9-10):

$$S_\rho^e(v, y_S) = \frac{2}{\sigma_1 v_0} \int_0^\infty \left(\frac{2\pi\sigma_1}{I} E_x^e(x, y_S, z=0) - \frac{1}{x^2} \right) \sin vx dx. \quad (36)$$

Так как электрическое поле измерено с определенной погрешностью и на конечном интервале $x \in [l, L]$, то $S_\rho^e(v, y_S)$ мы имеем с некоторой погрешностью δ .

Таким образом, для решения обратной задачи должно выполняться условие

$$\|S_\rho^e(v, y_S) - S_\rho(v, y_S)\| = \|S_\rho^e(v, y_S) - A(\sigma_c(z), H(y))\| \leq \delta \quad (37)$$

Так как $S_\rho^e(v, y_S)$ как функция изменяется на несколько порядков, то для равнозначного вклада в невязку (37) значений S_ρ^e при различных необходимо вычислять норму для $\ln S_\rho^e(v, y_S)$, т.е.

$$\left\| \ln \frac{S_\rho(v, y_S)}{S_\rho^e(v, y_S)} \right\| = \left\| \ln \frac{A(\sigma_c(z), H(y))}{S_\rho^e(v, y_S)} \right\| \leq \delta. \quad (38)$$

Спектр аномального кажущегося сопротивления $S_\rho^e(v, y_S)$ известен для набора $\{v_m\} m \in [1, M]$ и для набора $\{y_{Sn}\} n \in [1, N]$. Вычисленный спектр $S_\rho^e(v, y_S)$ также определен для данных наборов переменных. Согласно (23) мы можем записать

$$S_\rho(v_m, y_{Sn}) = A_{mn}(\sigma_c(z), H(y)). \quad (39)$$

Тогда условие (38) можно записать в виде:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left| \ln \frac{A_{mn}(\sigma_c(z), H(y))}{S_\rho^e(v_m, y_{Sn})} \right|^2 \leq \delta. \quad (40)$$

Обратная задача неустойчива, поэтому в общем случае возможны сильно отличающиеся друг от друга функции $\sigma_c(z)$ и $H(y)$, которые удовлетворяют условию (40). Это, так называемые, эквивалентные решения обратной задачи. Для того, чтобы выделить решение наиболее близкое к истинному, мы должны ввести критерий отбора решений (стабилизатор). В нашем случае для распределения электропроводности целесообразно ввести уклонение от гипотетически заданного распределения $\sigma_c^0(z)$, а для границы слоя $z = H(y)$ ввести необходимость плавного изменения границы, т.е. малость нормы производной $H'(y)$. Таким образом, стабилизатор будет иметь вид:

$$\Omega(\sigma_c(z), H(y)) = \left\| \ln \frac{\sigma_c(z)}{\sigma_c^0(z)} \right\|_{L_2}^2 + \rho \|H'(y)\|_{L_2}^2 \leq \Omega_0. \quad (41)$$

Задачу определения $\sigma_c(z)$ и $H(y)$ из условий (40-41) удобно свести к задаче на безусловный экстремум

$$(\sigma_c(z), H(y)) : \inf \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left| \ln \frac{A_{mn}(\sigma_c, H)}{S_\rho^e(v_m, y_{Sn})} \right|^2 + \alpha \Omega(\sigma_c, H) \right\}, \quad (42)$$

где α — параметр регуляризации задачи, который находится из условия невязки ($\max \alpha$, при котором выполняется равенство в условии (40)).

Обычно число зондирований N (набор $\{v_{0,n}\}$) мало, т.к. возможности изменений по y ограничены естественными условиями задачи (зондирование в горной долине и т.п.). Поэтому $H(y)$ ищется в виде:

$$H(y) = H_0 + y(l - y)P_{N-1}(y), \quad y \in [0, l], \quad (43)$$

где $P_{N-1}(y)$ — полином степени $N - 1$.

п.4. Пример решения обратной задачи.

Описанный алгоритм (42-43) был реализован на персональном компьютере. Созданная система позволяет быстро находить рельеф слоя $H(y)$ и распределение электропроводности внутри слоя $\sigma_c(z)$. В качестве примера мы рассмотрим простейший случай определения границы однородного слоя $H(y)$ при заданной электропроводности слоя $\sigma_c(z) = \sigma_1 = const$. Граница слоя бралась в виде:

$$H(y) = H_m \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{l} \right) \quad \text{при } 0 \leq y \leq l; \quad H_m = \max_y H(y),$$

$$H(y) = H_0 = 0 \quad \text{при } y \leq 0 \text{ и } y \geq l.$$

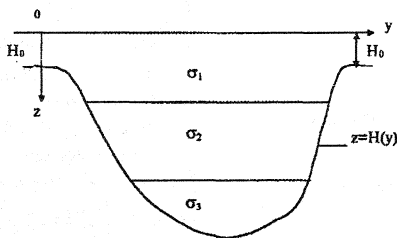


Рис. 1.

Для этой модели были проведены расчеты спектра кажущегося сопротивления $S_\rho(v, y_S)$ для случая $l = H_m$.

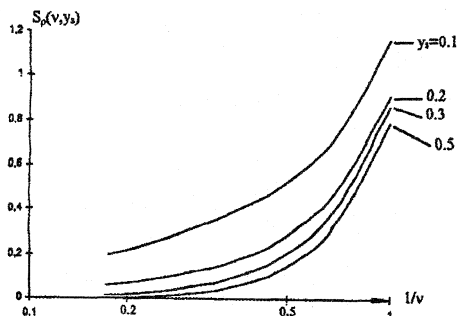


Рис.2

Из рис.2 видно, что, чем ближе точка зондирования y_S к краю впадины, тем больше значения S_ρ . Это связано с концентрацией тока в меньшем объеме. Чем меньше x , что отвечает большим x , тем больше $S_\rho(v, y_S)$. Поэтому при больших x мы имеем меньшее отличие от ровного слоя, а при малых x более сильное отличие от слоя постоянной толщины. Поэтому, сравнивая имеющиеся кривые $S_\rho(v, y_S)$ с $S_\rho(v)$ для слоя постоянной толщины, необходимо добиваться совпадения кривых при больших x (малых $1/v$). Это дает одномерную интерпретацию имеющихся кривых $S_\rho(v, y_S)$.

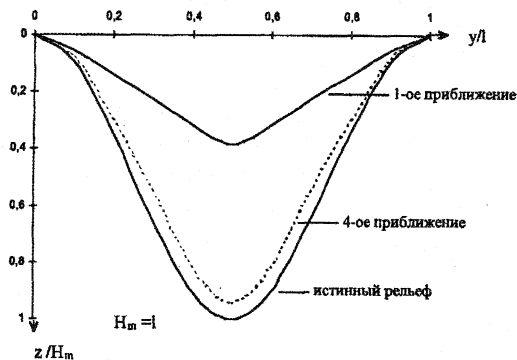


Рис.3

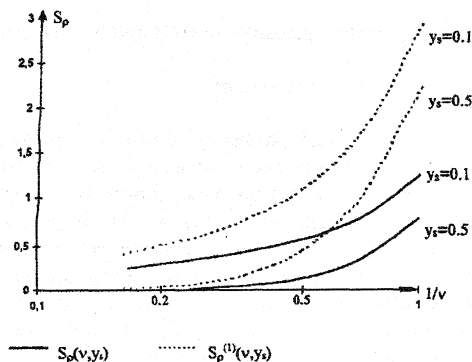
экспериментальных кривых $S_\rho(v, y_S)$, которые приведены на рис.4.

Спектральные кривые $S_\rho(v, y_S)$ приведены на рис.2 в зависимости от $1/v$ в логарифмическом масштабе для

$$\frac{y_S}{l} = 0,1; 0,2; 0,3; 0,5.$$

Вычисленные S_ρ брались в качестве экспериментальной информации для обратной задачи.

На рис.3 приведено полученное таким способом первое приближение $H^{(1)}(y)$ и истинное $H(y)$. Различие между первым приближением и истинным рельефом слоя очень велико. Велико и отличие кривых $S_\rho^{(1)}(v, y_S)$, вычисленных для полученного рельефа слоя $H^{(1)}(y)$, от



— $S_p(v, y_s)$ $S_p^{(1)}(v, y_s)$
Сравнение спектральных кривых для истинного рельефа
и для первого приближения

Рис.4

Дальнейшее уточнение рельефа происходит следующим образом. Берется $\Delta S_p(v, y_s) = S_p(v, y_s) - S_p^1(v, y_s)$, определяющая невязку кривых, и для нее рассчитывается ΔH по алгоритму решения одномерной обратной задачи и находится второе приближение рельефа слоя $H^{(2)}(y) = H^{(1)}(y) + \Delta H(y)$. Для нового $H^{(2)}(y)$ вычисляется $S_p^{(2)}(v, y_s)$ и сравнивается с исходным $S_p(v, y_s)$. Если кривые сильно отличаются, то процедура продолжается. На рис.3 приведено четвертое приближение, которое достаточно близко к истинному.

Таким образом, мы легко решаем обратную задачу вертикального электрического зондирования слоя переменной мощности с помощью спектрального подхода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 99-01-00089 и межвузовской научной программы "Университеты России — фундаментальные исследования" проект № 5199.

Литература

1. В.И.Дмитриев, А.Бейтоллахи. О спектральном подходе к квазитрехмерной обратной задаче вертикального электрического зондирования. //В трудах "Прикладная математика и информатика", №1, Изд-во "Диалог-МГУ", 1999, с. 68-77.