Раздел I. Обратные задачи

В.И. Дмитриев

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЧАСТОТНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

Введение

На практике для исследования строения слоистых сред часто используют метод частотного зондирования. Суть метода состоит в измерении на поверхности слоистой среды электромагнитного или акустического поля в зависимости от частоты, возбуждаемого заданным источником поля. Частотная характеристика измеряемого поля позволяет однозначно определить параметры слоистой среды.

Методы расчета полей в слоистых средах хорошо разработаны [1-4]. Поля представляются в виде преобразования Бесселя, а подынтегральная функция находится из решения дифференциального уравнения. Решение обратной задачи сводится к минимизации функционала невязки измеренного поля и рассчитанного поля в зависимости от частоты. При этом возникает две проблемы: неустойчивость решения обратной задачи и большие затраты времени ЭВМ для вычисления градиента функционала.

В данной статье мы рассмотрим подходы к преодолению этих трудностей на примере зондирования слоистой среды полем вертикального магнитного диполя.

Постановка задачи

Пусть имеется проводящая слоистая среда со следующим распределением электропроводности:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_0 \approx 0 & \text{при} \quad z > 0 \\ \sigma\ \ z & \text{при} \quad z \in\ \ 0, -H \\ \sigma_H & \text{при} \quad z < -H \end{cases} \tag{1}$$

Источник поля (вертикальный магнитный диполь с магнитным моментом m_z) находится в точке $M_0 =\ \ x_0 = 0, y_0 = 0, z_0\ \ $, $z_0 \geq 0$.

Электромагнитное поле определяется через вертикальную компоненту векторного потенциала магнитного поля $\mathbf{A} =\ \ 0, 0, A_z\ \ $ в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma\ \ z} rot\ \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{A} + \frac{1}{i\omega\mu} grad\ div\ \frac{\mathbf{A}}{\sigma}. \tag{2}$$

Функция $A_z\ \ x, y, z\ \ $ является решением дифференциального уравнения

$$\Delta\left(\frac{\mathbf{A}_z}{\sigma}\right)+i\omega\mu A_z=-i\omega\mu m_z\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0),\quad z\in(-\infty,\infty) \tag{3}$$

с условием непрерывности $\dfrac{A_z}{\sigma}$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{A_z}{\sigma}\right)$ на разрывах $\sigma(z)$ и условиями убывания на бесконечности ($\sigma\neq 0$).

Решение задачи (3) представляется в виде преобразования Бесселя

$$A_z=\sigma\cdot u(\rho,z)=\sigma\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\,U(z,\lambda)\,\lambda\,d\lambda, \tag{4}$$

где спектральная функция $U(z,\lambda)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\eta^2 U=-2\delta(z-z_0),\quad \eta=\sqrt{\lambda^2-k^2},\ \mathrm{Re}(\eta)>0,\ k^2=i\omega\mu\sigma \tag{5}$$

при условиях непрерывности U и $\dfrac{\partial U}{\partial z}$, а также условии $U\to 0$ при $|z|\to\infty$.

Поля определяются в виде:

$$E_x=\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial y},\quad E_y=-\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{6}$$

$$H_x=\frac{m_z}{4\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\quad H_y=\frac{m_z}{4\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \tag{7}$$

$$H_z=\frac{m_z}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2 u\right), \tag{8}$$

$$\text{где}\quad u=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\,U(z,\lambda)\,\lambda\,d\lambda. \tag{9}$$

Обычно обратную задачу зондирования ставят для измерения вертикального магнитного поля $H_z^{из}(\omega)$ или измерения горизонтального электрического поля $E_x^{из}(\omega)$. Поля измеряются на фиксированном расстоянии l от источника. При заданном $\sigma(z)$ из задачи (5) находим $U(z,\lambda)$ и, согласно (6-9), находим

$$E_x\left[\omega,l,\sigma(z)\right]=-\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda l)\,U(z,\lambda)\,\lambda^2\,d\lambda, \tag{10}$$

$$H_z\left[\omega,l,\sigma(z)\right]=\frac{m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda l)\,U(z,\lambda)\,\lambda^3\,d\lambda. \tag{11}$$

Поля являются нелинейными операторами, действующими на электропроводимость $\sigma(z)$ и зависят от частоты ω и расстояния от источника до точки измерения l.

Для вычисления полей нам необходимо определить функцию $U(z,\lambda)$, которая является решением задачи (5) на бесконечной прямой. Данную задачу легко свести к краевой, используя представление функции $U(z,\lambda)$ при $z_0 \geq 0$ и $\sigma_0 \equiv 0$ в виде

$$U(z,\lambda) = \frac{e^{-\lambda|z-z_0|}}{\lambda} + C_1 e^{-\lambda z} \quad \text{при} \quad z \geq 0, \tag{12}$$

$$U(z,\lambda) = C_2 e^{\eta_H z} \quad \text{при} \quad z \leq -H, \tag{13}$$

откуда, исключая C_1 и C_2, находим граничные условия

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \lambda U = 2e^{-\lambda z_0} \ \text{при} \ z = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \eta_H U = 0, \quad \eta_H = \sqrt{\lambda^2 - k_H^2} \ \text{при} \ z = -H. \tag{15}$$

Для решения уравнения (5) с граничными условиями (14,15) введем функцию

$$Y(z) = \frac{\partial U}{\partial z} / U. \tag{16}$$

Тогда

$$\frac{d^2U}{dz^2} = \frac{dY}{dz}U + Y\frac{dU}{dz} = \left(\frac{dY}{dz} + Y^2\right)U = \eta^2 U,$$

откуда получаем задачу для $Y(z)$

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dz} + Y^2 = \eta^2 & \text{при} \quad z \in (-H, 0) \\ Y = \eta_H & \text{при} \quad z = -H \end{cases}. \tag{17}$$

Решив задачу Коши (17), найдем $Y(z=0)$. Тогда

$$Y(z=0)\,U(z=0,\lambda) = \frac{dU(z=0,\lambda)}{dz}.$$

Это равенство совместно с граничным условием (14) дает возможность определить

$$U(z=0,\lambda) = \frac{2e^{-\lambda z_0}}{\lambda + Y(z=0,\lambda)}. \tag{18}$$

Высокочастотная асимптотика поля

Для дальнейших исследований и доказательства теоремы единственности решения обратной задачи нам потребуется асимптотика полей (10) и (11) при $\omega \to \infty$ ($k \to \infty$).

Поля в однородном пространстве с волновым числом k имеют две асимптотики: высокочастотную $kl \gg 1$и низкочастотную $kl \ll 1$, где l-расстояние между источником и точкой измерения поля. В слоистой среде возникает дополнительная промежуточная асимптотика, когда $kl \gg 1$в одних слоях, а $kl \ll 1$в других слоях. Эта асимптотика получила название поле в дальной зоне. Она очень часто возникает на границе воздуха с проводящей средой, так как в воздухе при $k_0 l \ll 1$, в проводящей среде при этом $k\ z\ l \gg 1$. Таким образом, нам необходимо получить асимптотику полей, представленных в виде преобразований Бесселя (10) и (11) при $l \to \infty$.

Вычисление асимптотик интегралов Бесселя дано в работе [5], где доказано, что преобразование Бесселя

$$I(\rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) F(\lambda)\, d\lambda$$

при $\rho \to \infty$ имеет асимптотику

$$I(\rho) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{\rho^{k+1}} \left. \frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0} + \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho^{n+1}}, \ \ \varepsilon(\rho) \to 0 \text{ при } \rho \to 0, \qquad (19)$$

$$\text{где } \ c_{2k-1} = 0, \ \ c_{2k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \qquad (20)$$

Соответственно получаем

$$I(\rho) = \frac{F(\lambda=0)}{\rho} - \frac{F''(\lambda=0)}{2\rho^3} + \frac{F^{IV}(\lambda=0)}{8\rho^5} + \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho^5}. \qquad (21)$$

Из (21) следует асимптотика для преобразования Бесселя первого порядка

$$I_1(\rho) = \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) F(\lambda) \lambda\, d\lambda = -\frac{dI(\rho)}{d\rho} =$$

$$= \frac{F(\lambda=0)}{\rho^2} - \frac{3F''(\lambda=0)}{2\rho^4} + \frac{15 F^{IV}(\lambda=0)}{8\rho^6} + \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho^6}. \qquad (22)$$

Используя формулы (21) и (22), легко получить высокочастотную асимптотику полей. Заметим, что сделав замену переменного $\lambda = |k_1| t$ в интегралах (10) и (11), мы получаем большой параметр $\rho = |k| l \to \infty$ при $\omega \to \infty$. Это означает, что высокочастотную асимптотику полей мы получаем при $l \to \infty$.

Рассмотрим вначале асимптотику электрического поля E_x, представление (10) которого имеет $F(\lambda) = \lambda U(z,\lambda)$. Тогда, согласно (22), имеем при $l \to \infty$ и $z = 0$

$$E_x\left(x=0,y=l,z=0\right)\cong -\frac{3i\omega\mu m_z}{4\pi l^4}\frac{\partial U\left(z=0,\lambda\right)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}, \tag{23}$$

так как $F\left(0\right)=0$, $F''\left(0\right)=2U'\left(z=0,\lambda\right)\big|_{\lambda=0}$. Для магнитного поля H_z согласно (11) имеем $F\left(\lambda\right)=\lambda^3 U\left(z,\lambda\right)$. Тогда $F\left(0\right)=0$, $F''\left(0\right)=0$ и $F^{IV}\left(\lambda=0\right)=24U'\left(z,\lambda=0\right)$.

В результате, согласно (21), получаем асимптотику магнитного поля при $l\to\infty$, $z\geq 0$ в виде

$$H_z\left(x=0,y=l,z\geq 0\right)\cong \frac{9m_z}{4\pi l^5}\frac{\partial U\left(z,\lambda\right)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}. \tag{24}$$

Таким образом, для получения окончательного вида асимптотик полей необходимо вычислить $\dfrac{\partial U\left(z,\lambda=0\right)}{d\lambda}$ при $z\geq 0$.

Используя выражение (18) для $U\left(z=0,\lambda\right)$, получаем при $z_0=0$

$$\frac{dU}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=-\frac{2}{Y^2\left(z=0,\lambda=0\right)}\left(1+\frac{dY}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right)$$

Заметим, что $Y\left(z,\lambda\right)$, согласно задаче (17), зависит от λ^2, т.к. $\eta=\sqrt{\lambda^2-k^2\left(z\right)}$. Поэтому $\dfrac{dY}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=0$ и, окончательно, имеем

$$\frac{dU}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}=-\frac{2}{Y^2\left(z=0,\lambda=0\right)}. \tag{25}$$

Зная $\dfrac{dU}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}$, согласно (23) и (24), находим высокочастотную асимптотику E_x и H_z

$$E_x\to\frac{3i\omega\mu m_z}{2\pi l^4 Y^2\left(z=0,\lambda=0\right)}\quad \text{при } \omega\to\infty \tag{26}$$

$$H_z\to\frac{9m_z}{2\pi l^5 Y^2\left(z=0,\lambda=0\right)}\quad \text{при } \omega\to\infty. \tag{27}$$

Рассмотрим функцию $Y_0\left(z\right)=Y\left(z,\lambda=0\right)$. Согласно (17) функция $Y_0\left(z\right)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases}\dfrac{dY_0}{dz}+Y_0^2=-k^2\left(z\right), \quad z\in\left(-H,0\right), \quad k^2\left(z\right)=i\omega\mu\sigma\left(z\right), \\ Y_0\left(z=-H\right)=-ik_H, \quad k_H=\sqrt{i\omega\mu\sigma_H}, \quad \operatorname{Re}\left(k_H\right)>0.\end{cases} \tag{28}$$

Полученная задача совпадает с задачей определения адмитанса слоистой среды для магнитотеллурическкго поля [6]. Следовательно, $Y(z=0,\lambda=0)=Y_0(z=0)$ есть адмитанс слоистой среды, который определяет высокочастотную асимптотику электромагнитного поля, возбуждаемого вертикальным магнитным диполем, расположенным на поверхности слоистой среды.

Для окончательного определения высокочастотной асимптотики полей необходимо определить эту асимптотику для адмитанса $Y_0(z)$. Легко показать, что при условии $\sigma(z)$ - непрерывная функция с ограниченной производной, адмитанс имеет асимптотику

$$Y_0(z) = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma(z)}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega\mu}}\right)\right). \tag{29}$$

Для доказательства введем функцию $X(z)$ такую, что $Y_0(z)=\sqrt{\omega\mu}X(z)$. Тогда для $X(z)$, согласно (28), получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\omega\mu}}\dfrac{dX}{dz}+X^2(z)=-i\sigma(z), \quad z\in(-H,0), \\ X(z=-H)=(1-i)\sqrt{\dfrac{\sigma_H}{2}}. \end{cases} \tag{30}$$

Уравнения в (20) является уравнением с малым параметром $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\omega\mu}}$ при старшей производной. Получение асимптотического представления решения такой задачи было исследовано в работе [7]. Согласно этой работе решение (30) представляется в виде

$$X(z)=\bar{x}(z)+O(\varepsilon),$$

где $\bar{x}(z)$ - решение задачи (20) при $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\omega\mu}}=0$, $\bar{x}^2=-i\sigma(z)$ при $z\in(-H,0)$.

Решение этого уравнения, согласованное с начальным условием является $\bar{x}(z)=(1-i)\sqrt{\dfrac{\sigma(z)}{2}}$. Тогда $Y_0(z)=(1-i)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma(z)}{2}}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\omega\mu}}\right)\right)$. Асимптотика (29) доказана.

Подставив асимптотику $Y_0(z=0)\to(1-i)\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma(0)}{2}}$ при $\omega\to\infty$ в выражения (26) и (27), получим асимптотику для полей:

$$E_x \to -\frac{3m_z}{2\pi l^4 \sigma \ \ 0} \quad \text{при} \ \ \omega \to \infty \tag{31}$$

$$H_z \to -\frac{9im_z}{2\pi l^5 \omega\mu\sigma \ \ 0} \quad \text{при} \ \ \omega \to \infty \tag{32}$$

Исследование обратной задачи

В работе Тихонова А.Н. [8] доказано, что разным распределениям электропроводности $\sigma^{\ 1} \ \ z \ \neq \sigma^{\ 2} \ \ z$ слоистой среды соответствуют разные адмитансы $Y_0^{\ 1} \ \ \omega \ \neq Y_0^{\ 2} \ \ \omega$. Так как высокочастотные асимптотики полей обратно пропорциональны адмитансу $Y_0 \ \ \omega$, то это означает, что разным распределениям $\sigma^{\ 1} \ \ z$ и $\sigma^{\ 2} \ \ z$ соответствуют разные частотные характеристики полей $E_x^{\ 1} \neq E_x^{\ 2}$, $H_z^{\ 1} \neq H_z^{\ 2}$. Из этого утверждения следует единственность решения обратной задачи частотного зондирования, т.к. заданной частотной характеристике поля E_x или H_z может соответствовать только единственное распределение электропроводности $\sigma \ \ z$.

При решении обратной задачи используется не само поле, а его нормированная величина, так называемое «кажущееся сопротивление». Рассмотрим случай однородного полупространства с электропроводностью σ. Тогда, согласно (31) и (32), из высокочастотной асимптотики полей легко определить удельное сопротивление $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ этого полупространства в виде:

$$\rho_E = \frac{2\pi l^4}{3m_z}\left|E_x\right|, \ \ \rho_H = \frac{2\pi l^5 \omega\mu}{9m_z}\left|H_z\right|. \tag{33}$$

Если по известной частотной зависимости полей, согласно (33), вычислить $\rho_E = \ \omega$ и $\rho_H = \ \omega$, то мы получим кажущиеся сопротивления среды по электрическому и магнитному полю. Оно определяет сопротивление однородного полупространства, при котором поля на данной частоте совпадают с полями на поверхности слоистой среды. Кажущееся сопротивление в зависимости от частоты качественно отражает изменение электропроводности с глубиной.

При решении обратной задачи мы должны найти такое распределение электропроводности $\sigma \ \ z$, которое при заданном источнике дает поле в зависимости от частоты совпадающее с измеренными полями. Кажущееся сопротивление может изменяться на несколько порядков. Изменение частоты также изменяется на несколько порядков. Поэтому целесообразно сравнивать логарифмы кажущего сопротивления в зависимости от логарифма частоты, т.е. невязку в обратной задаче определяем в виде:

$$|\Delta\rho| = \int_{\omega_0}^{\omega_m} \ln^2 \frac{\rho^c(\omega)}{\rho^e(\omega)} \frac{d\omega}{\omega}, \tag{34}$$

где $\rho^c(\omega)$ - вычисленное кажущееся сопротивление, $\rho^e(\omega)$ - измеренное кажущееся сопротивление, ω_0 - минимальная, а ω_m - максимальная частота, на которых измеряется поле.

При решении обратной задачи можно предварительно определить электропроводность нижнего полупространства $\sigma_н$. Она определяется из низкочастотной асимптотики поля.

Для этого необходимо определить асимптотику при $\omega \to 0$ адмитансной функции $Y(z)$, являющейся решением задачи (17). Представим $Y(z)$ в виде:

$$Y(z) = \lambda + X(z). \tag{35}$$

Тогда, согласно (17), имеем задачу для $X(z)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(z)}{dz} + 2\lambda X(z) + X^2(z) = -i\omega\mu\sigma(z), \quad z \in (-H, 0), \\ Y(z=-H) = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu\sigma_н} - \lambda. \end{cases} \tag{36}$$

Заметим, что при $\omega \to 0$ задача (36) превращается в задачу Коши для однородного уравнения и нулевым начальным условием. Следовательно, $X(z) \to 0$ при $\omega \to 0$.

При малых $X(z)$ можно пренебречь $X^2(z)$ в уравнении (36) и получаем линейную задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(z)}{dz} + 2\lambda X(z) = -i\omega\mu\sigma(z), \qquad z \in (-H, 0), \\ X(z=-H) = \eta_H - \lambda, \qquad \eta_H = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu\sigma_н}. \end{cases} \tag{37}$$

Решение этой задачи равно:

$$X(z) = (\eta_H - \lambda) e^{-2\lambda(H+z)} - i\omega\mu \int_{-H}^{H} \sigma(\xi) e^{-2\lambda(z-\xi)} d\xi,$$

откуда при $z = 0$, учитывая (35), находим при $\omega \to 0$ асимптотику

$$Y(z=0) = Y_0(\lambda) = \lambda + (\eta_H - \lambda) e^{-2\lambda H} - i\omega\mu \int_{-H}^{0} \sigma(\xi) e^{2\lambda\xi} d\xi. \tag{38}$$

Так как $\eta_H - \lambda \to -\dfrac{-i\omega\mu\sigma_H}{2\lambda}$ при $\omega \to 0$, получаем окончательно

$$Y(z=0,\lambda) = \lambda - i\omega\mu Q(\lambda) \quad \text{при } \omega \to 0, \tag{39}$$

$$\text{где } Q(\lambda) = \sigma_H \frac{e^{-2\lambda H}}{2\lambda} \int_{-H}^{0} \sigma(z) e^{2\lambda z} dz. \tag{40}$$

Подставив (39) в (18), найдем при $z_0 = 0$

$$U(z=0,\lambda) = \frac{2}{2\lambda - i\omega Q(\lambda)} \approx \frac{1}{\lambda} + \frac{i\omega\mu Q(\lambda)}{2\lambda^2}. \tag{41}$$

Зная $U(z=0,\lambda)$, согласно (10) и (11), найдем низкочастотную асимптотику полей:

$$E_x = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi l^2} + \frac{\omega^2\mu^2 m_z}{8\pi} \int_0^{\infty} J_1(\lambda l) Q(\lambda) d\lambda, \tag{42}$$

$$H_z = \frac{m_z}{4\pi l^3} + \frac{i\omega\mu m_z}{8\pi} \int_0^{\infty} J_0(\lambda l) Q(\lambda) \lambda d\lambda. \tag{43}$$

Подставив выражение для $Q(\lambda)$ (40) и используя известные интегралы:

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda l) e^{\lambda z} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{l^2 + z^2}} \quad \text{при } z \le 0,$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda l) e^{\lambda z} d\lambda = \frac{1}{l}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{l^2 + z^2}}\right) \quad \text{при } z \le 0,$$

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda l) \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{l}\left(z + \sqrt{l^2 + z^2}\right) \quad \text{при } z \le 0,$$

найдем низкочастотную асимптотику полей:

$$E_x = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi l^2} + \frac{\omega^2\mu^2 m_z}{8\pi}\left(\int_{-H}^{0} \sigma(z)\left(1 + \frac{z}{\sqrt{l^2 + 4z^2}}\right) dz - \sigma_H\left(H - \frac{\sqrt{l^2 + 4H^2}}{2}\right)\right), \tag{44}$$

$$H_z = \frac{m_z}{4\pi l^3} + \frac{i\omega\mu m_z}{16\pi}\left(\frac{\sigma_H}{\sqrt{l^2 + 4H^2}} - 4\int_{-H}^{0} \frac{\sigma(z) z}{\left(\sqrt{l^2 + 4z^2}\right)^3} dz\right). \tag{45}$$

При $l \gg H$ низкочастотная асимптотика полей упрощается и имеет вид:

$$E_x = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi l^2}\left(1 - \frac{i\omega\mu\sigma_H l^2}{4}\right), \; H_z = \frac{m_z}{4\pi l^3}\left(1 + \frac{i\omega\mu\sigma_H l^2}{4}\right).$$

Легко видеть, что в этом случае из низкочастотной асимптотики определяется электропроводность нижнего полупространства σ_H.

Методы решения обратной задачи

Основная проблема в обратных задачах связана с неустойчивостью её решения. В соответствии с теорией регуляризации неустойчивых задач [9] для получения устойчивого решения необходимо, чтобы оно принадлежало компактному классу функций. Обычно решение обратной задачи частотных электромагнитных зондирований рассматривается на множестве функций электропроводности $\sigma\ z$, принадлежащих кусочно-аналитическим функциям с конечным числом разрывов. Именно для этого класса функций $\sigma\ z$ доказана теорема единственности решения обратной задачи. В этом случае обратный оператор обратной задачи ограничен и при стремлении погрешности измерений поля к нулю приближенное решение обратной задачи будет стремиться к точному решению. Однако, если рассматриваемое компактное множество решений велико, то обратный оператор может иметь достаточно большую норму.

Это означает, что ошибка в решении обратной задачи много больше ошибки измерений поля, что неприемлемо. Необходимо согласовать разрешающую способность метода с детальностью получения решения [10]. Необходимо более существенно ограничить множество решений обратной задачи, т.е. уменьшить детальность решения и, соответственно, уменьшить погрешность решения из-за неточных данных. Этому подходу соответствует *метод минимального числа слоев* решения обратной задачи.

В данном методе в качестве компактного множества решений выбирается слоистая среда с кусочно-постоянным распределением электропроводности:

$$\sigma(z)=\sigma_n \text{ при } z\in[z_{n-1},z_n],\ n\in[1,N],\ z_0=0,\ z_N=H \tag{46}$$

Электропроводность подстилающего полупространства σ_H при $z>H$ считается известной из низкочастотной асимптотики поля. Таким образом компактное множество описывается $2N$ параметрами (σ_n,z_n), $n\in[1,N]$, по которым минимизируется невязка кажущегося сопротивления (34).

Решение находится в начале для двухслойной среды, затем для трехслойной и т.д., пока невязка кажущего сопротивления $|\Delta\rho|$ не станет сравнимой с погрешностью δ, с которой было определено ρ_k по измеренному полю. В результате получаем приближение $\sigma\ z$ в виде кусочно-постоянной функции с минимальным числом разрывов, которому соответствует поле, отличающееся от измеренного поля меньше чем на погрешность измерений. Данный метод позволяет достаточно быстро определить решение обратной задачи, т.к. обычно число слоев $n\le 6$.

Однако рассмотренный метод не подходит для случая градиентных сред, в которых хотя число разрывов электропроводности мало, но между разрывами электропроводность существенно изменяется по глубине. В этом случае целесообразно использовать компактное множество решений в виде кусочно-линейного распределения электропроводности:

$$\sigma(z) = \sigma_n + \sigma_n'(z - z_{n-1}) \text{ при } z \in [z_{n-1}, z_n],\ n \in [1, N],\ z_0 = 0,\ z_N = H \quad (47)$$

где z_n – глубины разрывов $\sigma(z)$, $\sigma_n = \sigma(z_n + 0)$, а σ_n' – средний градиент электропроводности в слое $z \in [z_{n-1}, z_n]$. Таким образом, множество решений обратной задачи определяется $3N$ параметрами $(\sigma_n, \sigma_n', z_n)$, $n \in [1, N]$. На этом компактном множестве решений реализуется метод минимального числа слоев.

Рассмотренный метод позволяет быстро решать обратную задачу частотного зондирования слоистых сред. Он легко переносится на различные обратные задачи, в которых одномерное распределение искомого параметра.

Литература

1. Дмитриев В.И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. Изд. МГУ, 1969, 131с.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Изд. Наука, 1973.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. -М.Макс-Пресс, 2009, 316с.
4. Тихонов А.Н., Шахсуваров Д.Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах. Изв.АН СССР, сер.геофиз.1956, №3, с.251-254.
5. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН, 1959, т.125, №5, с.982-985.
6. Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. М.Недра, 1992, 250с.
7. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Матем. сб., 1950, 27(69), с.147-156.
8. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований. ЖВМ и МФ, 1965, т.5, №3, с.545-547.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.-М.-Наука, 1979.
10. Дмитриев В.И. Обратные задачи геофизики. -М. Макс-Пресс, 2012, 340с.