В.И. Дмитриев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИОНОСФЕРЫ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ*

Геофизические методы электромагнитного зондирования верхних слоев Земли направлены на изучение строения земных недр и на поиск месторождений полезных ископаемых. Обычно зондирования проводятся при относительно небольших расстояниях между источником поля и точкой измерения поля. В среднем это расстояние не превышает величины 10 км. Однако, последнее время развиваются методы зондирования, использующие очень мощные источники поля, когда измерения можно проводить на расстояниях в несколько сотен километров. Это повышает эффективность геофизических работ, т.к. при фиксированном положении источника перемещается только аппаратура измерения. Такой подход особенно эффективен при морских исследованиях, т.к. источник электромагнитного поля может находиться на суше, а измерения проводятся в морских условиях.

При измерениях поля на небольших расстояниях влияние ионосферы на результаты наблюдений практически не сказывается. Однако при измерениях на расстояниях сравнимых с высотой ионосферы (80-100 км) влияние ионосферы на электромагнитное поле низкой частоты начинает сказываться, и пренебрежение этим влиянием может вносить погрешности в результаты интерпретации данных электромагнитных зондирований. В данной работе будет с помощью математического моделирования проведено исследование влияния ионосферы на электромагнитное зондирование.

В качестве модели строения среды, в которой проводится электромагнитное зондирование, рассматривается двуслойная Земля ($z<0$), которая отделена от ионосферы ($z>h$) атмосферой ($0<z<h$). Распределение электропроводности $\sigma(z)$ в такой модели задается в виде:

$$\sigma(z)=\begin{cases} \sigma_и \;\text{ при }\; z\in[n,\infty) \;\text{ (ионосфера)} \\ \sigma_0=0 \;\text{ при }\; z\in(0,H) \;\text{ (атмосфера)} \\ \sigma_1 \;\text{ при }\; z\in(-h_1,0) \;\text{ (наносы)} \\ \sigma_2 \;\text{ при }\; z\in(-h_1,-\infty) \;\text{ (основание).} \end{cases} \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 07-05-00523 и 09-05-12016 офи-м.

Будем считать, что электромагнитное поле возбуждается вертикальным магнитным диполем, расположенным на земной поверхности $(z=0)$ в начале координат. Учитывая осесимметричность электромагнитного поля вертикального магнитного диполя в слоистой среде, из уравнений Максвелла

$$rot\,\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E};\ \ rot\,\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \qquad (2)$$

получим для магнитной моды

$$H_r = \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_\varphi}{\partial z};\ \ H_z = -\frac{i}{\omega\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi);\ \ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma E_\varphi. \qquad (3)$$

Для E_φ в магнитооднородной среде ($(\mu = const)$ имеем уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right)\right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2(z)E_\varphi = 0,\ \ k^2 = i\omega\mu\sigma. \qquad (4)$$

На границах раздела сред при $z = h, 0, h_1$ должны выполняться условия непрерывно E_φ и $\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial z}$, а в бесконечности E_φ убывает.

Кроме того в начале координат, где находится вертикальный магнитный диполь, поле E_φ имеет особенность вида:

$$E_\varphi \to -\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ik_0R}}{R}\right) \ \text{при}\ \ R = \sqrt{r^2+z^2} \to 0, \qquad (5)$$

где m_z – магнитный момент диполя. Если учесть, что

$$\frac{e^{ik_0R}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\eta_0|z|}\frac{\lambda\,d\lambda}{\eta_0};\ \ \eta_0 = \sqrt{\lambda - k_0^2},$$

то условие в источнике примет вид

$$E_\varphi \to \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)e^{-\lambda|z|}\lambda\,d\lambda;\ \ \eta_0 = \lambda,\ k_0 = 0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (4) представимо в виде:

$$E_\varphi(r,z) = \frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)Z(z,\lambda)\lambda\,d\lambda, \qquad (7)$$

где функция $Z(z,\lambda)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \eta^2 Z = 0,\ \ \eta = \sqrt{\lambda^2 - k^{2(z)}}\ \ \mathrm{Re}\,\eta > 0. \qquad (8)$$

При $z=0$ функция $Z(z,\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$[Z]_{z=0} = 0;\ \ [Z']_{z=0} = -2\lambda, \qquad (9)$$

где квадратные скобки означают разрыв функции. При $z=h$ и $z=-h_1$ Z и Z' – непрерывны, а при $|z|\to\infty$ функция Z убывает.

Представим функцию $Z(z,\lambda)$ в виде:

$$Z(z,\lambda)=\begin{cases} a_0e^{-\eta(z-h)} & z\in[h,\infty) \\ a_1e^{-\lambda z}+b_1e^{-\lambda(h-z)} & z\in[0,h] \\ a_2e^{\eta_1 z}+b_2e^{-\eta_1(h_1+z)} & z\in[0,-h_1] \\ a_3e^{\eta_2(z+h_1)} & z\in[-h_1,-\infty). \end{cases} \tag{10}$$

Из условий непрерывности Z и Z' при $z=h$ имеем:

$$\begin{cases} a_0=a_1e^{-\lambda h}+b_1 \\ \eta_u a_0=\lambda(a_1e^{-\lambda_1 h}-b_1) \end{cases}$$

откуда находим

$$a_0=\frac{2\lambda a_1}{\lambda+\eta_u}e^{-\lambda h};\ b_1=\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}a_1e^{-\lambda h}. \tag{11}$$

Из условий непрерывности Z и Z' при $z=-h_1$ имеем:

$$\begin{cases} a_3=a_2e^{-\eta_1 h_1}+b_2 \\ \eta_2 a_3=\eta_1(a_2e^{-\eta_1 h_1}-b_2) \end{cases}$$

откуда находим

$$a_3=\frac{2\eta_1 a_2}{\eta_1+\eta_2}e^{-\eta_1 h_1};\ b_2=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}a_2e^{-\eta_1 h_1}. \tag{12}$$

Подставив (11) и (12) в (10), найдем

$$Z(z,\lambda)=a_1\left(e^{-\lambda z}+\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}e^{-\lambda(2h-z)}\right),\ z\in[0,h]. \tag{13}$$

$$Z(z,\lambda)=a_2\left(e^{\eta_1 z}+\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}e^{-\eta_1(2h_1+z)}\right),\ z\in[0,-h_1]. \tag{14}$$

Для определения констант a_1 и a_2 подставим (13-14) в условия (9) при $z=0$. Тогда

$$a_1\left(1+\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}e^{-2\lambda h}\right)-a_2\left(1+\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}e^{-2\eta_1 h_1}\right)=0,$$

$$\lambda a_1\left(1-\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}e^{-2\lambda h}\right)+\eta_1 a_2\left(1-\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}e^{-2\eta_1 h_1}\right)=2\lambda.$$

Из полученной системы находим

$$a_1=\frac{2\lambda(1+\beta)}{\lambda(1-\alpha)(1+\beta)+\eta_1(1+\alpha)(1-\beta)};\;\; a_2=\frac{2\lambda(1+\alpha)}{\lambda(1-\alpha)(1+\beta)+\eta_1(1+\alpha)(1-\beta)},\quad(15)$$

где

$$\alpha=\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}e^{-2\lambda h};\;\; \beta=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}e^{-2\eta_1 h_1}. \quad (16)$$

Нас интересует поле, измеряемое на земной поверхности, согласно (7), равное:

$$E_\varphi(r,z=0)=\frac{i\omega\mu m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)Z(z=0,\lambda)\lambda\,d\lambda, \quad (17)$$

где, согласно (13)

$$Z(z=0,\lambda)=a_1(\lambda)(1+\alpha(\lambda)). \quad (18)$$

Магнитные поля на земной поверхности, согласно (3), равны

$$H_r=\frac{m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{dZ(z=0,\lambda)}{dz}\lambda\,d\lambda, \quad (19)$$

$$H_z=\frac{m_z}{4\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)Z(z=0,\lambda)\lambda^2\,d\lambda, \quad (20)$$

где

$$\frac{dZ(z=0,\lambda)}{dz}=-\lambda a_1(\lambda)(1-\alpha(\lambda)). \quad (21)$$

Подставив в (17) и (19-20) значения $Z(z=0,\lambda)$, получим, окончательно

$$E_\varphi=\frac{i\omega\mu m_z}{2\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{Q}\lambda^2\,d\lambda, \quad (22)$$

$$H_r=\frac{m_z}{2\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{Q}\lambda^3\,d\lambda, \quad (23)$$

$$H_z = \frac{m_z}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{Q}\lambda^3\,d\lambda\,, \tag{24}$$

где

$$Q = \lambda(1-\alpha)(1+\beta) + \eta_1(1+\alpha)(1-\beta)\,. \tag{25}$$

Параметры $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ определяются (16).

Интегралы в (22-24) понимаются в смысле главного значения:

$$\int_0^\infty J_{0,1}(\lambda r)\varphi(\lambda)\,d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty J_{0,1}(\lambda r)e^{-\varepsilon\lambda}\varphi(\lambda)\,d\lambda\,.$$

Данное определение имеет простой физический смысл: ε – высота положения точки наблюдения поля, которое непрерывно при $\varepsilon\to 0$.

Влияние ионосферы сказывается на больших расстояниях от источника поля. Поэтому это влияние можно оценить, используя асимптотику полей в дальней зоне. В работе [1] выведены асимптотики для интегралов Бесселя в виде:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\lambda r)F(\lambda)\lambda\,d\lambda = -\frac{F'(0)}{r^3} + \frac{3F'''(0)}{2r^5} + O\left(1/r^7\right)\\
&\int_0^\infty J_1(\lambda r)F(\lambda)\lambda\,d\lambda = \frac{F(0)}{r^2} - \frac{3F''(0)}{2r^4} + O\left(1/r^6\right)
\end{aligned}, \tag{26}$$

Прежде чем вычислить асимптотики полей, необходимо выделить в подынтегральных функциях (22-24) часть, связанную с влиянием ионосферы. Если пренебречь влиянием ионосферы, то в (22-24) мы должны положить $\alpha = 0$. Тогда

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{1+\beta}{Q_0(\lambda)}\lambda^2\,d\lambda, \tag{27}$$

$$H_r = \frac{m_z}{2\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{1+\beta}{Q_0(\lambda)}\lambda^3\,d\lambda\,, \tag{28}$$

$$H_z = \frac{m_z}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{1+\beta}{Q_0(\lambda)}\lambda^3\,d\lambda\,, \tag{29}$$

где

$$Q_0(\lambda) = \lambda(1+\beta) + \eta_1(1-\beta)\,. \tag{30}$$

Интегралы в (27-29) также понимаются в смысле главного значения. Их легко можно преобразовать, заменив подынтегральную функцию

$$\frac{1+\beta}{Q_0(\lambda)}=\frac{1}{\lambda+\eta}+\frac{2\beta\eta}{(\lambda+\eta_1)Q_0(\lambda)}.$$

Подставив это выражение в (27-29), получим:

$$E_\varphi=\frac{i\omega\mu m_z}{2\pi}\left(I_1(r)+2\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\beta\eta\lambda^2\,d\lambda}{(\lambda+\eta_1)Q_0(\lambda)}\right), \tag{27a}$$

$$H_r=\frac{m_z}{2\pi}\left(I_2(r)+2\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\beta\eta\lambda^3\,d\lambda}{(\lambda+\eta_1)Q_0(\lambda)}\right), \tag{28a}$$

$$H_z=\frac{m_z}{2\pi}\left(I_3(r)+2\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\beta\eta\lambda^3\,d\lambda}{(\lambda+\eta_1)Q_0(\lambda)}\right), \tag{29a}$$

где

$$I_1(r)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\lambda^2\,d\lambda}{(\lambda+\eta_1)}=\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{2k_1^2 r}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{(\lambda-\eta_1)^2(\eta-2\lambda)}{\eta}d\lambda,$$

$$I_2(r)=\int_0^\infty J_1(\lambda r)\frac{\lambda^3\,d\lambda}{\lambda+\eta_1}=-\frac{1}{k_1^2 r}\int_0^\infty J_0(\lambda r)(\lambda-\eta_1)^3\frac{\lambda\,d\lambda}{\eta},$$

$$I_3(r)=\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\lambda^3\,d\lambda}{\lambda+\eta_1}=-\frac{1}{2r^3}+\frac{k_1^2}{8r}+\frac{1}{2k_1^2}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\left((\lambda-\eta_1)^2\lambda^2-\frac{k_1^4}{4}\right)d\lambda.$$

Полученные интегралы легко вычисляются, т.к. подынтегральные функции убывают на бесконечности.

Используя (26), легко получить асимптотику полей без влияния ионосферы:

$$E_\varphi=\frac{i\omega\mu m_z}{2\pi}\cdot\frac{3}{k_1^2 r^4}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2 \tag{31}$$

$$H_r=\frac{m_z}{2\pi}\cdot\frac{3}{ik_1 r^4}\left(\frac{1+p}{1-p}\right), \tag{32}$$

$$H_z=-\frac{m_z}{2\pi}\cdot\frac{9}{k_1^2 r^5}\left(\frac{1+p}{1-p}\right)^2, \tag{33}$$

где

$$p=\beta(0)=\frac{\sqrt{\sigma_1}-\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\exp\left(i2k_1h_1\right). \tag{34}$$

Рассмотрим теперь поправку к полям за счет влияния ионосферы:

$$\Delta E_\varphi=\frac{i\omega\mu m_z}{\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\exp(-2\lambda h)\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}\frac{\left(1+\beta(\lambda)\right)^2\lambda^3\,d\lambda}{Q(\lambda)Q_0(\lambda)}, \tag{35}$$

$$\Delta H_r=\frac{m_z}{\pi}\int_0^\infty J_1(\lambda r)\exp(-2\lambda h)\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}\frac{\left(1-\beta^2(\lambda)\right)\eta_1\lambda^3\,d\lambda}{Q(\lambda)Q_0(\lambda)}, \tag{36}$$

$$\Delta H_z=\frac{m_z}{\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\exp(-2\lambda h)\frac{\lambda-\eta_u}{\lambda+\eta_u}\frac{\left(1+\beta(\lambda)\right)^2\lambda^4\,d\lambda}{Q(\lambda)Q_0(\lambda)}. \tag{37}$$

Заметим, что $Q(\lambda)=0$ при $\lambda=0$. Поэтому нам необходимо определить

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{Q(\lambda)}=\frac{1}{Q'(\lambda=0)}=\frac{1}{2q}, \tag{38}$$

где

$$q=(1+p)+(1-p)\left(\frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_u}}-ik_1h\right). \tag{39}$$

Взяв подынтегральные функции в (35-37) в точке $\lambda=0$ и учитывая, что

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r)\exp(-2\lambda h)\lambda^2\,d\lambda=\frac{6rh}{\left(r^2+4h^2\right)^{5/2}},$$

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\exp(-2\lambda h)\lambda^3\,d\lambda=\frac{6h\left(8h^2-3r^2\right)}{\left(r^2+4h^2\right)^{7/2}},$$

получим

$$\Delta E_\varphi=\frac{i\omega\mu m_z}{2\pi}\cdot\frac{\left(1+p\right)^2}{ik_1(1-p)q}\cdot\frac{6rh}{\left(r^2+4h^2\right)^{5/2}}, \tag{40}$$

$$\Delta H_r = -\frac{m_z}{2\pi}\cdot\frac{1+p}{q}\cdot\frac{6rh}{\left(r^2+4h^2\right)^{5/2}}, \tag{41}$$

$$\Delta H_z = \frac{m_z}{2\pi}\cdot\frac{(1+p)^2}{ik_1(1-p)q}\cdot\frac{6h\left(8h^2-3r^2\right)}{\left(r^2+4h^2\right)^{7/2}}. \tag{42}$$

Сложив асимптотики полей без влияния ионосферы (31-33) и поправок из-за влияния ионосферы (40-42), получим асимптотики полных полей:

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu m_z}{2\pi}\cdot\frac{3}{k_1^2 r^4}\frac{(1+p)^2}{(1-p)^2}\cdot\left(1-i\frac{(1-p)}{q}\cdot\frac{2k_1 h}{\left(1+4h^2/r^2\right)^{5/2}}\right), \tag{43}$$

$$H_r = \frac{m_z}{2\pi}\cdot\frac{3}{k_1 r^4}\cdot\frac{1+p}{1-p}\cdot\left(1-\frac{i(1-p)}{q}\cdot\frac{2k_1 h}{\left(1+4h^2/r^2\right)^{5/2}}\right), \tag{44}$$

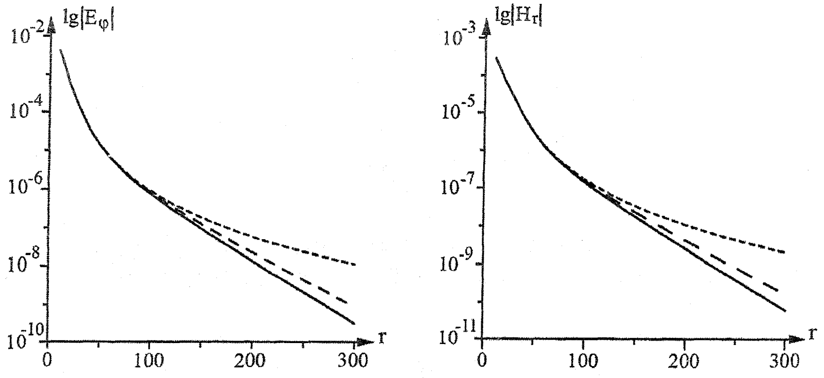
$$H_z = -\frac{m_z}{2\pi}\cdot\frac{9}{k_1^2 r^5}\cdot\frac{(1+p)^2}{(1-p)^2}\cdot\left(1+\frac{i(1-p)}{q}\cdot\frac{2k_1 h\left(8h^2-3r^2\right)}{3\left(1+4h^2/r^2\right)^{5/2}\left(r^2+4h^2\right)}\right). \tag{45}$$

Легко видеть, что при $r<h$ влияние ионосферы практически отсутствует. Влияние ионосферы на электромагнитное поле начинает сказываться при $r>2h$. Интересно отметить, что отношение тангенциальных компонент поля

$$\frac{E_\varphi}{H_r} = -\frac{\omega\mu}{k_1}\cdot\frac{1+p}{1-p} \quad \text{при} \quad |k_1| \gg 1 \tag{46}$$

не зависит от влияния ионосферы на любых расстояниях. На больших расстояниях это отношение дает импеданс слоистой среды. Поэтому для электромагнитного зондирования целесообразно измерять отношения тангенциальных составляющих полей.

Сформулированные результаты по влиянию ионосферы на электромагнитные зондирования получены на основе анализа асимптотик полей. Эти результаты подтверждаются и расчетами полей по формулам (23-24).



а) б)

Рис. 1

Изменение тангенциальных составляющих электромагнитного поля в зависимости от расстояния

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_1}=1; \qquad \frac{\sigma_u}{\sigma_1}=0{,}1; \qquad \frac{\sigma_u}{\sigma_1}=0{,}0001.$$

На рис. 1 приведены поля E_φ и H_r в зависимости от расстояния до источника при разной электропроводности ионосферы, причем

$$\sigma_1=1,\ h_1=1,\ \sigma_2=2,\ h=80км,\ \Lambda_1=\frac{2\pi}{\operatorname{Re}k_1}=64.$$

При $\frac{\sigma_u}{\sigma_1}=0{,}0001$ ионосфера практически не влияет на поле. При электропроводности ионосферы близкой к электропроводности Земли влияние ионосферы существенно и оно сказывается при $r>150км$ при $h=80км$. Кривые $|E_\varphi|$ и $|H_r|$ подобны, поэтому их отношение не зависит от ионосферы (см. рис.2). На рис. 2 кривые для разной электропроводности ионосферы слились в единую кривую.

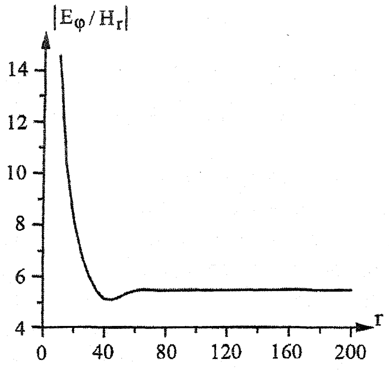


Рис. 2

Из рис. 1 видно, что влияние ионосферы приводит к более быстрому убыванию поля. На расстоянии в 300 км влияние ионосферы приводит к убыванию поля в 30 раз. Поэтому влияние ионосферы ограничивает область, где возможно проведение электромагнитных зондирований.

Литература

1. Тихонов А.Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН 125, N 5, 982-985.