В.И. Дмитриев, И.В. Егоров

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОТЯЖЕННЫЕ ПРОВОДНИКИ*

Введение

В работах [1,2] было рассмотрено математическое моделирование теллурических токов, возникающих в протяженных полых цилиндрических металлических проводниках, окруженных тонким слоем диэлектрика, расположенных в проводящей земле. Важность изучения таких токов очевидна и была отмечена в предыдущих исследованиях. Следует отметить, что помимо естественных электромагнитных полей, являющихся источником постоянно текущих теллурических токов и воздействующих на рассматриваемые объекты, имеются источники техногенного характера. Типичным случаем такого источника является какая-либо из высоковольтных линий электропередач переменного тока. При этом в качестве рассматриваемого проводника может быть металлический трубопровод, погруженный на небольшой глубине в землю. Если в случае естественных полей, индукцией Фарадея можно пренебречь в подавляющем множестве случаев вариаций геомагнитного поля, как было показано в [2], то в случае такого искусственного источника именно электромагнитная индукция имеет основное значение. Методы расчета электромагнитного поля для цилиндрических пустотелых проводников и влияние теллурических токов искусственного происхождения на подземные трубопроводы, рассмотренные как прямолинейные бесконечно протяженные проводники, впервые были построены в работе [3].Рассмотрению одного из подобных возможных численных методов решения этой проблемы, основанного на применении аппарата интегральных уравнений, посвящена данная работа.

Особенности модели

Рассмотрим модель электропроводности среды, состоящую из двух однородных полупространств, где верхнее – соответствует воздуху, а нижнее – земле (рис. 1). Возьмем в качестве источника поля линейный

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-05-65022).

ток величиной I, ориентированный вдоль оси Oy на высоте z_0 над поверхностью земли (при z=0). , т.е. будем считать ток гармонически меняющимся по времени по закону $e^{-i\omega t}$ с частотой 50 гц, что соответствует реальной ситуации для линий электропередач. На некоторой глубине $z=-h$ поместим бесконечно протяженный полый металлический цилиндр (h – расстояние до оси цилиндра), расположив его ось вдоль оси Ox. Обозначим d_m, d_d, D_m – толщину металла, толщину диэлектрика снаружи, и диаметр металлической оболочки соответственно.

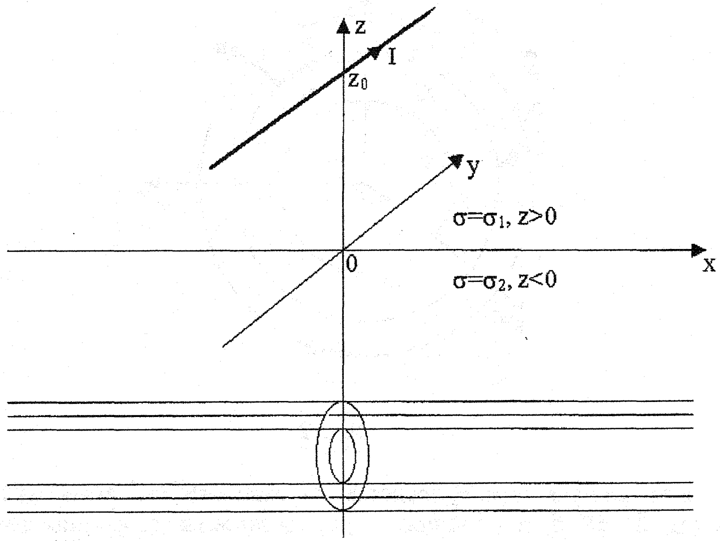

Рис.1

Электромагнитное поле в данной модели описывается уравнениями Максвелла в виде

$$\begin{aligned} rot\ \mathbf{H} &= \hat{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \\ rot\ \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{j}^e = \{0, j_y^e, 0\}$, $j_y^e = I\delta(x)\delta(z - z_0)$, $\delta(\xi)$ – δ-функция Дирака, $\hat{\sigma} = \sigma - i\omega\varepsilon$, I – величина заданного линейного тока.

Рассмотрим новую систему координат $x'=y$, $y'=z+h$, $z'=x$. Тогда начало координат новой системы будет находиться на оси цилиндра (рис. 2) и в этой ситуации удобно ввести цилиндрические координаты

$x'=\rho\cos\varphi$, $y'=\rho\sin\varphi$, $z'=z$, $\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

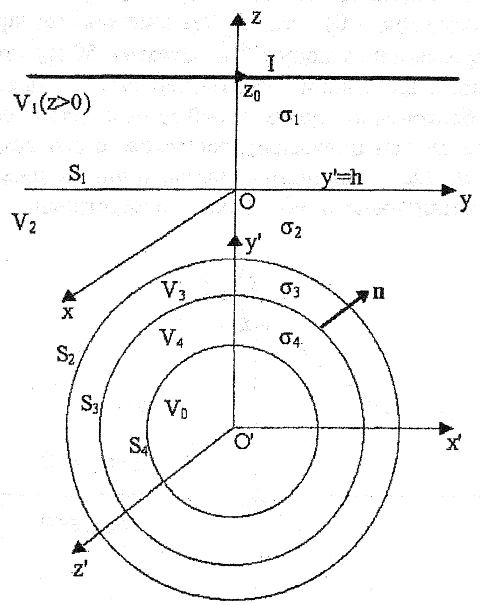

Рис. 2

Полные поля **E** и **H** представим в виде **E=E^e+E^a, H=H^e+H^a. При** этом под **E^e, H^e** будем понимать поля, создаваемые сторонним током I в среде, состоящей из двух полупространств V_1 и V_2, считая $\sigma=\sigma_2$ в V_3, V_4 и V_0. Тогда **E^a, H^a** аномальные части поля, создаваемые возмущением от неоднородности – бесконечно протяженного цилиндрического проводника в нижнем полупространстве. Таким образом, имеем всюду

$$\begin{aligned} &rot\ \ \mathbf{H}^e = \hat{\sigma}_j \mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \\ &rot\ \ \mathbf{E}^e = i\omega\mu\mathbf{H}^e. \end{aligned} \tag{2}$$

В области вне $V_3 \cup V_4 \cup V_0 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

$$\begin{aligned} &rot\ \ \mathbf{H}^a = \hat{\sigma}\mathbf{E}^a, \\ &rot\ \ \mathbf{E}^a = i\omega\mu\mathbf{H}^a, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\sigma=\sigma_j+\sigma_a$, $\sigma_j = \{\sigma_1$ в V_1, σ_2 в $V_2\}$. Причем полагаем $\mu=\mu_0$ (магнитная проницаемость вакуума) в V_1, V_2 и V_3; в V_4 $\mu=\mu_m$ (магнитная проницаемость металла); пренебрегаем токами смещения в V_2 и V_3.

Нетрудно показать, что решение системы (2) сводится к решению уравнения для скалярной функции $u(x,z)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2 u=-i\omega\mu I\delta(\mathrm{x})\delta(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0).$$

Причем,

$$E^e_x=E^e_x=0,\quad E^e_y=u(x,y),\quad H^e_x=-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial u}{\partial z},\quad H^e_x=0,\quad H^e_z=\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Полагаем $\mathrm{Im}(k)>0$, тогда фундаментальным решением уравнения (2), убывающим на бесконечности при $|kR|\to\infty$ $\left(R=\sqrt{x^2+(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^2}\right)$ является функция

$$-\frac{I\omega\mu}{4}H_0^{(1)}(kR),$$

где $H_0^{(1)}(\chi)$ функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Поэтому решение уравнения (2) в рассматриваемой модели среды в отсутствии неоднородности в нижнем полупространстве (земля), т.е. – бесконечно протяженного цилиндрического проводника, окруженного тонким слоем диэлектрика, можно представить в виде

$$u_1=-\frac{I\omega\mu}{4}H_0^{(1)}(kR)+\int\limits_0^\infty C_1(\lambda)\mathrm{e}^{-(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)\sqrt{\lambda^2-k_1^2}}\cos\lambda\mathrm{x}\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{при } \mathrm{z}>0,$$

$$u_2=\int\limits_0^\infty C_2(\lambda)\mathrm{e}^{(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\cos\lambda\mathrm{x}\,\mathrm{d}\lambda \quad \text{при } \mathrm{z}<0.$$

Используя представление функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(kR)=\frac{2}{i\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-|\mathrm{z}-\mathrm{z}_0|\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}}{\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}\cos\lambda\mathrm{x}\,\mathrm{d}\lambda,$$

и граничные условия при z=0

$$u_1=u_2,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n},$$

нетрудно найти $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$. Таким образом, в нижнем полупространстве получаем, в новых координатах x', y', z'

$$E^e_{x'} = \frac{i\omega\mu I}{\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int\limits_0^\infty e^{(y' - h)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - z_0\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \cos\lambda z' \, d\lambda,$$

$$H^e_{z'} = -\frac{I}{\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int\limits_0^\infty e^{(y' - h)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - z_0\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \times$$

$$\times \cos\lambda z' \, d\lambda,$$

$$H^e_{y'} = -\frac{I}{\pi(k_2^2 - k_1^2)} \int\limits_0^\infty e^{(y' - h)\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - z_0\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda (\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}) \sin\lambda z' \, d\lambda,$$

и в цилиндрических координатах ρ, φ, z ($x'=\rho\cos\varphi$, $y'=\rho\sin\varphi$, $\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$) имеем

$$E^e_\varphi = -E^e_{x'} \sin\varphi, \quad E^e_{z'} = 0, \quad H^e_\varphi = H^e_{y'} \cos\varphi \ .$$

В следующем разделе будут получены интегральные уравнения, описывающие поведение касательных компонент поля на поверхности S_2, т.е. на внешней поверхности диэлектрика (рис. 2). Для вывода их будет использована следующая особенность рассматриваемой задачи, обусловленная явлением скин-эффекта в металлической стенке цилиндра.

Будем полагать, что диаметр D_m превышает 1 м, а толщина d_m составляет 1-1.5 см. Толщину диэлектрика d_d считаем на порядок меньшей, чем d_m . Известно, что магнитная проницаемость стали составляет $200\mu_0$. Считая рассматриваемый металлический проводник стальным и учитывая указанную выше частоту 50 гц, получаем для верхней оценки толщины скин-слоя

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma_4}} \approx 1.6 \quad \text{мм}.$$

Это означает, что на протяжении толщины металла возбуждаемое поле практически затухает до нуля при приближении к внутренней поверхности S_4 металлической стенки. Таким образом, обоснованно использовать в качестве граничных условий на поверхности металла S_3 импедансные условия Леонтовича

$$\mathbf{E}^m \times \mathbf{n} = Z(\mathbf{H}^m \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S_3 (рис.2), $\mathbf{E}^m$, $\mathbf{H}^m$ значения поля на S_3 (в металле), импеданс $Z = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_4}{i\sigma_4}} = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_4}{2\sigma_4}}(1 - i)$.

В координатах φ, z' эти условия имеют вид

$$E^m_{z'} = -ZH^m_{\varphi}, \quad E^m_{\varphi} = ZH^m_{z'} \, . \tag{4}$$

Метод численного моделирования

Для вывода интегральных уравнений на наружной поверхности диэлектрического слоя получим приближенные граничные условия на основе импедансных условий (4). Для этого запишем систему (1) в области V_3 в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{z'}}{\partial\varphi} - \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial z'} = \sigma E_{\rho}, && \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z'}}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z'} = i\omega\mu H_{\rho},\\
&\frac{\partial H_{\rho}}{\partial z'} - \frac{\partial H_{z'}}{\partial\rho} = \sigma E_{\varphi}, && \frac{\partial E_{\rho}}{\partial z'} - \frac{\partial E_{z'}}{\partial\varphi} = i\omega\mu H_{\varphi},\\
&\frac{1}{\rho}H_{\varphi} + \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{\rho}}{\partial\varphi} = \sigma E_{z'}, && \frac{1}{\rho}E_{\varphi} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\rho}}{\partial\varphi} = i\omega\mu H_{z'}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Используя второе уравнение системы (5), исключим компоненту H_ρ из третьего и пятого уравнений. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z'}}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z'}\right) - i\omega\mu\frac{\partial H_{z'}}{\partial\rho} = k_3^2 E_{\varphi},\\
&\frac{i\omega\mu}{\rho}H_{\varphi} + i\omega\mu\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{z'}}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z'}\right) = k_3^2 E_{z'} \, ,.
\end{aligned} \tag{6}$$

где $k_3^2 = i\omega\mu\sigma_3$.

Обозначим E^d_{φ}, $E^d_{z'}$, H^d_{φ}, $H^d_{z'}$ значения компонент поля на внешней границе диэлектрика, т.е. – на S_2. Учитывая малость электропроводности и толщины слоя диэлектрика, в пределах него будем полагать $\partial H_\varphi/\partial\rho$, $\partial H_{z'}/\partial\rho \to 0$. Тогда из (6) имеем на границах S_2 и S_3 следующие приближенные равенства

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho_d}\frac{\partial^2 E^d_{z'}}{\partial\varphi\partial z'}-\frac{\partial^2 E^d_\varphi}{\partial z'^2}-k_3^2E^d_\varphi=\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial^2 E^m_{z'}}{\partial\varphi\partial z'}-\frac{\partial^2 E^m_\varphi}{\partial z'^2}-k_3^2E^m_\varphi\;,\\ \frac{1}{\rho_d^2}\frac{\partial^2 E^d_{z'}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho_d}\frac{\partial^2 E^d_\varphi}{\partial\varphi\partial z'}+k_3^2E^d_{z'}=\frac{1}{\rho_m^2}\frac{\partial^2 E^m_{z'}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial^2 E^m_\varphi}{\partial\varphi\partial z'}+k_3^2E^m_{z'}.\end{gathered}\tag{7}$$

Из (7) и (4) получаем граничные условия

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho_d}\frac{\partial^2 E^d_{z'}}{\partial\varphi\partial z'}-\frac{\partial^2 E^d_\varphi}{\partial z'^2}-k_3^2E^d_\varphi=-Z\left(\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial^2 H^m_\varphi}{\partial\varphi\partial z'}+\frac{\partial^2 H^m_{z'}}{\partial z'^2}+k_3^2H^m_{z'}\right),\\ \frac{1}{\rho_d^2}\frac{\partial^2 E^d_{z'}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho_d}\frac{\partial^2 E^d_\varphi}{\partial\varphi\partial z'}+k_3^2E^d_{z'}=-Z\left(\frac{1}{\rho_m^2}\frac{\partial^2 H^m_\varphi}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial^2 H^m_{z'}}{\partial\varphi\partial z'}+k_3^2H^m_\varphi\right).\end{gathered}\tag{8}$$

Пренебрегая зависимостью по φ, в качестве искомых приближенных граничных условий, из (8) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 E^d_\varphi}{\partial z'^2}+k_3^2E^d_\varphi=Z\left(\frac{\partial^2 H^d_{z'}}{\partial z'^2}+k_3^2H^d_{z'}\right),\\ E^d_{z'}=-ZH^d_\varphi.\end{gathered}\tag{9}$$

Очевидно характер рассматриваемой модели позволяет уменьшить количество измерений задачи вычисления компонент электромагнитного поля на единицу с помощью одномерного преобразования Фурье по координате z' :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\cdot)e^{i\zeta z'}dz'.\tag{10}$$

Применим преобразование (10) к условиям (9), компонентам стороннего поля и системе (3). Значком '~' сверху будем обозначать образ Фурье соответствующей функции.

Условия (9) для образов Фурье касательных компонент имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde{E}^d_\varphi=Z\tilde{H}^d_{z'},\\ \tilde{E}^d_{z'}=-Z\tilde{H}^d_\varphi,\end{gathered}\tag{11}$$

т.е. совпадают с обычными импедансными условиями, но не на проводнике, а на диэлектрике, в данном случае.

Из следующих равенств [4]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta z'} \cos\lambda z' dz' = \pi\left[\delta(\zeta+\lambda)+\delta(\zeta-\lambda)\right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta z'} \sin\lambda z' dz' = -i\pi\left[\delta(\zeta+\lambda)-\delta(\zeta-\lambda)\right]$$

получаем для образов компонент стороннего поля

$$\tilde{E}^e_{x'} = \frac{2i\omega\mu I}{k_2^2-k_1^2} \mathrm{e}^{(y'-h)\sqrt{\zeta^2-k_2^2} - z_0\sqrt{\zeta^2-k_1^2}} (\sqrt{\zeta^2-k_1^2} - \sqrt{\zeta^2-k_2^2}),$$

$$\tilde{H}^e_{z'} = -\frac{2I}{k_2^2-k_1^2} \mathrm{e}^{(y'-h)\sqrt{\zeta^2-k_2^2} - z_0\sqrt{\zeta^2-k_1^2}} \sqrt{\zeta^2-k_2^2}(\sqrt{\zeta^2-k_1^2} - \sqrt{\zeta^2-k_2^2}),$$

$$\tilde{H}^e_{y'} = -\frac{2iI}{k_2^2-k_1^2} \mathrm{e}^{(y'-h)\sqrt{\zeta^2-k_2^2} - z_0\sqrt{\zeta^2-k_1^2}} \zeta(\sqrt{\zeta^2-k_1^2} - \sqrt{\zeta^2-k_2^2}).$$

Поскольку в (11) имеются в виду полные поля, для касательных компонент аномального поля на поверхности S_2, для которых далее будут выведены интегральные уравнения, получаем граничные условия

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^{ad}_{\varphi} + \tilde{E}^{ed}_{\varphi} = Z\tilde{H}^{ad}_{z'} + Z\tilde{H}^{ed}_{z'}, \\ &\tilde{E}^{ad}_{z'} = -Z\tilde{H}^{ad}_{\varphi} - Z\tilde{H}^{ed}_{\varphi}. \end{aligned} \tag{12}$$

Система уравнений (3) для образов компонент аномального поля будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{H}^a_{z'}}{\partial\varphi} + i\zeta\tilde{H}^a_{\varphi} = \sigma\tilde{E}^a_{\rho}, && \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{E}^a_{z'}}{\partial\varphi} + i\zeta\tilde{E}^a_{\varphi} = i\omega\mu\tilde{H}^a_{\rho}, \\ &-i\zeta\tilde{H}^a_{\rho} - \frac{\partial \tilde{H}^a_{z'}}{\partial\rho} = \sigma\tilde{E}^a_{\varphi}, && -i\zeta\tilde{E}^a_{\rho} - \frac{\partial \tilde{E}^a_{z'}}{\partial\varphi} = i\omega\mu\tilde{H}^a_{\varphi}, \\ &\frac{1}{\rho}\tilde{H}^a_{\varphi} + \frac{\partial \tilde{H}^a_{\varphi}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{H}^a_{\rho}}{\partial\varphi} = \sigma\tilde{E}^a_{z'}, && \frac{1}{\rho}\tilde{E}_{\varphi} + \frac{\partial \tilde{E}_{\varphi}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{E}_{\rho}}{\partial\varphi} = i\omega\mu\tilde{H}^a_{z'}. \end{aligned} \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что решение системы (13) можно представить в следующей форме

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^a_\rho = \tilde{E}^{(1)}_\rho + \tilde{E}^{(2)}_\rho, \qquad \tilde{H}^a_\rho = \tilde{H}^{(1)}_\rho + \tilde{H}^{(2)}_\rho, \\ &\tilde{E}^a_\varphi = \tilde{E}^{(1)}_\varphi + \tilde{E}^{(2)}_\varphi, \qquad \tilde{H}^a_\varphi = \tilde{H}^{(1)}_\varphi + \tilde{H}^{(2)}_\varphi, \\ &\tilde{E}^a_{z'} = \tilde{E}^{(1)}_{z'} + \tilde{E}^{(2)}_{z'}, \qquad \tilde{H}^a_{z'} = \tilde{H}^{(1)}_{z'} + \tilde{H}^{(2)}_{z'}, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^{(1)}_\rho = \frac{i\omega\mu}{\rho(k^2-\zeta^2)}\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\varphi}, \qquad \tilde{E}^{(2)}_\rho = -\frac{i\zeta}{k^2-\zeta^2}\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\rho}, \\ &\tilde{E}^{(1)}_\varphi = -\frac{i\omega\mu}{k^2-\zeta^2}\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\rho}, \qquad \tilde{E}^{(2)}_\varphi = -\frac{i\zeta}{\rho(k^2-\zeta^2)}\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\varphi}, \\ &\tilde{E}^{(1)}_{z'} = 0, \\ &\tilde{H}^{(1)}_\rho = -\frac{i\zeta}{k^2-\zeta^2}\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\rho}, \qquad \tilde{H}^{(2)}_\rho = \frac{\sigma}{\rho(k^2-\zeta^2)}\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\varphi}, \\ &\tilde{H}^{(1)}_\varphi = -\frac{i\zeta}{\rho(k^2-\zeta^2)}\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\varphi}, \qquad \tilde{H}^{(2)}_\varphi = -\frac{\sigma}{k^2-\zeta^2}\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\rho} \\ &\tilde{H}^{(2)}_{z'} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (12,14,15) следует, что решение системы (13) выражается через две скалярные функции $\tilde{H}^{(1)}_{z'}$ и $\tilde{E}^{(2)}_{z'}$, которые удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям, соответственно

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial}\left(\rho\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\varphi^2} + (k^2-\zeta^2)\tilde{H}^{(1)}_{z'} = 0, \tag{16}$$

$$Z\tilde{H}^{(1)}_{z'} + \frac{i\omega\mu}{k^2-\zeta^2}\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\rho} = F_1 \text{ на } \Gamma \tag{17}$$

и

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial}\left(\rho\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\varphi^2} + (k^2-\zeta^2)\tilde{E}^{(2)}_{z'} = 0, \tag{18}$$

$$\tilde{E}^{(2)}_{z'} - \frac{Z\sigma}{k^2-\zeta^2}\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\rho} = F_2 \text{ на } \Gamma, \tag{19}$$

где Г – контур вертикального сечения поверхности S_2, т.е. окружность радиуса ρ_2.,

и на Г

$$F_1 = \tilde{E}^{(2)}_{\varphi} + \tilde{E}^{e}_{\varphi} - Z\tilde{H}^{e}_{z'} = -\frac{i\zeta}{\rho(k^2-\zeta^2)}\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}}{\partial\varphi} + \tilde{E}^{e}_{\varphi} - Z\tilde{H}^{e}_{z'},$$

$$F_2 = -Z\tilde{H}^{(1)}_{\varphi} - Z\tilde{H}^{e}_{\varphi} = \frac{i\zeta \;\; Z}{\rho(k^2-\zeta^2)}\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}}{\partial\varphi} - Z\tilde{H}^{e}_{\varphi} \qquad (20)$$

Согласно ранее сделанному допущению о слабой зависимости от φ искомых полей на поверхности S_2, первым слагаемым в правой части выражений для F_1 и F_2 пренебрегаем. Аналогично поступаем для вычисления компонент поля по формулам (15).

Считая слабым влияние верхнего полупространства на поля на поверхности S_2, можно написать интегральные представления для $\tilde{H}^{(1)}_{z'}$ и $\tilde{E}^{(2)}_{z'}$ на контуре Г :

$$\tilde{H}^{(1)}_{z'}(P) = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}\left[H^{(1)}_0\left(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\right)\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}_{z'}(Q)}{\partial\rho_Q} - \tilde{H}^{(1)}_{z'}(Q)\frac{\partial H^{(1)}_0\left(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\right)}{\partial\rho_Q}\right]ds_Q. \qquad (21)$$

$$\tilde{E}^{(2)}_{z'}(P) = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}\left[H^{(1)}_0\left(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\right)\frac{\partial \tilde{E}^{(2)}_{z'}(Q)}{\partial\rho_Q} - \right.$$
$$\left. -\tilde{E}^{(2)}_{z'}(Q)\frac{\partial H^{(1)}_0\left(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\right)}{\partial\rho_Q}\right]ds_Q, \qquad (22)$$

где точки P и $Q \in \Gamma$, $R = \sqrt{\rho_P^2 + \rho_Q^2 - 2\rho_P\rho_Q\cos(\varphi_P - \varphi_Q)}$, подынтегральные функции вычисляются при $\rho_P = \rho_Q = \rho_2$.

Найдя выражение для производной $\partial\tilde{H}^{(1)}_{z'}/\partial\rho$ из (17), подставим его в интегральное представление (21) и заменяя производную от функции Ханкеля нулевого порядка выражением через функцию Ханкеля первого порядка, получим одномерное интегральное уравнение, соответствующее граничной задаче (16,17)

$$\tilde{H}^{(1)}_{z'}(P) = \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{k^2-\zeta^2}{i\omega\mu}H^{(1)}_0\left(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\right)\left(F_1 - Z\tilde{H}^{(1)}_{z'}(Q)\right) + \right.$$
$$\left. +\tilde{H}^{(1)}_{z'}(Q)H^{(1)}_1\left(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\right)\sqrt{k^2-\zeta^2}\left|\sin\frac{\varphi_P - \varphi_Q}{2}\right|\right]ds_Q \; . \qquad (23)$$

Аналогично, найдя выражение для $\partial\tilde{E}_{z'}^{(2)}/\partial\rho$ из (19) и подставив в (22), получим второе интегральное уравнение, соответствующее граничной задаче (18,19)

$$\tilde{E}_{z'}^{(2)}(P)=\frac{i}{2}\int_{\Gamma}\Big[\frac{k^2-\zeta^2}{Z\sigma}H_0^{(1)}\Big(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\Big)\ \Big(\tilde{E}_{z'}^{(2)}(Q)-F_2\Big)+ \\ +\tilde{E}_{z'}^{(2)}(Q)H_1^{(1)}\Big(R\sqrt{k^2-\zeta^2}\Big)\ \sqrt{k^2-\zeta^2}\ \Big|\sin\frac{\varphi_P-\varphi_Q}{2}\Big|\ \Big]ds_Q\ . \tag{24}$$

Решая численно интегральные уравнения (23,24) на достаточном множестве значений параметра ζ, а затем применяя обратное преобразование Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cdot)e^{-i\zeta\,z'}d\zeta$$

к нужным компонентам, получим искомое решение поставленной задачи.

Очевидно, представленная методика моделирования электромагнитного поля на основе решения одномерных интегральных уравнений второго рода (23,24), не имеющего особых проблем при численной реализации в данной ситуации, позволяет построить эффективный быстрый алгоритм.

Литература

1. Егоров И.В., Дмитриев В.И. Математическое моделирование теллурического поля в окрестности протяженных проводников//Сб. Прикладная математика и информатика. М., МАКС Пресс, №6, 2000. с. 30-38.

2. Ваньян Л.Л., Егоров И.В. Теллурические токи вблизи протяженных металлических проводников//М. Изв. РАН, Физика Земли, №11, 2002. с. 3-10.

3. Стрижевский И.В., Дмитриев В.И. Теория и расчет влияния электрифицированной железной дороги на подземные металлические сооружения М., Стройиздат, 1967, 248 с.

4. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., Наука, 1977. 288 с.