В.И. Дмитриев, И.В. Дмитриева, Н.А. Осокин

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ.

Введение.

Во многих прикладных задачах необходимо решать интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром:

$$\int_{-1}^{1} u(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx = f(y),\ y\in[-1,1] \tag{1}$$

Решение интегрального уравнения первого рода является неустойчивой задачей. Однако используя логарифмическую особенность ядра интегрального уравнения можно получить устойчивое решение.
В работе [1] было показано, что решение интегрального уравнения первого рода

$$\int_{-1}^{1} K(x,y)\cdot u(x)\cdot dx = f(y)\ ,\ y\in[-1,1], \tag{2}$$

ядро которого представимо в виде

$$K(x,y) = \ln\frac{1}{|x-y|} + N(x,y)\ ,$$

где $N(x,y)$ дифференцируемая по y функция, при $\frac{\partial N}{\partial y}\in H$ – классу непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на замкнутом отрезке $[-1,1]$, существует и единственно. Там же был предложен устойчивый метод решения такого уравнения, основанный на выделении особенности ядра.

В работе [2] был предложен итерационный метод устойчивого решения уравнения (1). Итерационный метод строится следующим способом. Представим уравнение (1) в виде:

$$\gamma(y)\cdot u(y) = \int_{-1}^{1}\left(u(y)-u(x)\right)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx + f(y), \tag{3}$$

где

$$\begin{cases}\gamma(y) = \int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx = 2-\phi(y)-\phi(-y),\\ \phi(y) = (1-y)\cdot\ln(1-y),\quad y\in[-1,1].\end{cases} \tag{4}$$

Если решение $u(x)$ медленно меняющаяся функция, то интеграл (3) имеет значения много меньше $|u(x)|$, так как при $|x-y|<<1$ ядро велико, но $|u(x)-u(y)|$ – мало, а при $|x-y|\approx 1$ мало ядро. Поэтому итерационный процесс можно представить в виде

$$\gamma(y)\cdot u_n(y)=\int_{-1}^{1}\left(u_{n-1}(y)-u_{n-1}(x)\right)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx+f(y),$$

где $u_n(y)$ – n-я итерация решения. В результате имеем итерационный процесс.

$$u_n(y)=u_{n-1}(y)+\frac{f(y)}{\gamma(y)}-\frac{1}{\gamma(y)}\int_{-1}^{1}u_{n-1}(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx. \tag{5}$$

Начальное приближение выбирается $u_0(x)=0$. Тогда $u_1(x)=\dfrac{f(x)}{\gamma(x)}$. Заметим, что, если процесс сходится, то $u_n(x)$ стремится к решению интегрального уравнения (1). Сходимость метода проверялась на известном аналитическом решении $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ уравнения

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx=\pi\cdot\ln 2,\quad y\in[-1,1]. \tag{6}$$

На отрезке $x\in[-0,5;0,5]$, где решение изменяется очень медленно, уже первая итерация дает приближение с хорошей точностью. Вблизи концов отрезка $|x^2-1|<<1$ хорошее приближение получается на четвертой итерации.

Сходимость нарушается, если уравнение рассматривать на отрезке $x\in[-l,l]$, $2\cdot l>e$. Это связано с тем, что итерационный параметр

$$\gamma=\int_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx=2\cdot l-(l-y)\cdot\ln|l-y|-(l+y)\cdot\ln|l+y|$$

обращается в ноль в точке $y_0\in[-l,l]$ при $l\in\left[\dfrac{e}{2},e\right]$. Например, при $l=\dfrac{e}{2}$: $\gamma(-l)=2\cdot l-2\cdot l\cdot\ln(2\cdot l)=0$, а при $l>0$, $\gamma(y)<0$. Кроме того при $l=2$ в интегральном уравнении нарушается единственность решения так как

$$\int_{-2}^{2}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=0,$$

т.е. существует решение однородного уравнения. В статье рассматривается вопрос, как строить итерационный процесс при произвольном l.

Постановка задачи и её анализ.

Рассмотрим уравнение (1) на произвольном отрезке $[-l,l]$:

$$\int_{-l}^{l} u(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx = f(y),\quad y\in[-l,l]. \tag{7}$$

Сделаем замену переменного $x=s\cdot l$, $s\in[-1,1]$, $y=t\cdot l$, $t\in[-1,1]$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$\int_{-1}^{1} v(s)\cdot\ln\frac{1}{l\cdot|s-t|}\cdot ds = \phi(t),\quad t\in[-1,1], \tag{8}$$

где
$$v(s)=u(l\cdot s),\ \ \phi(t)=\frac{f(l\cdot t)}{l}. \tag{9}$$

Проведём преобразование уравнения (8)

$$\int_{-1}^{1} v(s)\cdot\ln\frac{1}{|s-t|}\cdot ds = \phi(t)+C_0\cdot\ln l, \tag{10}$$

где $C_0=\int_{-1}^{1} v(s)\cdot ds$.

Теорема 1.

Если для правой части интегрального уравнения (7)

$$\int_{-l}^{l} u(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot dx = f(y),\quad y\in[-l,l],\quad l\neq 2$$

выполняется условие

$$q=\int_{-l}^{l}\frac{f(y)}{\sqrt{l^2-y^2}}\cdot dy = 0, \tag{11}$$

то решение интегрального уравнения удовлетворяет требованию

$$C_0=\int_{-l}^{l} u(x)\cdot dx = 0. \tag{12}$$

Доказательство.

Умножим уравнение (7) на $\frac{1}{\sqrt{l^2-y^2}}$ и проинтегрируем в пределах y $[-l,l]$. Тогда получим

$$\int_{-l}^{l} u(x)\cdot dx\int_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{dy}{\sqrt{l^2-y^2}} = q. \tag{13}$$

Учитывая, что при $l\neq 2$

$$\int_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{dy}{\sqrt{l^2-y^2}} = \pi\cdot(\ln 2-\ln l)\neq 0, \tag{14}$$

а $q=0$ по условию теоремы, получим

$$\int_{-l}^{l} u(x)\cdot dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 имеем следствие:

Если решение интегрального уравнения (7) удовлетворяет условию

$$\int_{-l}^{l} u(x)\cdot dx = 0,$$

то правая часть уравнения удовлетворяет условию

$$q = \int_{-l}^{l} f(y)\cdot \frac{dy}{\sqrt{l^2-y^2}} = 0.$$

Это условие следует из формулы (13).

Таким образом, если правая часть уравнения (7) удовлетворяет условию (11), то уравнение (7) сводится, согласно (10), к решению уравнения

$$\int_{-1}^{1} v(s)\cdot \ln\frac{1}{|s-t|}\cdot ds = \phi(t), \quad t\in[-1,1]\ . \tag{15}$$

Уравнение (15) легко решается итерационным методом. Рассмотрим метод решения уравнения (7) в случае, если правая часть уравнения не удовлетворяет условию (11).

Метод нормализации правой части уравнения.

Идея метода состоит в преобразовании решения интегрального уравнения (7) таким образом, чтобы правая часть преобразованного уравнения удовлетворяла условию (11). Основой метода является следующее утверждение.

Теорема 2.

Если решение интегрального уравнения (7) представить в виде

$$u(x) = u_0(x) + C_0, \qquad C_0 = \frac{1}{2\cdot l}\int_{-l}^{l} u(x)dx\ , \tag{16}$$

то функция $u_0(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_{-l}^{l} u_0(x)\cdot \ln\frac{1}{|x-y|}dx = f_0(y)\ , \tag{17}$$

правая часть, которого удовлетворяет условию (11):

$$\int_{-l}^{l} \frac{f_0(y)}{\sqrt{l^2-y^2}}\cdot dy = 0\ .$$

Доказательство.

Проинтегрировав представление решения (16) в пределах $\left[-l,l\right]$, получим

$$\int_{-l}^{l} u(x)dx = \int_{-l}^{l} u_0(x)dx + 2\cdot l\cdot C_0 .$$

Откуда, учитывая выражение для C_0 (16), получим

$$\int_{-l}^{l} u_0(x)dx = 0 . \tag{18}$$

Согласно следствию из теоремы 1, из условия (18) следует

$$\int_{-l}^{l} \frac{f_0(y)dy}{\sqrt{l^2-y^2}} = 0 , \tag{19}$$

что и требовалось доказать.

Это условие позволяет определить C_0 через правую часть уравнения (7). Для этого подставим представление (13) в интегральное уравнение (7). Тогда получим

$$\int_{-l}^{l} u_0(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}dx = f(y) - C_0\cdot\int_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}dx = f_0(y) .$$

Константу C_0 найдем из условия (19). Тогда

$$\int_{-l}^{l} \frac{f(y)dy}{\sqrt{l^2-y^2}} = C_0\cdot\int_{-l}^{l} dx \int_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{dy}{\sqrt{l^2-y^2}} .$$

Учитывая (14), найдем:

$$C_0 = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot l\cdot(\ln 2-\ln l)}\cdot\int_{-l}^{l}\frac{f(y)dy}{\sqrt{l^2-y^2}} . \tag{20}$$

Легко показать, что полученное C_0 удовлетворяет выражению (16). Для этого подставим в (20) $f(y)$ из интегрального уравнения (7). Получим

$$C_0 = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot l\cdot(\ln 2-\ln l)}\cdot\int_{-l}^{l} dx \int_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{dy}{\sqrt{l^2-y^2}} .$$

Учитывая (14), найдем

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} u(x)\cdot dx ,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, и в случае, когда правая часть интегрального уравнения (7) не удовлетворяет условию (11) задача сводится к уравнению с правой частью, удовлетворяющим условию (11), к которому применим итерационный метод. Однако предложенный метод дает результат с хорошей точностью, если решение уравнения не имеет особенности на концах отрезка $[-l,l]$. В этом случае применим другой подход.

Метод выделения особенности решения.

Этот метод базируется на следующем утверждении.

Теорема 3.

Если решение интегрального уравнения (7) имеет интегрируемую особенность на концах отрезка $[-l,l]$, то выделением особенности

$$u(x)=u_0(x)+\frac{q}{\pi^2(\ln 2-\ln l)}\cdot\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}, \tag{21}$$

где $q=\int\limits_{-l}^{l}\frac{f(x)dx}{\sqrt{l^2-x^2}}\neq 0$, то $u_0(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{-l}^{l}u_0(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}dx=f_0(x)\ , \tag{22}$$

в котором правая часть уравнения

$$f_0(x)=f(x)-\frac{q}{\pi} \tag{23}$$

и $f_0(x)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-l}^{l}\frac{f_0(x)dx}{\sqrt{l^2-x^2}}=0.$$

Доказательство.

Подставим представление решения (21) в интегральное уравнение (7). Тогда поучим

$$\int\limits_{-l}^{l}u_0(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}dx=f(x)-\frac{q}{\pi^2\cdot(\ln 2-\ln l)}\cdot\int\limits_{-l}^{l}\ln\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{dx}{\sqrt{l^2-x^2}}.$$

Учитывая (14), получим

$$\int\limits_{-l}^{l}u_0(x)\cdot\ln\frac{1}{|x-y|}dx=f_0(x)=f(x)-\frac{q}{\pi}.$$

Условие (11) для $f_0(x)$ дает

$$\int\limits_{-l}^{l}\frac{f_0(x)dx}{\sqrt{l^2-x^2}}=\int\limits_{-l}^{l}\frac{f(x)dx}{\sqrt{l^2-x^2}}-\frac{q}{\pi}\int\frac{dx}{\sqrt{l^2-x^2}}=q-q=0,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, в результате показано, что при любой правой части интегрального уравнения (7) $f(x)\in C_1$ можно свести уравнение (7) на отрезке

$x \in [-l,l]$ к уравнению на отрезке $s \in [-1,1]$, к которому применим итерационный метод решения.

Алгоритм решения интегрального уравнения.

Как было показано выше решение уравнения (7) при $l \neq 2$ всегда сводится к решению уравнения (10) на отрезке $[-1,1]$ с положительно определенным ядром, к которому применим итерационный метод решения. Для этого мы должны приблизить интегральный оператор в (10) алгебраическим:

$$\int_{-1}^{1} v(s) \cdot \ln \frac{1}{|s-t|} \cdot ds \approx \sum_{i=1}^{2\cdot N} a_i(t) \cdot v_i \text{, где} \tag{24}$$

$v(s) = v_i = v(s_i = -1 + (i-0,5)\cdot h)$ при $s \in [s_i - 0.5\cdot h, s_i + 0.5\cdot h]$, $i \in [1, 2\cdot N]$, $h = \dfrac{1}{N}$,

$$a_i(t) = \int_{s_i - 0.5h}^{s_i + 0.5h} \ln \frac{1}{|s-t|} \cdot ds = h + \psi(s_i + 0,5\cdot h) - \psi(s_i - 0,5\cdot h), \tag{25}$$

$$\psi(s) = (t-s)\cdot \ln|t-s|. \tag{26}$$

В результате приходим к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2\cdot N} a_{ij} \cdot v_i = \phi_j, \quad j \in [1, 2\cdot N], \tag{27}$$

где $a_{ij} = a_i(t_j)$, $\phi_j = \phi(t_j)$, $t_j = -1 + (j-0,5)\cdot h$.

Полученная система решается итерационным методом, согласно (5):

$$v_j^{(n)} = v_j^{(n-1)} + \frac{\phi_j}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_j} \cdot \sum_{i=1}^{2\cdot N} a_{ij} \cdot v_i^{(n-1)}, \quad j \in [1, 2\cdot N], \tag{28}$$

где $\left\{v_j^{(n)}\right\}$, $j \in [1, 2\cdot N]$ – решение интегрального уравнения на сетке $t_j = -1 + (j-0,5)\cdot h$, полученное на n-й итерации. Параметр γ_j, согласно (4), равен

$$\gamma_j = \gamma(t_j) = 2 - (1-t_j)\cdot \ln(1-t_j) - (1+t_j)\cdot \ln(1+t_j). \tag{29}$$

Численное исследование.

Для анализа эффективности предложенного метода решения интегрального уравнения первого рода с логарифмическим ядром было проведено численное решение ряда примеров. Во всех расчетах рассматривалось решение интегрального уравнения (7) при $l = 4$. Для анализа точности решения проводилась следующая процедура. Задавалось точное решение $u(x)$ интегрального уравнения. Для этого решения вычислялась правая часть $f(y)$. Затем для заданного $f(y)$ итерационным методом решалось интегральное уравнение и сравнивалось приближенное решение с известным точным решением.

Пример 1. Точное решение выбиралось в виде $u(x) = \sin\frac{\pi \cdot x}{8}$, $x \in [-4,4]$. Для этого решения вычислена правая часть интегрального уравнения $f(x)$ (рис. 1). В этом случае $f(x)$ – нечетная функция и она удовлетворяет условию (11). На рис. 2 приведены полученные итерации, которые быстро сходятся к точному решению.

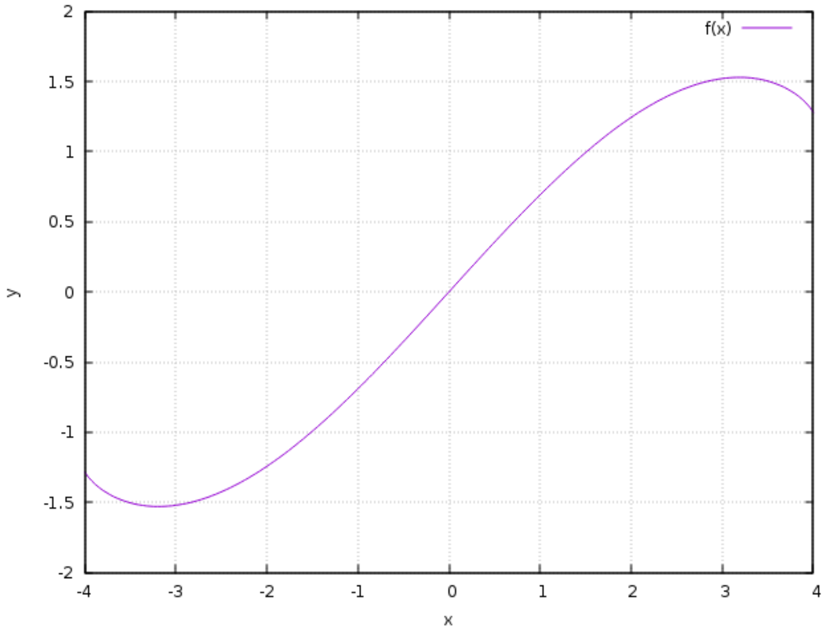

Рис. 1

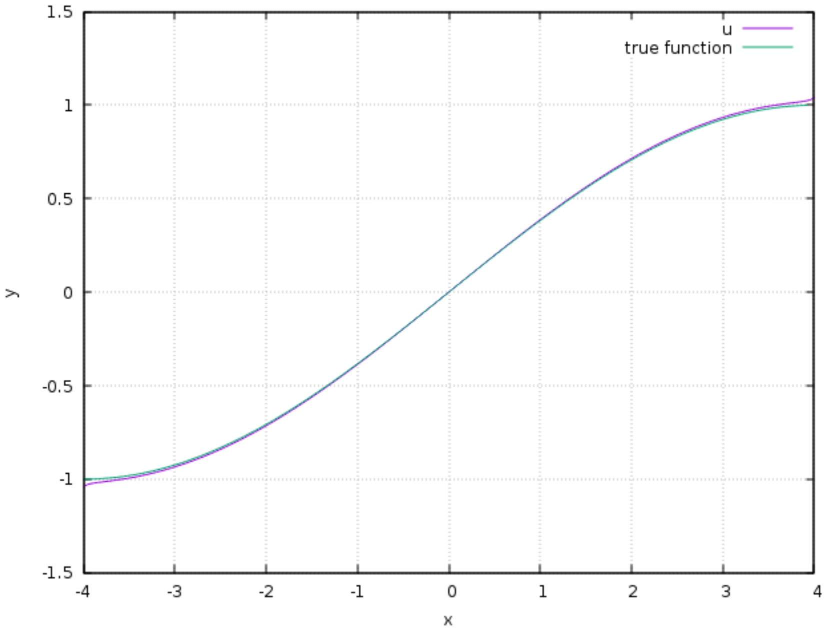

Рис. 2

Пример 2. В этом примере рассматривается точное решение в виде $u(x)=\cos\frac{\pi\cdot x}{8}$, $x\in[-4,4]$. Правая часть в этом случае $f(y)$ (рис. 3) четная функция, которая не удовлетворяет условию (11). Применяется метод нормализации правой части. По формуле (20) вычисляется $C_0=\frac{2}{\pi}\approx 0,6366$. Решение представляется в виде $u(x)=u_0(x)+C_0$. Функция $u_0(x)$ рассчитывается итерационным методом. Результаты сходимости к точному решению приведены на рис. 4.

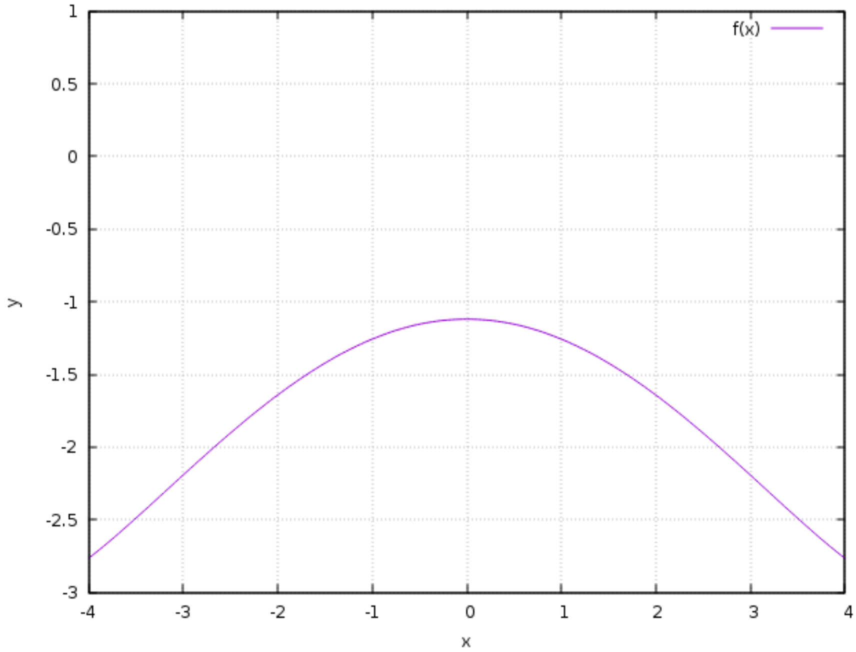

Рис. 3

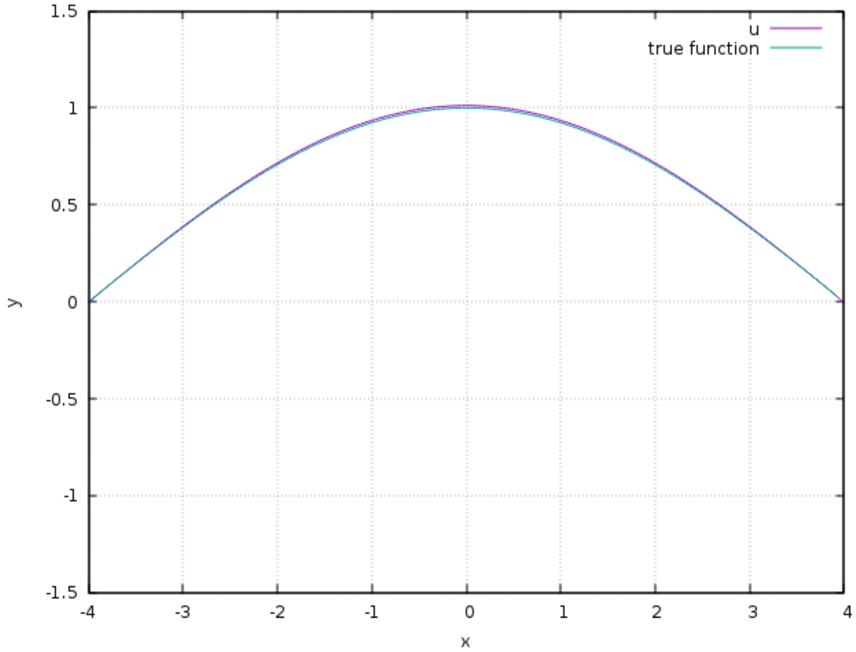

Рис. 4

Пример 3. В этом случае рассматривается точное решение, имеющее особенность на концах отрезка $[-4,4]$ в виде:

$$u(x)=\sin\frac{\pi\cdot x}{4}+\frac{1}{\sqrt{16-x^2}},\ x\in[-4,4].$$

Правая часть для этого случая приведена на рис. 5. Применяется метод выделения особенности решения. Решение представляется в виде

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}+u_0(x).$$

Для $u_0(x)$ решается соответствующее интегральное уравнение итерационным методом.

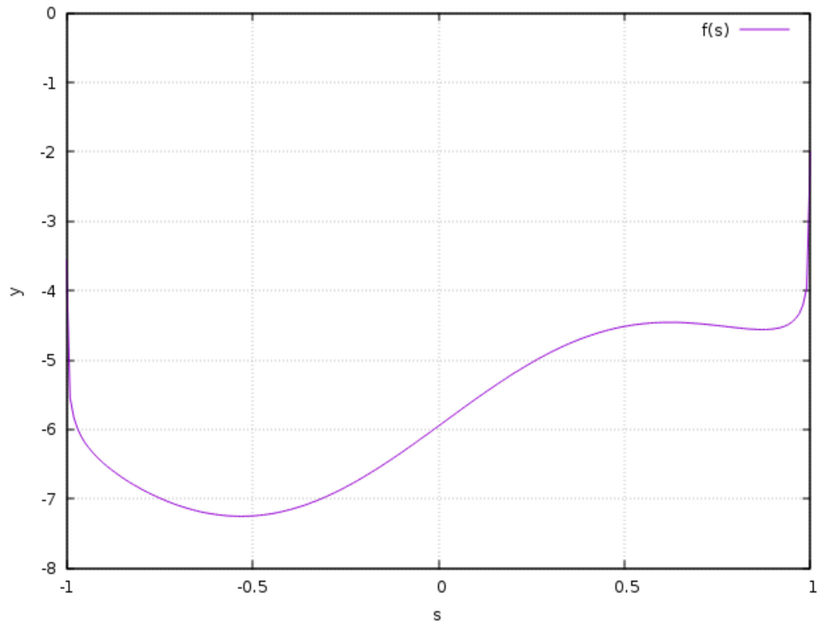

Рис. 5

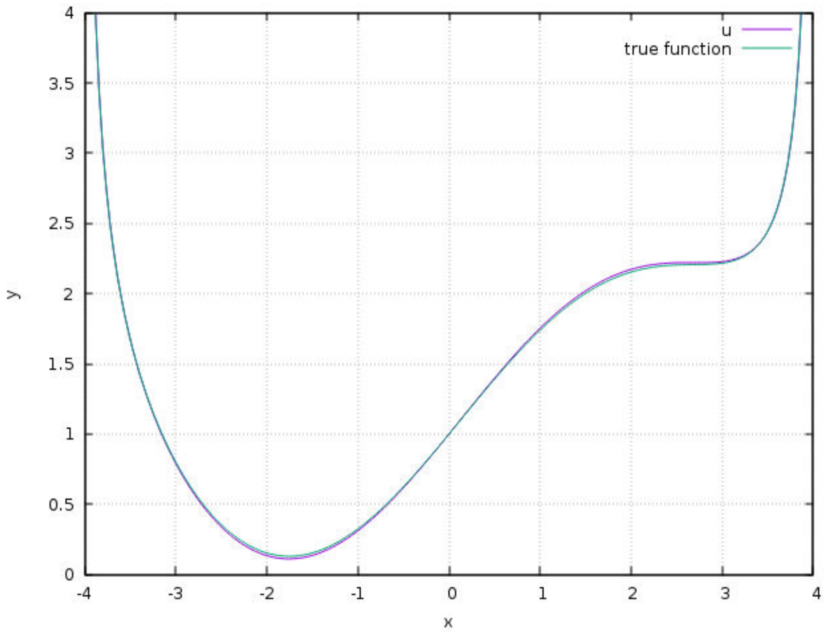

Рис. 6

Заключение.

Проведенный численный анализ показал, что при любом интервале задания интегрального уравнения (за исключением $l = 2$) позволяет так преобразовать уравнение, что к нему применим предложенный итерационный метод решения, который позволяет получать устойчивое решение интегрального уравнения с высокой точностью.

Литература

1. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I-рода.//Вычислительные методы и программирование. М. Изд-во Моск. Ун-та. 1968, X, С. 49-54.

2. *Дмитриев В.И., Сальников Р.В.* Итерационный метод решения интегральных уравнений первого рода. Прикладная математика и информатика, № 15, М. Изд-во факультета ВМК МГУ, 2003, С. 5-10.// V.I. Dmitriev, R.V. Salnikov. Iterative Method for Solving Integral Equations of the First Kind. Computational Mathematics and Modeling. V. 15, №4, p. 315-319, 2004.