

## **ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ФИЛЬТРАЦИИ РАСТВОРОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

### **Введение**

Целью работы является разработка и исследование математической модели, описывающей процессы растворения и осаждения минералов при фильтрации растворов в неоднородной пористой среде. В процессе растворения происходит изменение химического состава породы за счет замещения одних минералов другими, так что в целом порода сохраняет твердое состояние. Такие процессы называются метасоматическими. Теория метасоматической зональности была разработана акад. Д.С. Коржинским в середине прошлого века [1].

Метасоматоз лежит в основе добычи полезных ископаемых способом подземного выщелачивания (ПВ), который считается одним из наиболее экологически чистых и распространенных геотехнологических методов добычи полезных ископаемых, таких как уран или золото [2],[3]. Однако выбор оптимальных технологических параметров процесса ПВ, прогнозирование на стадии проектирования и управления на стадии эксплуатации затруднено из-за недостаточной полноты и надежности исходной информации, сильной неоднородности и нестационарности процессов, взаимосвязи геологических, гидродинамических и химико-технологических факторов. Методы математического моделирования и вычислительного эксперимента способны успешно решать все эти проблемы. Построение иерархической системы математических моделей дает возможность выявить механизмы происходящих процессов внутри рудоносного пласта, изучить их динамику и на этой основе оптимизировать добычу полезного ископаемого.

Математическая модель процесса ПВ, опирающаяся на данные геологоразведки, складывается из следующих составляющих:

1. модели геологической среды;
2. модели гидродинамики процесса;
3. модели массопереноса растворителя и продуктов реакции;
4. модели кинетики химического взаимодействия.

Модель геологической среды задает характеристики рудоносного пласта, к которым относится пространственное распределение полезного ископаемого, его содержание в пласте, распределение пористости, проницаемости и ряд других геотехнических характеристик руд и пород.

В настоящей работе рассматривается рудоносный пласт, зажатый между двумя водоупорами. В данный пласт из ряда скважин закачивается кислотный или щелочной раствор, который просачивается сквозь

пористую среду, растворяет минералы и откачивается из откачных скважин. Предполагается, что пористость и проницаемость пласта пространственно неоднородна и может изменяться за счет включения отдельных глинистых пропластков, участков уплотнения или разуплотнения песков. Кроме того, считается, что проницаемость пласта может медленно изменяться в ходе процессе выщелачивания за счет процессов растворения и отложения.

Для всех систем математических моделей, описывающих процессы метасоматоза, характерна единая структура: первоначально решается задача фильтрации технологических растворов, а затем на ее основе исследуется задача кинетики выщелачивания полезного компонента по линиям или лентам тока. Обычно рассматривается однородная среда, для которой выписывается аналитическое решение, задающее поле скоростей течения жидкости [2].

В рассматриваемой нами математической модели также сначала решается задача фильтрации растворов в неоднородной пористой среде при заданных дебетах скважин, заданном распределении в пласте полезного минерала, пористости и зон непроницаемости. Рассматривается плоская двумерная задача; значение пористости, проницаемости и другие характеристики пласта в данной точке плоскости берутся усредненными по толщине. Это приближение оправдано, если мощность пласта невелика, он залегает примерно на одном уровне и достаточно однороден по высоте. В работе предлагается численный алгоритм расчета линий тока и поля скоростей в неоднородной среде. Он основывается на методе конечных элементов, с помощью которого решается уравнение Пуассона для функции гидравлического напора в заданной области на плоскости.

В движущемся растворе происходит объемное растворение и осаждение минералов согласно заданной последовательности превращений. Объемное растворение различно в разных участках пласта, так как оно определяется разницей между концентрацией в данной точке и концентрацией в насыщенном растворе. Понятно, что в окрестности закачных скважин, куда поступает чистый раствор, растворение идет быстро, и с течением времени минералы полностью переходят в раствор. Возникает задача, о растворении в движущейся среде с подвижной границей, которая ограничивает зону полного растворения или выщелачивания. В работе [4] разработана модель метасоматоза, описывающая процессы растворения в среде с ограниченными запасами полезного минерала. Модель исследовалась для одномерного случая и однородного пласта. Найдены автомодельные решения, описывающие движение переднего фронта растворов, выдавливающих естественные воды и заднего фронта, являющегося границей зоны полного выщелачивания. Проведено сравнение с экспериментальными данными.

Показано, что данная модель отражает все самые существенные черты процесса подземного выщелачивания. В настоящей работе аналогичная модель метасоматоза адаптируется к двумерному случаю и неоднородному пласту. Кроме того, считается, что пористость и проницаемость пласта могут изменяться со временем. Рассматриваемая математическая модель позволяет учитывать нестационарность процессов по времени. Для этого в соответствии с изменением пористости и других факторов периодически происходит перерасчет первой задачи о фильтрации потоков двумерной жидкости. Проведены серии расчетов для разных случаев, которые позволили понять механизмы метасоматоза в неоднородном пласте в процессе выщелачивания полезных минералов. Исследуется динамика извлечения полезного ископаемого из продуктивных растворов. Выявлено влияние различных неоднородностей на динамику течения процессов. Показано, что при наличии зон с плохой проницаемостью растворов в окрестности этих зон в пласте могут остаться значительные запасы полезного ископаемого. Кроме того, по графикам извлечения из разных скважин можно предсказать наличие зоны непроницаемости.

При подземном выщелачивании извлекаемый минерал не только растворяется, но может и частично осаждаться, что существенно искажает первоначальную картину распределения запасов и степени извлечения их из недр. Обычно осаждение происходит в зонах с пониженным значением кислотности (рН), образующихся в результате наличия температурных градиентов или градиентов кристаллизационного давления. В работе [5] этот случай был исследован на примере модельной одномерной задачи. В настоящей работе проводится исследование двумерной математической модели для среды, имеющей зону с пониженным значением рН. Показано, что в процессе фильтрации растворов сквозь зоны с пониженным значением кислотности происходит отложение, и концентрация полезного минерала в твердой фазе в этих зонах увеличивается, в то время как в зонах с повышенным содержанием рН, происходит растворение минерала. В этом случае в пласте могут остаться более или менее значительные запасы полезного минерала, определяемые объемом зоны с пониженным содержанием рН. Показано, что по относительной динамике извлечения минерала из каждой скважины можно приблизительно оценить, где находится зона вторичных отложений.

Таким образом, предложенная математическая модель процессов подземного выщелачивания позволяет решить две последовательные важнейшие задачи:

- Задачу подбора параметров, характеризующих рудоносный пласт (восполнить неполноту данных геологоразведки), так чтобы описать экспериментальные данные.

- Задачу оптимизации технологических параметров добычи полезного ископаемого. К ним относятся: оптимальное расположение закачивающих и откачивающих скважин, оптимальные скорости закачки и откачки, оптимальные состав растворителя, температурный режим, срок выработки, после которого нужно сверлить новые скважины и др.

## I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНФИЛЬТРАЦИОННОГО МЕТАСОМАТОЗА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

**1. Модель гидродинамики процесса.** Рассмотрим неоднородный пласт с переменной пористостью  $\sigma(x, y)$  и проницаемостью. Будем считать, что пласт зажат между двумя непроницаемыми горизонтальными водоупорами; эффективная мощность пласта равна  $T$ . В данный пласт из ряда скважин закачивается кислотный или щелочной раствор, а из других скважин откачивается. Скважины считаем совершенными, дебиты  $Q_i$  их постоянны и заданы, причем  $\sum_{i=1}^n Q_i = 0$  (расход  $Q_i$  берется со знаком «-» для закачных скважин и со знаком «+» для откачных). Будем рассматривать квазистационарное течение жидкости в пласте с медленно меняющимися во времени характеристиками и считать, что для такого пласта выполняются законы фильтрации Дарси и справедливо уравнение неразрывности. Тогда фильтрационные потоки описываются двумерным уравнением Пуассона для функции гидравлического напора  $h(x, y)$  [6]:

$$-\nabla(k(x, y, t)\nabla h(x, y, t)) = q(x, y), \quad (1)$$

$$q(x, y) = -\frac{1}{2\pi T} \sum_i^n Q_i \delta(x - x_i, y - y_i), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

где  $\delta(x_i, y_i)$  – дельта-функция Дирака, взятая в точке забоя скважин,  $k(x, y, t)$  – коэффициент фильтрации. В качестве области  $D$ , в которой рассматривается уравнение (1) выберем достаточно большую область, размеры которой заметно превышают расстояние между наиболее удаленными скважинами. Тогда на границе  $\Gamma$  скорость течения и напор, вызванные наличием скважин пренебрежимо малы; и можно положить:

$$\left. \frac{\partial h(p)}{\partial \vec{n}} \right|_{p \in \Gamma} = -\vec{V}_0, \quad h(p) \Big|_{p \in \Gamma} = h_0, \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к границе  $\Gamma$  области;  $h_0(x, y)$  и  $\vec{V}_0(x, y)$  – напор и скорость потока естественных подземных вод, которые, как правило, берутся равными нулю.

Вектор скорости фильтрации  $\vec{V}(x, y)$  в точке с координатами  $\{x, y\}$  вычисляется по формуле:

$$\vec{V}(x, y) = -k(x, y)\nabla h(x, y), \quad (3)$$

а линии тока находятся из уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y(x, y)}{V_x(x, y)}. \quad (4)$$

**2. Модель процесса растворения.** Будем считать, что в пласте песков, сквозь которые сочится раствор, руда находится в виде небольших зерен, равномерно распределенных по всему объему. Внутри зерен компоненты растворенных солей могут перемещаться только за счет диффузии в поровых растворах. Система пор тонкая и равномерная, а объем пор незначительный. Замещение идет с сохранением объема. Отдельные компоненты диффундируют независимо друг от друга. Хотя любой метасоматический процесс в целом необратим и неравновесен, однако он допускает локальное равновесие и некоторые равновесные соотношения [1]. Будем считать, что в процессе фильтрации растворяется один минерал и одновременно выпадает в осадок другой минерал, так что пористость среды  $\sigma$  не изменяется. (Впоследствии мы учтем медленные изменения коэффициента  $\sigma$  и коэффициента фильтрации). Пусть  $C_p$  – концентрация некоторого вещества в твердой фазе,  $C$  – концентрация этого же вещества в жидкой фазе. Уменьшение во времени  $C_p(x, y, t)$  дает увеличение  $C(x, y, t)$ . Общее уравнение, которое получается из баланса массы, имеет вид:

$$-\frac{\partial C_p(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla C), \quad \{x, y\} \in \tilde{D} \subset D. \quad (5)$$

В работе [4] была предложена и исследована модель, описывающая процессы инфильтрационного метасоматоза, в одномерном случае. Применим эту модель к двумерному случаю. Будем считать, что зерна растворяемого минерала одинаковые и имеют форму шара радиусом  $r_0$ . Поскольку зерно маленькое, то считается, что оно находится в точке  $\{x, y\}$ , и концентрация  $C(x, y, t)$  в потоке, омываемом зерно, одинакова у всей поверхности зерна. При растворении радиус шарика уменьшается до нуля, пока все вещество не растворится. Считается, что количество растворенного вещества, вытекающего из зерна за время  $\Delta t$  пропорционально площади поверхности и разности между концентрацией в растворе и концентрацией  $C_n$  в насыщенном растворе. Вводя безразмерный радиус:

$$\rho = r/r_0, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

и нормируя концентрацию вещества в растворе на насыщенную:

$$c(x, y, t) = C(x, y, t) / C_n, \quad 0 \leq c \leq 1,$$

получаем уравнение, определяющее закон изменения радиуса  $\rho(t)$  в точке  $\{x, y\}$  при растворении:

$$\frac{d\rho(x, y, t)}{dt} = -\beta \cdot (1 - c(x, y, t)), \quad \beta = \frac{\alpha \cdot C_n}{r_0 C_p}, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – коэффициент растворения (значение параметра  $\alpha$  зависит от состава раствора и других характеристик).

Заметим, что со временем концентрация соли в растворе  $c$ , омываемом зерно, увеличивается пока не достигнет насыщения, и поэтому уравнение (6) надо решать вместе с уравнением переноса (5) вдоль линий тока. Каждое зернышко, пока оно полностью не растворится, представляет собой источник. За единицу времени в единицу объема потока жидкости выделяется вещества:

$$\tilde{q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{\eta}{\sigma V_s} = \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma} \rho^2 (1 - c), \quad \tilde{\alpha} = \frac{3\alpha \cdot \eta \cdot C_n}{r_0}, \quad (7)$$

где  $V_s = \frac{4}{3} \pi r_0^3$  – объем шарика,  $\sigma$  – пористость,  $\eta$  – доля зерен в единице объема, и  $\rho(t)$  – радиус, который берется из решения уравнения (6). И система уравнений относительно концентрации растворенного вещества  $0 \leq c(x, y, t) \leq 1$  и радиуса  $0 \leq \rho(x, y, t) \leq 1$  описывающая объемное растворение в движущейся среде принимает вид:

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla c(x, y, t)) = \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma} \rho^2 (1 - c(x, y, t)), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = -\beta (1 - c(x, y, t)). \quad (9)$$

**3. Задание начальных и граничных условий.** Уравнения (1), (3), (8), (9) описывают процессы фильтрации растворов и растворения минерала в пористой среде. Для начала расчетов необходимо на плоскости задать координаты закачных и откачных скважин и задать их дебиты; выбрать область  $D$ , в которой будут производиться расчеты, задать условия на границе  $\Gamma$ ; по данным геологоразведки задать все параметры и характеристики среды, входящие в уравнения и формулы (6), (7). Задать распределение полезного ископаемого в пласте:  $C_p(x, y)$ ,  $\eta(x, y)$ ,  $r_0$ ; распределение пористости  $\sigma(x, y)$ , значение коэффициента фильтрации  $k(x, y)$ , коэффициента растворимости  $\alpha$ , значение насыщенного раствора  $C_n$  и фоновой концентрации растворяемого минерала в подземных водах  $C_0$ , обычно  $C_0 \approx 0$ .

Считается, что в начальный момент времени, то есть перед началом подачи растворов в закачные скважины, концентрация всюду равна фоновой, а радиус шариков минерала равен 1:

$$c(x, y, 0) = C_0, \quad \rho(x, y, 0) = 1.$$

Неоднородность распределения полезного ископаемого в пласте описывается с помощью коэффициента  $\eta(x, y)$  – доли шариков в единице объема.

Из скважин вытекает чистый раствор, поэтому вблизи скважин концентрация в любой момент времени равна 0:

$$c(x_i, y_i, t) = 0 \quad \text{при } t \geq 0.$$

Обычно область  $D$  задается в форме эллипса, полуоси которого по умолчанию берутся в три раза больше сторон прямоугольника, в котором задается карта расположения скважин и геохимических неоднородностей – областей с другими значениями коэффициента фильтрации раствора, содержанием урана, характерной скоростью выщелачивания и др. На границе задаются условия Неймана (2). Поскольку для добычи полезных ископаемых способом ПВ пригодны достаточно однородные, легко вскрываемые растворами пласты, то неоднородности, задаются обычно в нескольких небольших подобластях  $D_j$  области  $D$  ( $D_j \subset D, j = 1, 2, \dots, \bar{j}$ ), имеющих простую форму (эллипс, прямоугольник, треугольник и т.п.) (см. рис.1).

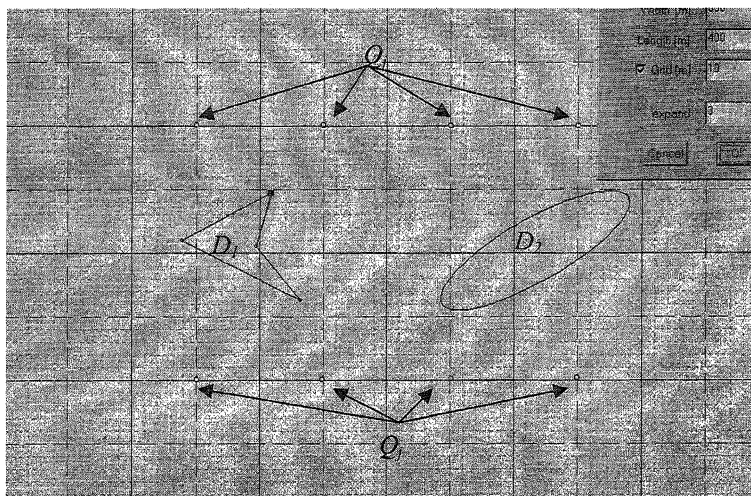
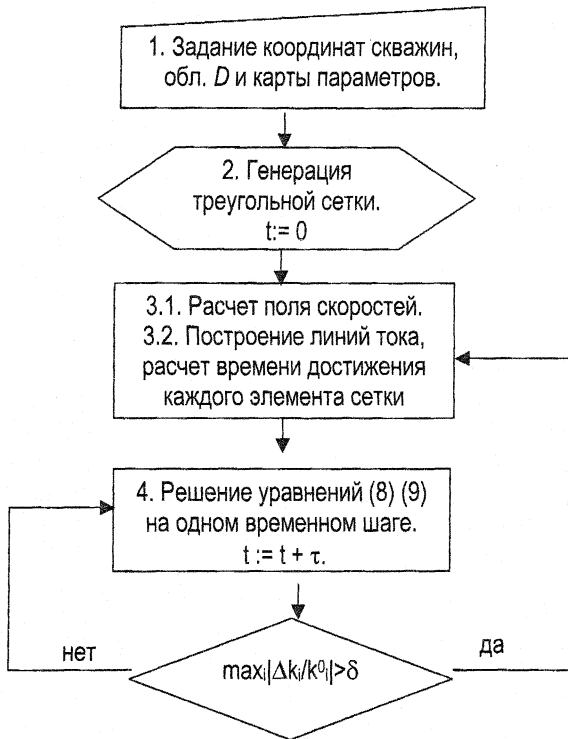


Рис. 1. Задание карты области: расположение скважин и геологических неоднородностей.

## II. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнения (1),(3),(8),(9) представляют собой систему взаимосвязанных уравнений и должны решаться одновременно. Однако предположение о медленном изменении коэффициента фильтрации позволяет отделить от системы первое уравнение (1) и решать его не на каждом временном шаге, а значительно реже. Алгоритм решения задачи можно представить в виде блок-схемы, изображенной ниже.

### 1. Блок схема алгоритма решения задачи



Согласно этому алгоритму, пересчет поля скоростей происходит тогда, когда изменение коэффициента фильтрации в некоторой точке превышает некоторое значение  $k^*$ . После пересчета массив значений  $k_i$  обновляется и уравнения (8),(9) решаются с обновленным полем скоростей.



Для реализации алгоритма создан комплекс компьютерных программ, объединенных интерактивной графической оболочкой. Программы написаны на языке С++ и работают в среде Windows.

**2. Генерация треугольной сетки.** Треугольная сетка используется как для решения уравнения (1) методом конечных элементов, так и для решения уравнений (8),(9). Из-за наличия источников в правой части и кусочно-постоянных параметров решение уравнения (1) сильно пространственно неоднородно. Для эффективного решения (1) сетка должна быть также неоднородной. В областях быстрого изменения решения вблизи скважин и границ неоднородностей узлы сетки располагаются чаще, чем в областях медленного изменения решения вдали от скважин и границ. Триангуляция сетки производится методом Делане. Триангуляция заданной области проводится в несколько шагов. На первом шаге область покрывается системой треугольников с вершинами на концах всех элементарных сегментов и на серединах эллиптических сегментов. Затем идет процесс коррекции.

Для генерации треугольной сетки используются следующие параметры:  $H_{\max}$  – максимальное расстояние между узлами сетки (максимальная длина стороны треугольника). Оно определяется как часть максимального размера области:  $H_{\max} = L_{\max}/K$ , которую обычно нужно уменьшать при зацикливании коррекции сетки.  $h_0, h_1, h_2, h_3$  – коэффициенты, определяющие максимальный размер треугольников вблизи внешних границ, вблизи скважин, вблизи внутренних границ и вдали от границ соответственно;  $a = \pi/K$  – угловой параметр, определяет качество треугольников. При увеличении  $K$  уменьшается число остроугольных треугольников (при этом увеличивается число узлов сетки).

На втором шаге триангуляции на границах простых областей расставляются узлы сетки так, чтобы расстояние между ними не превышало  $H_{\max}$ . Треугольная сетка перестраивается, добавляются новые треугольники. Затем проводится коррекция сетки для удаления треугольников со сторонами, пересекающими границы простых областей.

На последнем шаге триангуляции проводится итерационный процесс, в котором из покрытия выбираются «плохие» треугольники. Качество треугольника оценивается величиной  $q = 4\sqrt{3}S/(a^2 + b^2 + c^2)$ , где  $S$  – площадь треугольника,  $a, b, c$  – длины его сторон. «Плохие» треугольники (те у которых  $q < q_{\text{low}}$ , где  $q_{\text{low}}$  – параметр алгоритма) делятся на три треугольника, путем добавления нового узла в центре окружности, описанной около «плохого» треугольника. В конце сетка корректируется, как описано выше, и «расправляется». «Расправление» сетки – итерационный процесс, в котором каждый узел сетки смещается в

«центр тяжести» соседних узлов. Результат триангуляции показан на рис. 2. Хорошо видно, как сгущается сетка вблизи закачных и откачных скважин. Скважины отмечены треугольниками. Для справки выводится число треугольников  $ntr$ , число узлов сетки  $nmp$ , и среднее качество сетки. При необходимости сетку можно измельчить.

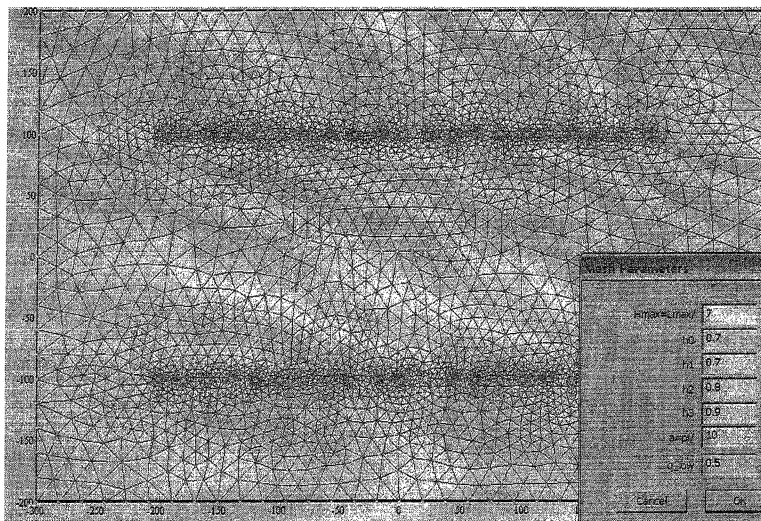


Рис. 2. Триангуляция области и параметры генерации сетки. Сетка состоит из 9050 треугольников, 4645 узлов. Среднее качество треугольников 0.942.

### III. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

После того как задана карта области  $D$  и сгенерирована сетка, начинается решение поставленной задачи. Сначала рассчитывается поле скоростей и линий тока. Для этого методом конечных элементов решается стационарное уравнение непрерывности для потенциального течения жидкости в пористой среде (1):

$$-\operatorname{div}(k(x, y)\operatorname{grad}h(x, y)) = q(x, y), \quad x, y \in D \subset R^2, \quad (10)$$

с условиями Неймана  $k \partial h / \partial n = 0$  на границе.

Пусть  $\varphi(x, y)$  – финитная функция. Умножая уравнение (10) на  $\varphi$  и интегрируя по области  $D$ , находим с учетом граничного условия слабую форму (10):

$$\int_D (k(x, y)\operatorname{grad}h(x, y), \operatorname{grad}\varphi(x, y)) dx dy = \int_D q(x, y)\varphi(x, y) dx dy. \quad (11)$$

В методе конечных элементов область  $D$  разбивается на треугольники  $t_j$  (триангуляция),  $D = \bigcup_{j=1}^N t_j$ . Вершины треугольников  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,

рассматриваются как узлы (нерегулярной) треугольной сетки в  $D$ . Затем вводится система финитных функций  $\varphi_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, M$ , связанных с вершинами треугольников  $p_i$ . В каждом треугольнике, содержащем вершину  $p_i$ , функция  $\varphi_i$  линейна (представляет собой часть плоскости), причем  $\varphi_i(p_i) = 1$  и  $\varphi_i(x, y) = 0$  на стороне треугольника, противоположной вершине  $p_i$ . На остальных треугольниках, не содержащих точку  $p_i$  в качестве вершины,  $\varphi_i(x, y) \equiv 0$ . Неизвестная

функция  $h$  представляется в виде суммы  $h(x, y) = \sum_{i=1}^M h_i \varphi_i(x, y)$  с неизвестными коэффициентами  $h_i$ . Подставляя это представление в (11) с  $\varphi(x, y) = \varphi_j$ , получим систему линейных уравнений относительно  $h_i$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M h_i \int_D k(x, y) (\mathbf{grad} \varphi_i(x, y), \mathbf{grad} \varphi_j(x, y)) dx dy &= \\ &= \int_D q(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Положим

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_D k(x, y) (\mathbf{grad} \varphi_i(x, y), \mathbf{grad} \varphi_j(x, y)) dx dy, \\ F_j &= \int_D q(x, y) \varphi_j(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Систему (13) перепишем в виде

$$\mathbf{Mh} = \mathbf{F}. \quad (14)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $M_{ij}$ , отличны от нуля только в тех случаях, когда точки  $p_i$  и  $p_j$  принадлежат одному треугольнику.

Программа вычисляет элементы матрицы  $\mathbf{M}$  и вектора  $\mathbf{F}$  и решает систему (14) методом сопряженных градиентов, при этом учитывается разреженность матрицы  $\mathbf{M}$ .

В результате решения системы (14) получается вектор  $\mathbf{h}$  значений функции  $h$  в каждом узле треугольной сетки. Значения функции  $h$  внутри треугольников определяются с помощью линейной интерполяции. Для каждого треугольника вычисляются и сохраняются коэффициенты линейной интерполяции функции  $h$ . Коэффициенты линейной интерполяции  $h$  являются компонентами вектора  $\mathbf{grad}(h)$ , и могут использоваться для определения скорости потока внутри треугольников. Однако при этом поле скоростей получается разрывным (она постоянна внутри каждого треугольника и скачком меняется от треугольника к треугольнику). Для сглаживания поля скоростей в программе

используется следующий прием. Компоненты скорости потока определяются для каждого узла сетки как взвешенные средние по всем треугольникам, имеющим этот узел в качестве вершины. Скорость внутри треугольников определяется с помощью линейной интерполяции скорости в его вершинах. В результате поле скоростей получается непрерывным.

После определения поля скоростей для каждого треугольника вычисляется время  $t_f$ , за которое жидкость проходит путь от закачных скважин до данного треугольника. Для определения этого времени из каждого узла сетки выпускается линия тока. Линия продолжается в направлении против скорости потока до тех пор, пока она не окажется в достаточно малой окрестности закачной скважины. Таким образом, определяется время течения от данного узла до закачной скважины. Время  $t_f$  для треугольника вычисляется как среднее время по узлам сетки – вершинам треугольника. Это время используется при решении уравнений (8) (9). На рис. 3 приведена карта расчета поля скоростей и линий тока для случая расположения скважин и неоднородностей, представленных на рис. 1. Неоднородности здесь представлены плотными породами и характеризуются коэффициентом фильтрации, который на порядок меньше, чем в остальной области. О величине скорости можно судить по густоте линий и оттенкам серого цвета, чем светлее тон, тем выше скорость, шкала показана справа. Мы видим, что жидкость слабо просачивается через места вкрапления неоднородностей, и линии тока в основном идут в обход них.

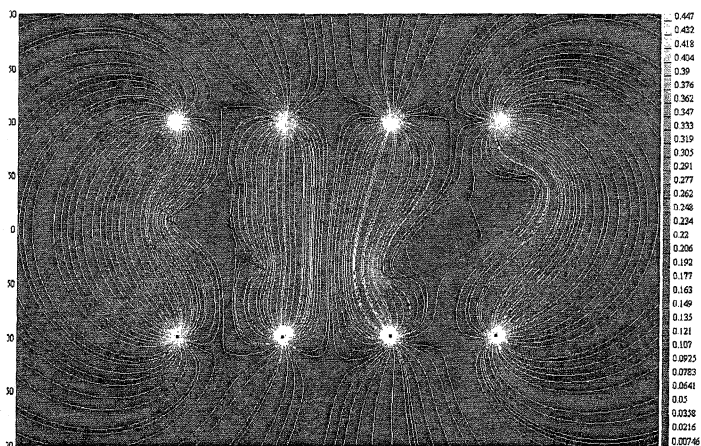


Рис. 3. Карта расчета поля скоростей и линий тока.

#### IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТАСОМАТОЗА

Теперь учтем, что при фильтрации растворов в пористой среде происходят процессы растворения, и образуется зона полного выщелачивания вокруг закачных скважин, которая разрастается со временем. Для расчета процессов растворения будем решать систему уравнений (8),(9) с использованием треугольной сетки и поля скоростей, рассчитанных в предыдущем пункте. Систему (8),(9) будем решать методом прямых, сводя ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно значений неизвестных функций в узлах сетки.

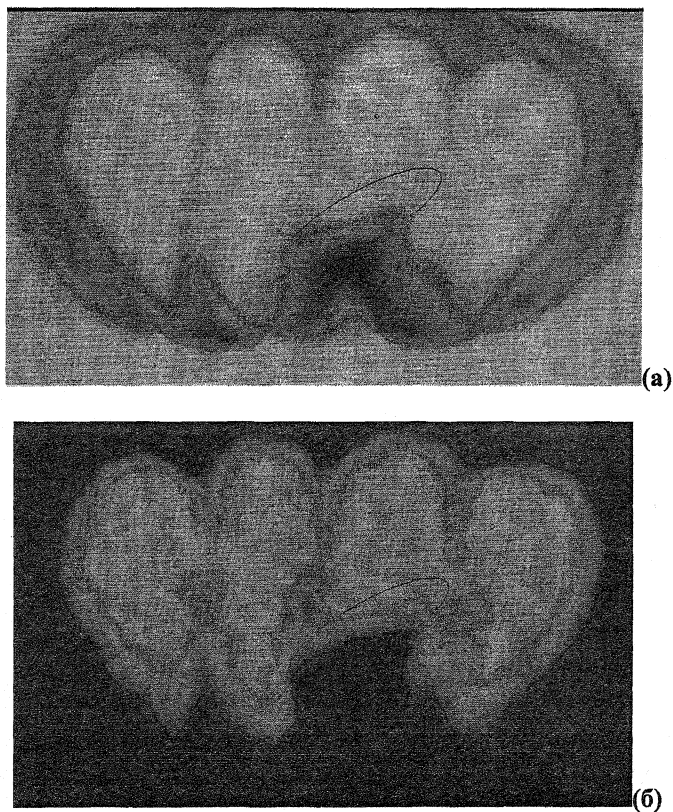


Рис. 4. Влияние зоны плохой проницаемости. а) Распределение концентрации минерала в растворе; б) Распределение концентрации минерала в пласте;  $t = 2000$ .

Для интегрирования полученной системы ОДУ будем использовать неявный метод Эйлера или метод Розенброка четвертого порядка с контролем точности и с переменным шагом по времени.

**1. Влияние зоны плохой проницаемости.** Рассмотрим неоднородный рудоносный слой, в котором есть небольшая область с плохой проницаемостью растворов. Исследуем влияние неоднородности такого типа на динамику подземного выщелачивания. На рис. 4 приведен пример расчета для случая, когда между 4-мя закачными и 4-мя откачными скважинами имеется зона плохой проницаемости в виде эллипса с коэффициентом фильтрации в 10 раз меньше, чем в остальной области. На рис. 4а показано оттенками серого цвета распределение концентрации минерала в растворе спустя 2000 единиц времени после начала фильтрации растворов от закачных скважин, расположенных сверху. Черный цвет на рисунке соответствует насыщенному раствору, светло-серый – чистому раствору; чем темнее цвет, тем насыщеннее раствор. Хорошо видны очертания более крутого переднего фронта продвижения растворов и пологого заднего фронта – границы зоны полного выщелачивания. На рис. 4б показано распределение минерала в твердой фазе. Светло-серый цвет соответствует отсутствию минерала в пласте, то есть его полному растворению, черный цвет означает, что растворение здесь еще не началось.

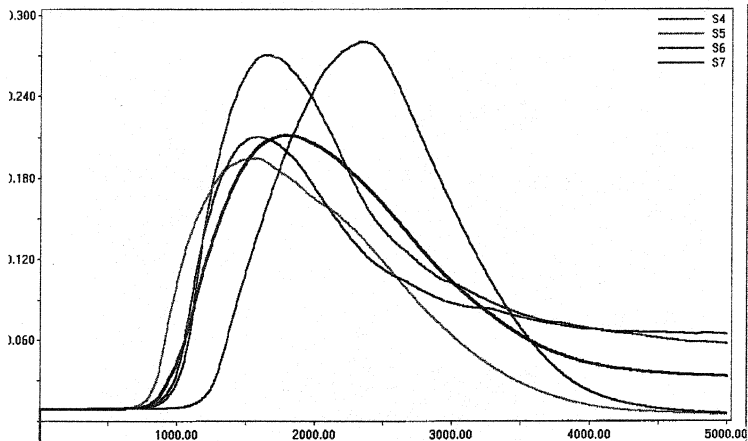


Рис. 4. в) Динамика извлечения растворенного минерала из скважин

Мы видим, что зона полного выщелачивания, подошла близко к тем откачным скважинам, на которые наличие зоны плохой проницаемости не оказывает влияния. Наоборот, в зоне плохой проницаемости и за ней находится область, где растворение еще не началось.

Таким образом, наличие зоны плохой проницаемости препятствует процессам растворения, и в пласте могут остаться значительные количества полезного ископаемого после остановки прокачки растворов. Изменение интенсивности извлечения растворенного минерала из каждой скважины со временем и динамика интегральной кривой (жирная черная линия) представлены на рис. 4в. Мы видим, что к моменту времени 4000 из двух скважин практически прекратилось извлечение растворенного минерала, а из двух других заметное извлечение продолжается. На эти две скважины влияет зона плохой проницаемости, процесс извлечения оказывается затянутым; кривые извлечения широкие, с невысокими максимумами и медленно спадающими «хвостами».

**2. Изменение коэффициента фильтрации в процессе выщелачивания. Образование промоин.** Процесс выщелачивания крайне не равновесен и зависит даже от небольших градиентов температуры, кристаллизационного давления, кислотности и других факторов. В результате, растворение одних минералов и осаждение других может происходить неравномерно как во времени, так и в пространстве, и изменять структуру пласта. При преобладании растворения могут образоваться большие поры и возникать промоины. И наоборот, при отложениях могут закупориваться поры и образовываться тромбы – зоны непротекания растворов. В модели это отражается в изменении коэффициента фильтрации. Изменение коэффициента фильтрации вызывает изменение поля скоростей жидкости, что в свою очередь влияет на дальнейшее изменение коэффициента фильтрации. Такая положительная обратная связь может приводить к образованию устойчивых русел, обходящих зоны залегания полезных ископаемых.

Простейшая модель, учитывающая изменение коэффициента фильтрации имеет вид:

$$\frac{\partial k(x, y, t)}{\partial t} = \gamma(x, y)(1 - c(x, y, t)). \quad (15)$$

где  $\gamma(x, y)$  – некоторый подгоночный коэффициент. Предполагается, что скорость изменения коэффициента фильтрации пропорциональна скорости растворения минерала (с противоположным знаком) (см. уравнение (9)).

Хотя коэффициент фильтрации в соответствии с уравнением (5) изменяется непрерывно, пересчет поля скоростей потока с новыми значениями коэффициента фильтрации производился только в те

моменты времени  $t_j$ , когда относительное максимальное изменение коэффициента фильтрации в некотором узле сетки  $i^*$  превышало некоторое пороговое значение  $\delta$ , т.е.

$$\max_i \left| \Delta k_{i^*}(t_j) / k_{i^*}(t_{j-1}) \right| \geq \delta, \quad (16)$$

где  $k_{i^*}$  – значение  $k$  в  $i^*$ -ом узле сетки, максимум по всем узлам,  $t_{j-1}$  – момент времени предыдущего пересчёта поля скоростей.

Для исследования влияния изменения коэффициента фильтрации в процессе выщелачивания рассмотрим следующий модельный пример. Пусть в однородном рудоносном пласте имеется только две скважины: закачная и откачная. Начальное поле скоростей для этого случая представлено на рис. 5.

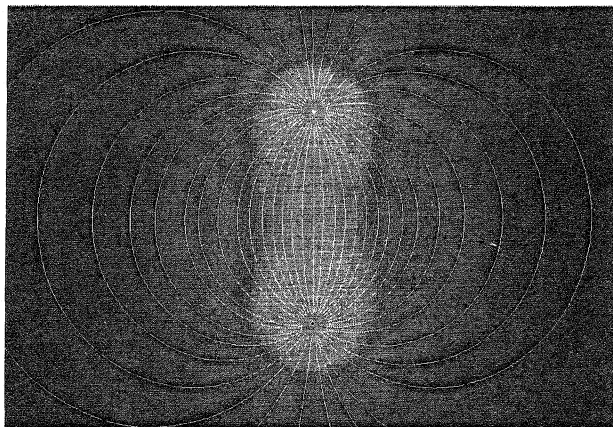


Рис. 5. Поле скоростей потока в начальный момент времени.

Если бы коэффициент фильтрации не изменялся в процессе подземного выщелачивания, то график извлечения минерала из откачной скважины имел бы вид, показанный на рис. 6а. Пусть коэффициент фильтрации изменяется со временем, и подгоночный коэффициент этого изменения в уравнении (15) в 10 раз больше коэффициента растворения в уравнении (9) в каждой точке области:  $\gamma = 10\beta$ . Начавшееся растворение увеличивает коэффициент фильтрации, а значит и скорость продвижения продуктивных растворов и ускоряет в целом процесс растворения. График извлечения в этом случае показан на рис. 6б. Мы видим, что характер увеличения добычи минерала из откачной скважины отличается от первого случая и идет быстрее.



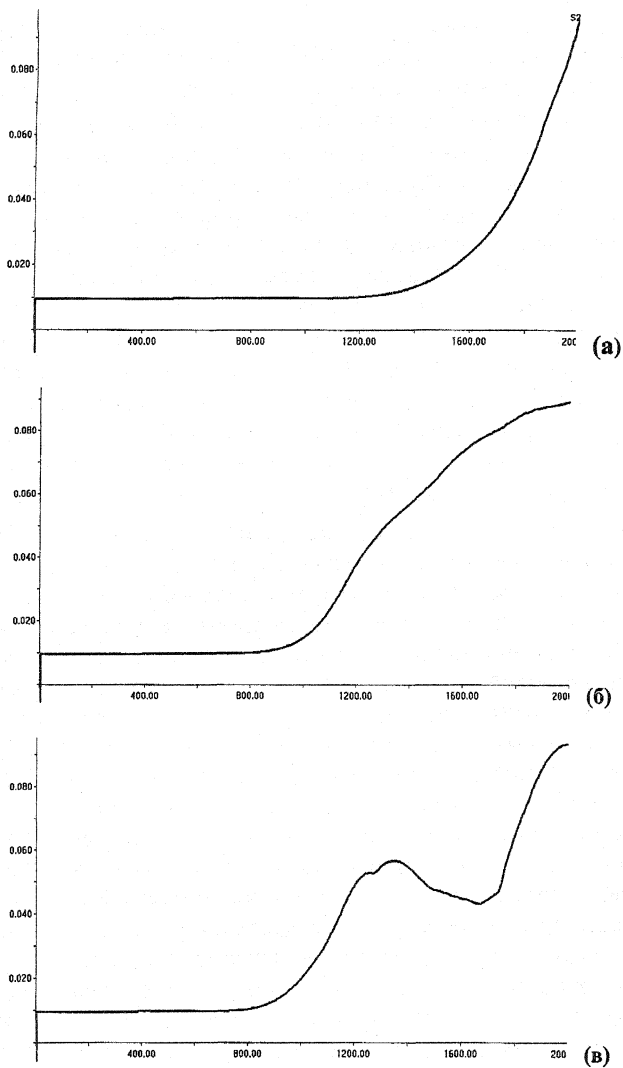


Рис. 6. Динамика извлечения минерала из откачной скважины  
 а) для однородного пласта с постоянным коэффициентом фильтрации;  
 б) для однородного пласта с изменяющимся коэффициентом фильтрации;  
 в) для неоднородного пласта с изменяющимся коэффициентом фильтрации.

Для усиления эффекта теперь предположим, что коэффициент фильтрации сильнее изменяется в области быстрых течений, и положим  $\gamma = 20\beta$  в узком прямоугольнике, содержащем прямую, соединяющую скважины; в остальной области по прежнему будет  $\gamma = 10\beta$ . Расчеты показали, что коэффициент фильтрации в выделенном прямоугольнике значительно становится больше, чем в остальной области, так что успевает образоваться русло, в которое устремляются растворы. Об этом говорит динамика извлечения минерала, представленная на рис. 6в. Обращает на себя немонотонное увеличение добычи на начальной стадии прокачки растворов. Первый локальный максимум на графике отвечает за ускоренное извлечение минерала из области, где  $\gamma = 20\beta$ . Следующий за максимумом спад обязан вкладу в извлечение чистого раствора, который быстро сочится по руслу, идущему по кратчайшему пути от закачной скважины к откачной. Дальнейшее увеличение добычи и наличие второго максимума на графике говорит о подходе основной массы растворенного минерала по другим линиям тока.

**3. Модель вторичного осаждения минерала в зонах с пониженным значением рН.** Выше мы изучали, как идут процессы растворения при фильтрации растворов в неоднородной пористой среде, как образуется и разрастается зона полного растворения. Однако, в процессе подземного выщелачивания может происходить не только растворение полезного ископаемого, но и его вторичное отложение. В работе [6] предложена математическая модель, описывающая процессы отложения минерала в зонах с пониженным значением рН, и проведено исследование модели в одномерном приближении. Теперь обобщим эту модель на двумерный случай и проведем серию расчетов.

Известно, что в пласте могут существовать отдельные зоны [1]-[3], которые имеют другие характеристики растворимости. Обычно наличие таких зон обусловлено геологическими особенностями строения пласта и связано с падением температуры или давления вдоль потока растворов. Поскольку градиенты температуры и давления вызывают аналогичные явления зональности, в модели мы будем характеризовать их влияние единым образом, считая, что кислотность растворов рН, определяющая растворение неоднородна вдоль течения. А именно, будем считать, что на карте области  $D$  имеется одна или несколько областей  $D_j$  с пониженным значением рН, в которых предельная (насыщенная) концентрация растворенного минерала существенно меньше, чем во всей остальной области:

$$C_n = \begin{cases} C_{n0}, & (x, y) \notin D_j, (x, y) \in D_0 \\ C_{nj}, & (x, y) \in D_j, j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad C_{nj} < C_{n0} \quad (17)$$

Рассмотрим, как будет происходить процесс фильтрации растворов в среде с переменной кислотностью. Вблизи закачных скважин, из которых вытекает чистый раствор, процесс растворения идет быстро, и концентрация в движущемся растворе быстро достигает насыщенной, равной  $C_{n0}$ . Как только концентрация достигла насыщения, процесс растворения прекращается, и фильтрация растворов по линиям тока идет без изменения концентрации. Однако, когда раствор достигает зоны с пониженной кислотностью, в которой концентрация  $C_{n1}$  насыщения меньше чем концентрация в растворе  $C_{n0}$ , пойдет процесс отложения. Будем считать, что в процессе отложения будет происходить рост имеющихся зерен минерала. Однако, рост зерен будет ограничен, так как вызовет незначительное уменьшение пористости (закупорку просветов), и давление в растворе резко возрастет из-за не сжимаемости жидкости. Таким образом, рост зерна в данном месте будет происходить до тех пор, пока увеличение давления в растворе не будет препятствовать отложению. В модели этот факт будет учитываться тем, что радиус шарика при отложении может расти только до  $\rho_{\max}$ , не больше 15 – 20 процентов от первоначального размера.

Уравнения модели (8),(9), описывающие процессы метасоматоза в фильтрационном потоке жидкости в среде с переменной кислотностью (17) принимают вид:

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla c(x, y, t)) = \tilde{\alpha} \beta_{\pm} \rho^2 (C_n - c(x, y, t)), \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho(x, y, t)}{\partial t} = -\beta_{\pm} (C_n - c(x, y, t)), \quad (19)$$

$$\beta_{\pm} = \begin{cases} \beta_+, & \text{если } c < C_n; \\ \beta_- (1 - \rho / \rho_{\max})^2, & \text{если } c > C_n; \end{cases}$$

где  $\beta_{\pm}$  – константы скоростей растворения и осаждения минерала в разных областях,  $\tilde{\alpha} = 3\eta C_p$  – коэффициент, характеризующий запасы.

**4. Динамика процессов метасоматоза в среде с переменной кислотностью. Модельные расчеты.** Исследуем теперь на конкретных примерах, как влияет наличие области с пониженной кислотностью на динамику процессов подземного выщелачивания. Рассмотрим пласт, содержащий только одну область  $D_1$ , находящуюся между двумя рядами скважин, в которой для усиления эффекта насыщенная концентрация значительно ниже (например, в десять раз), чем в остальном пласте. Исследуем два случая: в первом случае эта область находится близко к откачным скважинам, как показано на рис. 7, во втором – близко к

закачным. Предполагается, что пористость и коэффициент фильтрации одинаковы по всему пласту, и не изменяются в ходе добычи. Естественно предположить, что выделенная область  $D_1$  с пониженным значением  $pH$  существовала и в далекие времена, когда шли геологические процессы, тогда в ней могло отложиться больше полезного минерала. Положим, что перед началом прокачки растворов начальная концентрация зерен полезного минерала в зоне  $D_1$  в три раза выше, чем в остальной области.

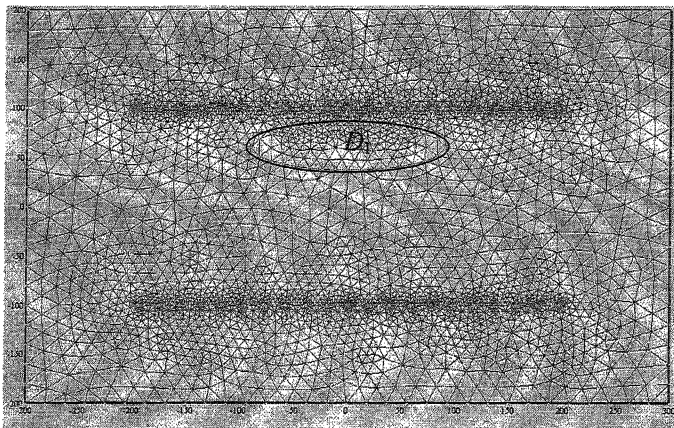


Рис. 7. Триангуляция области добычи.

Расчеты начинаются с рисования карты области и задания всех параметров. Далее проводится разбиение области на треугольники и рассчитывается поле скоростей. Результат триангуляции для рассматриваемого случая приведен на рис. 7. Поскольку коэффициент фильтрации и пористость одинаковы во всех точках расчетной области, то наличие области  $D_1$  не отражается на карте линий тока.

Наличие области с пониженным значением  $pH$  не оказывает влияния на процесс подземного выщелачивания до тех пор, пока передний фронт движения продуктивных растворов, в которых концентрация равна  $C_{n0}$ , не достигнет этой области. В рассматриваемом примере это произошло при  $t = 2000$ . Поскольку концентрация  $C_{n0}$  больше предельной концентрации  $C_{n1}$ , то в области  $D_1$  началось выпадение минерала из раствора в твердую фазу, и концентрация в растворе стала уменьшаться до значения  $C_{n1}$ . По выходе растворов из области  $D_1$  опять началось растворение, и концентрация минерала в растворе стала увеличиваться. Если бы зона  $D_1$  находилась далеко от

откачных скважин, то концентрация в растворе достигла бы предельного значения  $C_{n0}$ . Но в рассматриваемом случае растворы, выйдя из области  $D_1$  быстро дошли до откачных скважин, и концентрация растворенного минерала в них не успела достигнуть предельного значения. По линиям тока, обходящим зону  $D_1$ , движение растворов с концентрацией  $C_{n0}$  продолжается вплоть до откачных скважин.

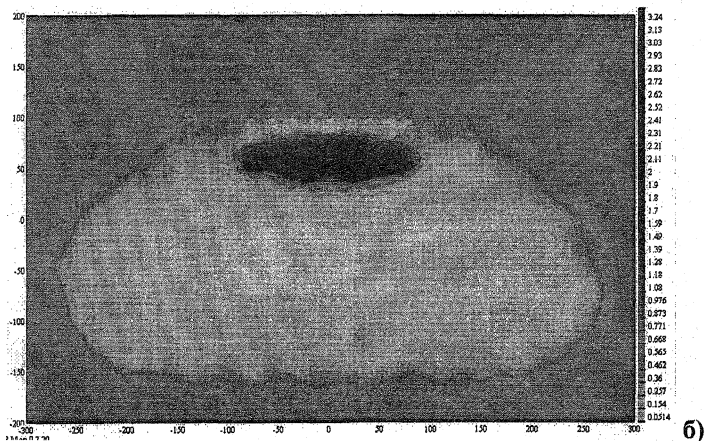
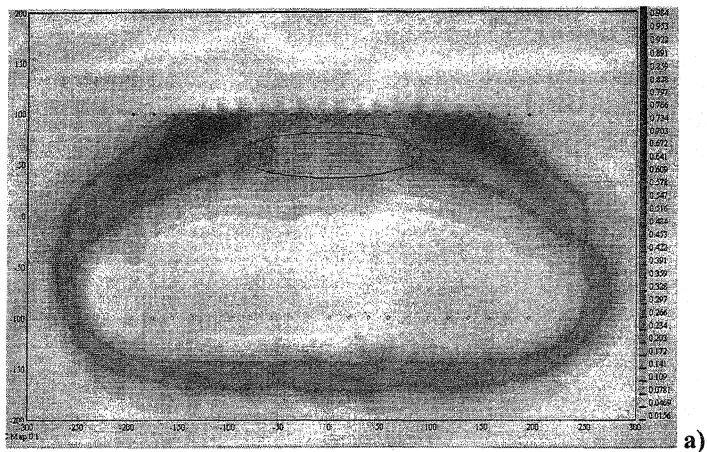


Рис. 8. Карта выщелачивания при  $t = 3000$ :  
 а) Распределение концентрации минерала в растворе;  
 б) Распределение запасов минерала в пласте.

Такая динамика имела место пока задний фронт движения растворов, соответствующий границе полного растворения, где концентрация равна нулю, не подошла к зоне  $D_1$ . Тогда и в этой области началось растворение.

На рис. 8 оттенками серого цвета представлены мгновенные карты процессов выщелачивания при  $t=3000$ ; на рис. 8а показано распределение концентрации минерала в растворе, а на рис 8б – распределение концентрации минерала в пласте. Чем темнее тон, тем выше концентрация. Из рис. 8а хорошо видно, что зона насыщенной концентрации  $C_{n0}$ , отмеченная черным цветом, дошла до ряда откачивающих скважин. В области  $D_1$  с пониженным значением рН концентрация в растворе низкая, здесь идет отложение. Первоначальные запасы минерала, как показали расчеты, к этому моменту времени в области  $D_1$  увеличились почти на 10%. Увеличение концентрации минерала в пласте хорошо видно на рис. 8б, где область  $D_1$  окрашена в черный цвет. Светло-серый цвет соответствует зоне полного растворения. Мы видим, что она за время прокачки растворов сильно разрослась и вплотную приблизилась к области  $D_1$ . Это означает, что вскоре и здесь начнется растворение.

Численные расчеты показали, что за время  $t=5000$  во всей области между рядами скважин произошло полное выщелачивание за исключением области  $D_1$ , где запасы минерала уменьшились всего на 6% по сравнению с первоначальными.

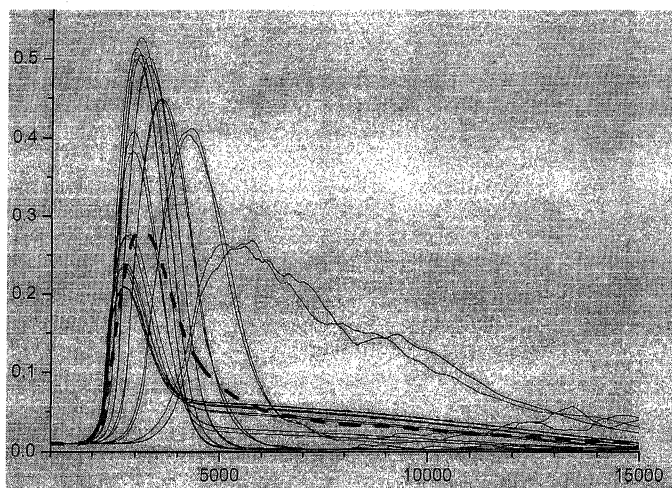


Рис. 9. Динамика извлечения минерала из откачных скважин.

На рис. 9 показаны графики извлекаемой концентрации минерала в растворе от времени для каждой из 21 откачных скважин. Пунктирная линия показывает динамику средней кривой по скважинам. Из рисунка видно, что динамика извлечения из отдельных скважин сильно отличается от средней линии.

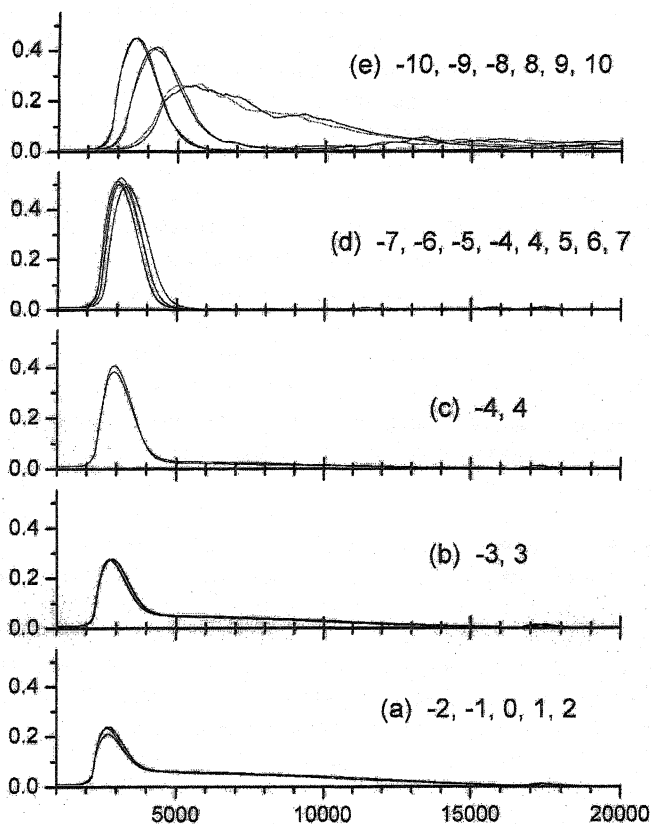


Рис. 10. Динамика извлечения урана в разных группах скважин.

На рис. 10 а-е представлены отдельно графики извлечения для пяти групп скважин со схожей динамикой. Понятно, что динамика извлечения минерала зависит от положения откачной скважины относительно выделенной области  $D_1$ . В рассматриваемом примере нумерация скважин ведется от центральной скважины в обе стороны.

Для скважин из группы (а) с номерами -2,-1,0,1,2, расположенных в «тени» области  $D_1$ , характерны самые низкие значения пиковой концентрации и наличие длинного «хвоста» на кривой извлечения. Длинный «хвост» соответствует медленному растворению минерала в области  $D_1$ , когда до нее дошел задний фронт области выщелачивания. Низкий максимум на кривой извлечения объясняется невысокой концентрацией минерала в растворе достигающего откачной скважины по линиям тока, проходящих через область с низкой кислотностью.

Две скважины из группы (b) с номерами -3, 3 расположены в достаточно «густой полутени» области  $D_1$ . Динамика извлечения здесь похожа на динамику извлечения из скважин группы (а), однако пиковая концентрация несколько выше за счет боковых потоков раствора, идущих в обход области с низкой кислотностью. В скважины из группы (с), имеющих номера -4, 4 попадает совсем немного линий тока, проходящих через область  $D_1$ , поэтому пиковые концентрации здесь еще выше, а «хвост» спадает быстрее.

Большая группа (d) из 8 скважин практически не ощущает наличия области  $D_1$ . Здесь динамика извлечения соответствует однородному пласту и характеризуется относительно высоким и острым пиком интенсивности на графике, быстро спадающим со временем.

На динамику извлечения из скважин периферийной группы (е) с номерами -10, -9, -8, 8, 9, 10, оказывает влияние их расположение в конце ряда. Большая часть линий тока здесь, особенно для двух крайних скважин, сильно искривляется и удлиняется, а средняя скорость фильтрации уменьшается, соответственно увеличивается время продвижения растворов от закачных скважин к откачным. В результате пики интенсивности извлечения оказываются заметно сдвинутыми по времени, и появляются длинные «хвосты» на графиках, отвечающие за небольшой «сбор» минерала с периферийных областей.

На рис. 11 приведены графики относительного изменения со временем запасов минерала в области  $D_0$  с нормальным значением рН (линия 1) и в области  $D_1$  с пониженным значением кислотности (линия 2). Мы видим, что извлечение из области с низким значением рН оказалось очень затянутым во времени, и началось только тогда, когда из основной области извлекли почти половину запасов. Прекращают добычу, как правило, когда интегральная кривая интенсивности извлечения падает от максимума на 70%. В приведенном расчете это соответствует времени  $t=5000$ . Из графиков на рис. 11 видно, что в этом случае в пласте могут остаться практически значимые запасы полезного ископаемого. Выходом может стать бурение дополнительных скважин и изъятие оставшегося полезного ископаемого.



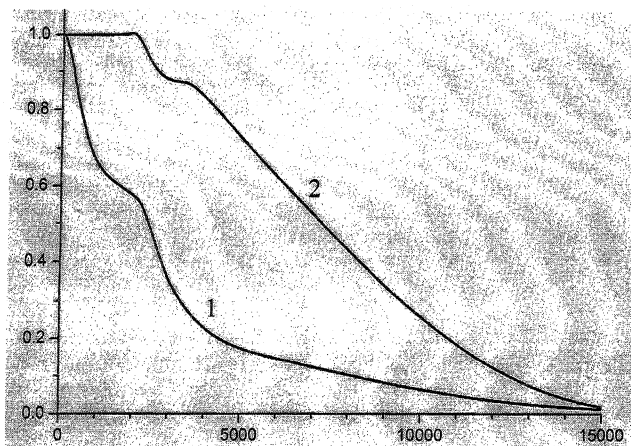


Рис. 11. Динамика относительного изменения запасов в пласте в области  $D_0$  (кривая 1) и в области  $D_1$  (кривая 2).

Теперь рассмотрим другой случай, когда аналогичная область с пониженной кислотностью  $D_1$  расположена вблизи закачных скважин.

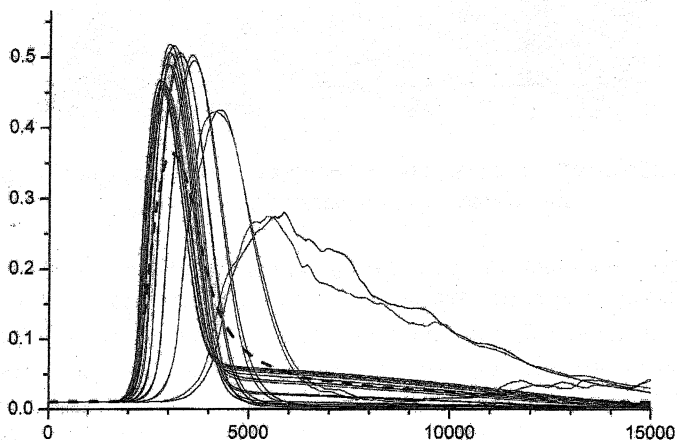


Рис. 12. Динамика извлечения минерала из откачных скважин.

На рис. 12 приведены графики зависимости интенсивности сбора минерала от времени из каждой скважины и динамика усредненной кривой для второго случая. Из этих графиков видно, что также как в

первом случае можно выделить группу откачных скважин, находящихся в «тени» области  $D_1$ . Для них кривые извлечения также имеют несколько меньший пик, и главное отличаются наличием длинного «хвоста». Именно длинный «хвост», описывающий за медленное извлечение с низкой концентрацией говорит о существовании области с пониженной кислотностью, в которой происходит более медленное растворение. Расстояние особой зоны до откачной скважины влияет на величину пиковой концентрации на графике извлечения; чем ниже пиковая концентрация по сравнению со средним значением, тем ближе к откачной скважине расположена зона.

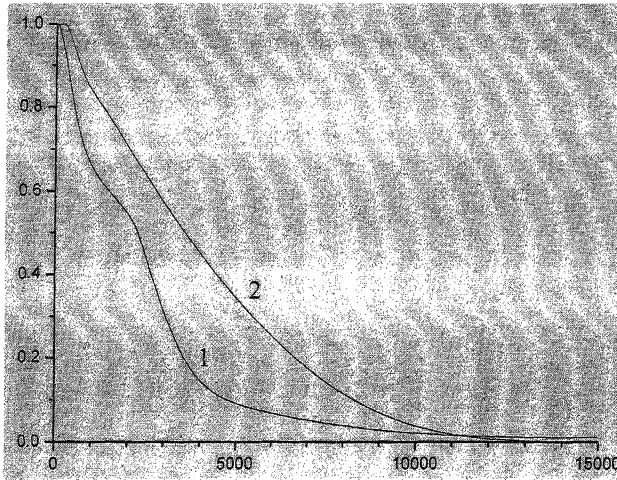


Рис. 13. Динамика относительного изменения запасов в пласте в области  $D_0$  (кривая 1) и в области  $D_1$  (кривая 2).

Для сравнения на рис. 13 приведены графики относительного изменения со временем запасов минерала в области  $D_0$  (линия 1) и в области  $D_1$  (линия 2) для второго случая. Мы видим, что из области с пониженным значением рН извлечение полезного минерала происходит медленнее, чем из остальной области, но по сравнению с первым случаем влияние области  $D_1$  слабее. То есть чем ближе к откачным скважинам находится зона с пониженным рН, тем больше влияния она оказывает на процесс извлечения, тем дольше идет извлечение из этой зоны полезного ископаемого, и тем больше вероятность того, что процесс выщелачивания будет остановлен, когда в этой зоне останутся значительные запасы минерала.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена математическая модель процессов подземного выщелачивания при фильтрации растворов в пористой среде. Она описывает движение растворов от закачных скважин к откачным, процессы растворения и процессы вторичного отложения в областях с пониженным значением pH. Разработан численный алгоритм решения задачи на плоскости для общего случая неоднородной среды, имеющий области с различными неоднородностями. Модель также учитывает медленное изменение со временем некоторых параметров процесса, например, пористости и коэффициента фильтрации. Показано, что модель качественно описывает все основные закономерности процессов подземного выщелачивания, позволяет детально изучить и понять динамику этих процессов. Кроме того, она позволяет восполнить неполноту данных геологоразведки, и по кривым извлечения из разных скважин определить примерное место нахождения той или иной неоднородности. С помощью математического моделирования возможно оптимизировать процесс добычи полезных ископаемых способом подземного выщелачивания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Д.С. Коржинский* Теория метасоматической зональности. –М.: Наука, 1969, 112с.
2. *Е.А. Толстов, Д.Е. Толстов* Физико-химические геотехнологии. Освоения месторождений урана и золота в кызылкумском регионе. –М.: Геоинформцентр, 2002, 277 с.
3. Справочник по геотехнологии добычи
4. *А.А. Канцель, Е.С. Куркина* Моделирование процессов растворения в фильтрационном потоке жидкости //Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВмиК МГУ им. М.В. Ломоносова. М.:МАКС Пресс, 2005, № 21, С. 30-47.
5. *В.И. Дмитриев, А.А. Канцель, Е.С. Куркина* Математическое моделирование процессов инфильтрационного метасоматоза в пористой среде //Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВмиК МГУ им. М.В. Ломоносова. М.:МАКС Пресс, 2007, № 23, С. 30-47.
6. *П.Я. Кочина, Н.Н. Кочина* Гидродинамика подземных вод и вопросы орошения. –М.: Физматлит, 1994, 240 с.