В.И. Дмитриев[1], Е.С. Куркина[1]

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВВП И ГОСУДАРСТВЕННОГО ДОЛГА[*]

Введение

В последнее время в связи с процессом всемирной глобализации и свободным перемещением капиталов в росте ВВП страны все большую роль начинают играть иностранные инвестиции. Эффективное использование иностранных займов может стать мощным фактором экономического роста, дающим дополнительные финансовые ресурсы и сглаживающим спады экономики. С другой стороны, иностранные инвестиции приводят к образованию государственного долга (ГД) и обременительной обязанности его обслуживания. Повышение государственного долга до критической отметки может стать серьезным негативным фактором не только экономического, но и политического значения. Возникает необходимость управления и прогнозирования государственного долга. Адекватная математическая модель может сыграть большую роль в решении этой проблемы и помочь выработать оптимальную стратегию в привлечении иностранных инвестиций.

В работе [1] была предложена математическая модель, описывающая взаимосвязь роста ВВП с изменением государственного долга (ГД). В основе ее лежит система двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Коэффициенты этой системы считались постоянными. Было теоретически исследовано влияние различных параметров на динамику роста ВВП и ГД, таких как объем инвестиций, их эффективность, объем накопленного государственного долга, расходы государства на социальные нужды и др. В частности, были определены условия, при которых иностранные займы, ведущие к росту объема ГД, могут стать мощным фактором развития экономики страны.

В настоящей работе данная математическая модель применяется для описания реальных статистических данных. Считается, что коэффициенты модели в общем случае могут быть переменными и

[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК

[*]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект: 18-01-00619.

изменяться каждый год. Считается также, что модель с хорошей точностью описывает кривые изменения ВВП и ГД. Коэффициенты модели неизвестны, их требуется найти. Задача восстановления коэффициентов системы по приближенно заданному решению (статистическим данным) является обратной задачей. Известно, что решение обратной задачи – неустойчиво, то есть системы с сильно отличающимися коэффициентами могут давать очень близкие результаты при решении прямой задачи. Для решения подобных задач применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [2], который показал свою эффективность на многих обратных задачах.

В настоящей работе на основе метода регуляризации А.Н. Тихонова разработан алгоритм нахождения коэффициентов рассматриваемой модели по статистическим данным ежегодных значений ВВП и ГД на некотором отрезке времени. Алгоритм отработан на модельных примерах. Путем решения прямой и обратной задач для линейной системы ОДУ показано, что переменные коэффициенты восстанавливаются с хорошей точностью.

Разработанный алгоритм применяется для нахождения коэффициентов рассматриваемой модели для нескольких экономически развитых стран. Анализируется, как изменение коэффициентов влияет на динамику роста ВВП и ГД.

1. Постановка обратной задачи. Алгоритм восстановления коэффициентов линейной системы ОДУ второго порядка.

1.1. ***Обратная задача нахождения коэффициентов линейной системы.*** Рассмотрим линейную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени t:

$$\frac{dQ}{dt} = a_{11}(t)Q + a_{12}(t)B, \tag{1.1}$$

$$\frac{dB}{dt} = a_{21}(t)Q + a_{22}(t)B, \tag{1.2}$$

Считается, что эта система с хорошей точностью описывает статистические данные на некотором отрезке времени, то есть решения этой системы известны приближенно. Требуется найти коэффициенты $a_{ij}(t)$ этого уравнения, то есть решить обратную задачу. Такие задачи являются некорректно поставленными, поскольку имеют неединственное решение, и системы с сильно отличающимися коэффициентами могут давать близкие результаты при решении прямой задачи. Для нахождения единственного решения обратной задачи обычно применяют метод регуляризации А.Н. Тихонова [1]. Суть этого метода состоит в построении некоторого регуляризирующего оператора, зависящего от параметра регуляризации, и не позволяющего сильно изменяться искомым коэффициентам. Функции, описывающие регуляризирующий оператор, могут быть разными в зависимости от конкретной рассматриваемой задачи.

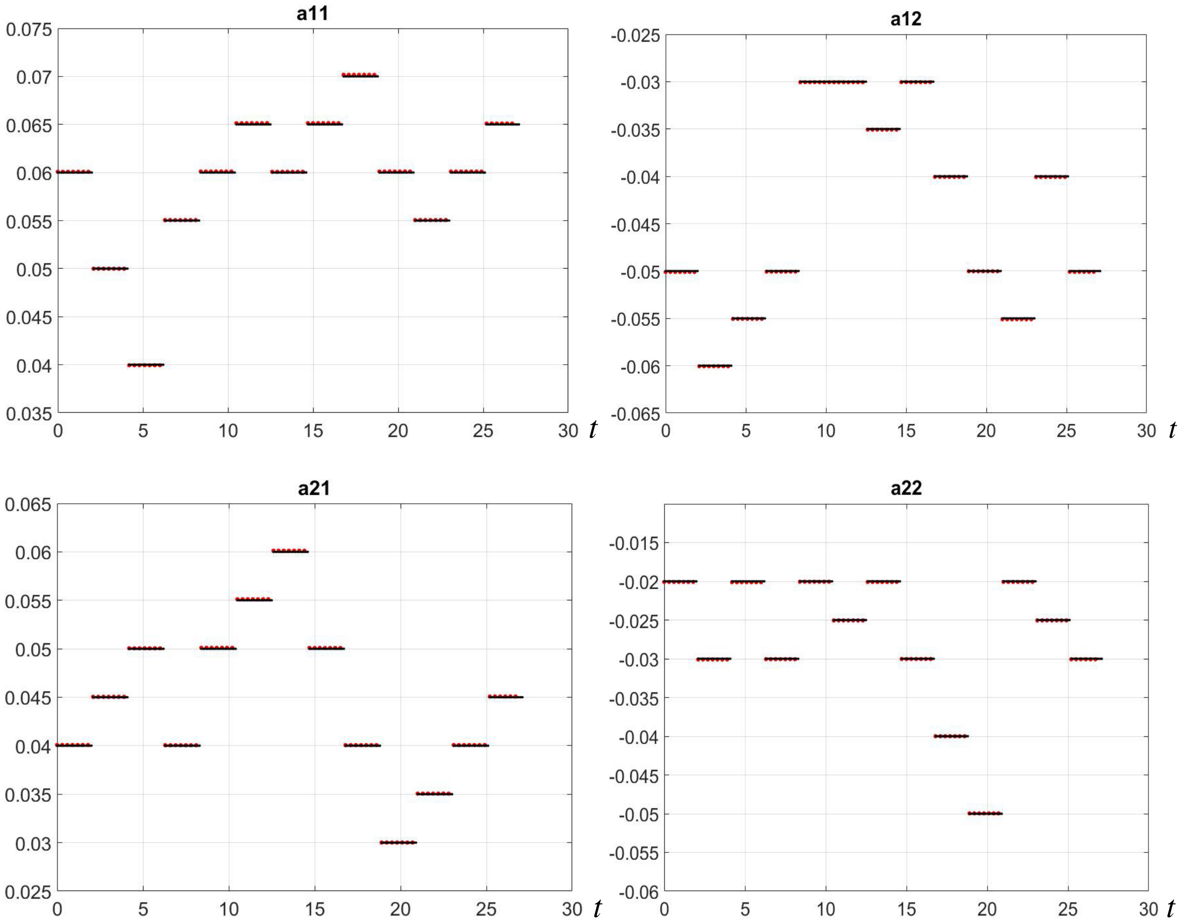


Рис. 1. Коэффициенты линейной системы (1).

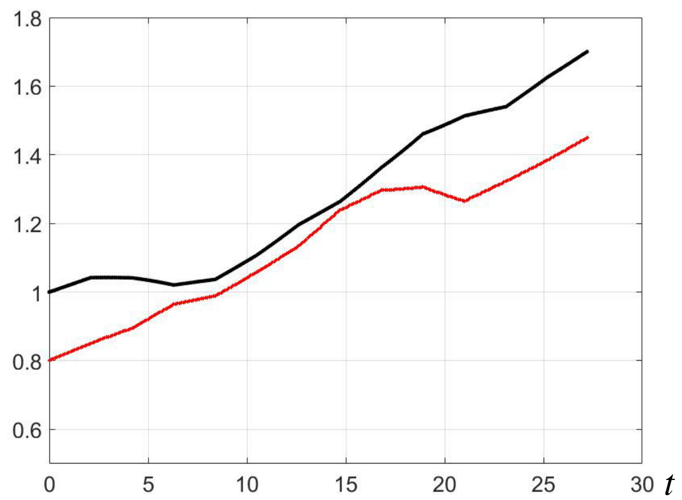


Рис. 2. Решение системы (1) с кусочно-постоянными коэффициентами.

Для выбора регуляризирующего оператора и отработки алгоритма нахождения коэффициентов системы (1) рассмотрим две модельные системы, для которых будем решать прямую и обратную задачи, то есть будем учиться восстанавливать известные коэффициенты. Значения параметров моделей будем брать характерными для систем, описывающих совместный рост ВВП и ГД.

В первой модельной системе коэффициенты положим кусочно-постоянными, как показано на рис. 1. Проинтегрируем систему методом Рунге-Кутты второго порядка с шагом $\Delta t = 0.1$ на отрезке времени $t \in [0,27]$. Считаем, что время измеряется в годах, каждый год делится на 10 равных частей, коэффициенты изменяются каждые два года скачком. Начальные значения функций Q и B положим равными: $Q(0) = 1$, $B(0) = 0.8$. Графики, полученного численного решения, представлены на рис. 2.

Теперь приступим к решению обратной задачи. По известному решению, заданному в 271 точке, восстановим коэффициенты уравнения (1). Для нахождения коэффициентов $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ и Q_0 и B_0 поступим следующим образом. Разобьем весь интервал интегрирования на отрезки, где будем считать коэффициенты постоянными. В свою очередь каждый из этих отрезок разобьем на N частей и на каждом отрезке решение уравнений запишем в виде:

$$Q(t_j) = Q_0 + a_{11}\int_{t_0}^{t_j} Q(\tau)d\tau + a_{12}\int_{t_0}^{t_j} B(\tau)d\tau, \tag{2.1}$$

$$B(t_j) = B_0 + a_{21}\int_{t_0}^{t_j} Q(\tau)d\tau + a_{22}\int_{t_0}^{t_j} B(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Значения решений системы в левой части выражений (2) заменим на статистические данные, которые обозначим через G_j и D_j, $j = 0,1,\dots,N$, заданные в моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_N$. G_j – это приближенное значение функции $Q(t_j)$, а D_j – функции $B(t_j)$. Интегралы от точного решения системы (1), входящие в правую часть выражений (2) заменим на интегралы от статистических данных, которые вычислим методом трапеций. Получим:

$$IQ_j = IQ(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} Q(\tau)d\tau \approx \int_{t_0}^{t_j} G(\tau)d\tau \approx \sum_{j=1}^{N} 0.5(G_j + G_{j-1})\Delta t, \tag{3.1}$$

$$IB_j = IB(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} B(\tau)d\tau \approx \int_{t_0}^{t_j} D(\tau)d\tau \approx \sum_{j=1}^{N} 0.5(D_j + D_{j-1})\Delta t. \tag{3.2}$$

Коэффициенты $a_{ij}(t)$ найдем методом наименьших квадратов, так чтобы они наилучшим образом удовлетворяли уравнениям (2) для статистических данных. Найдем сумму квадратов отклонений:

$$SQ = \sum_{j=0}^{N}(G_j - a_{11}IQ_j - a_{12}IB_j - Q_0)^2, \tag{4.1}$$

$$SB = \sum_{j=0}^{N}(B_j - a_{21}IQ_j - a_{22}IB_j - B_0)^2. \tag{4.2}$$

Дифференцируя функции SQ и SB по параметрам $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$, Q_0 и B_0 и приравнивая частные производные к нулю, получим две линейные системы третьего порядка с одной и той же матрицей коэффициентов и разными правыми частями. Решая эти системы на каждом отрезке, найдем искомые параметры $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$, Q_0 и B_0.

Если решения системы известны с хорошей точностью, например, как в рассматриваемом случае, то и коэффициенты восстанавливаются с хорошей точностью. На рис. 1 точками изображены восстановленные коэффициенты. Мы видим, что они практически сливаются с заданными значениями. Здесь каждый отрезок, где коэффициенты постоянные, содержит 21 точку. Каждый такой отрезок в свою очередь разбивается на более мелкие отрезки, содержащие три и более точек (два и более интервалов), в которых описанным методом находятся коэффициенты a_{ij}. На рис. 1 точками изображены найденные коэффициенты при разбиении отрезков на минимальные отрезки, содержащие три точки. На рис. 3 представлены результаты расчетов для одного из коэффициентов a_{11} (изображены точками) для случая разбиения на максимальные отрезки, содержащие по 21 точке. Мы видим, что значения восстановленных коэффициентов практически совпадают со значениями исходных коэффициентов.

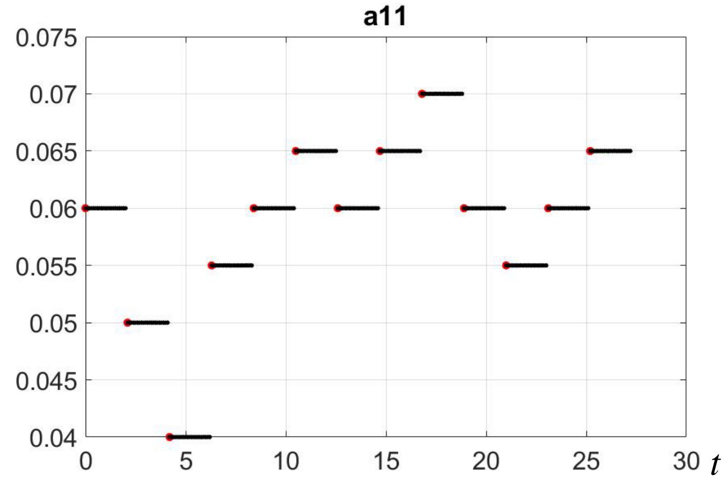


Рис. 3. Коэффициент a_{11} линейной системы (1) – сплошная линия и восстановленный коэффициент – точки в левой части отрезков.

Теперь усложним задачу коэффициенты уравнения (1) слегка (не более одного процента) случайным образом разбросаем вокруг среднего значения. На рис. 4 представлен вид одного их коэффициентов a_{11} (изображен сплошной слегка волнистой линией). Численно тем же методом проинтегрируем систему (1) с новым набором коэффициентов и получим «статистические данные». По этим «статистическим данным» восстановим коэффициенты системы (1) указанным выше способом. Результаты для коэффициента a_{11} изображены на рис. 4 точками. Мы видим, что вычисленный коэффициент изменяется скачками и не соответствует заданному коэффициенту. То же самое мы наблюдаем для других коэффициентов модели: значения коэффициентов резко изменяются скачками, а решения системы (1) с этими неправильными осциллирующими коэффициентами очень хорошо описывают «статистические данные». Таким образом, для восстановления исходных коэффициентов с хорошей точностью требуется применение метода регуляризации.

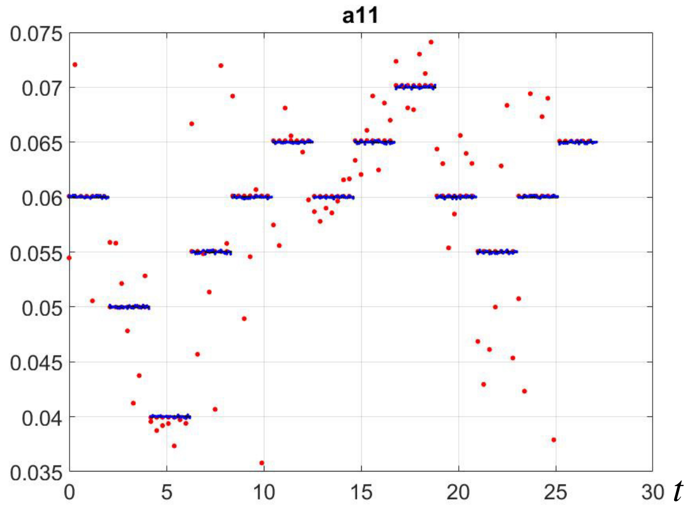
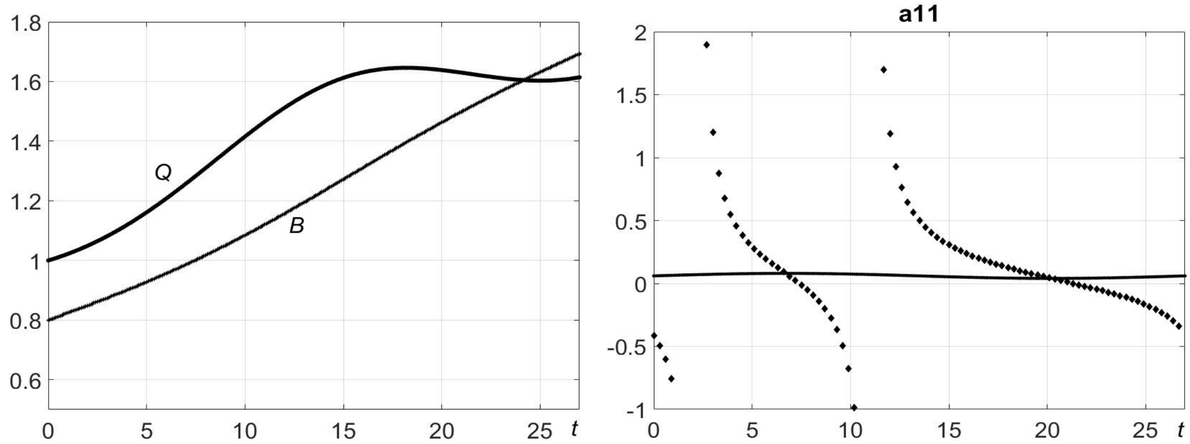


Рис. 4. Коэффициент a_{11} линейной системы (1) – сплошная слегка волнистая линия и восстановленный коэффициент без регуляризации изображен точками.

Но прежде, чем описать предложенный метод регуляризации, рассмотрим еще одну модельную систему (1), в которой один из коэффициентов $a_{11}(t)$ плавно изменяется по закону синуса вокруг некоторого среднего значения, а остальные коэффициенты – постоянные:

$$a_{11}(t) = a_0 + \delta \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T_{max}}\right), \quad a_0 = 0.06, \ \delta = 0.02, \tag{5}$$

$$a_{12} = -0.05, \quad a_{21} = 0.04, \quad a_{22} = -0.02.$$



a) ***b***)

Рис. 5 ***a***) Решение системы (1); ***b***) Коэффициент a_{11}, заданный – сплошная линия и восстановленный без регуляризации изображен точками.

На рис.5 *а* показаны решения системы для этого случая, полученные путем интегрирования системы (1) методом Рунге-Кутты второго порядка с шагом $\Delta t = 0.1$ на отрезке времени $t \in [0,27]$. Принимая вычисленные решения за известные статистические данные, попробуем восстановить коэффициенты системы, описанным выше образом. Для этого разобьем весь отрезок наблюдения на мелкие отрезки времени $\Delta t = 0.2$, содержащие три точки наблюдения, где коэффициенты будем считать постоянными.

На рис.5b показан вид заданного коэффициента $a_{11}(t)$ (5) сплошной линией и вычисленного коэффициента – точками. Мы видим, что восстановить коэффициент $a_{11}(t)$ без регуляризации не удалось. Вычисленный коэффициент изменяется от значения -13 до значения 27 и очень далек от исходного коэффициента. Остальные коэффициенты a_{12}, a_{21}, a_{22} также скачут, меняя знаки, и далеки от исходных постоянных коэффициентов. Еще раз отметим, что решения системы ОДУ (1) с этими неправильными коэффициентами очень хорошо описывают решения исходной системы, как показано на рис. 5a.

Таким образом, возникает проблема выбора регуляризирующего оператора и разработки алгоритма для восстановления исходных коэффициентов линейной системы ОДУ (1) с хорошей точностью.

1.2. *Метод регуляризации для восстановления исходных коэффициентов линейной системы.* Для того, чтобы восстановить исходные коэффициенты системы (1), применим метод регуляризации. Потребуем, чтобы коэффициенты изменялись плавно, то есть потребуем ограниченности нормы производной коэффициентов по времени. Поступим следующим образом. Разобьём рассматриваемый отрезок времени на более мелкие отрезки Δt_i $(i = 1, \dots, K)$, где мы будем считать коэффициенты $a_{ij}(t)$ постоянными. На каждый из этих отрезков Δt_i попадает $N + 1$ точка наблюдения. Напишем выражения для сумм, в которые входят суммы квадратов отклонений от экспериментальных данных и квадраты разности между соседними коэффициентами:

$$SQ = \sum_{i=2}^{K} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N} \left(G_j - a_{11}(i)IQ_j - a_{12}(i)IB_j - Q_0(i)\right)^2 + \\ r_1\left(a_{11}(i) - a_{11}(i-1)\right)^2 + r_2\left(a_{12}(i) - a_{12}(i-1)\right)^2 \end{pmatrix}, \qquad (6.1)$$

$$SB = \sum_{i=2}^{K} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{N} \left(D_j - a_{21}(i)IQ_j - a_{22}(i)IB_j - B_0(i)\right)^2 + \\ r_1\left(a_{11}(i) - a_{11}(i-1)\right)^2 + r_2\left(a_{12}(i) - a_{12}(i-1)\right)^2 \end{pmatrix}, \qquad (6.2)$$

где r_1, r_2 r_3, r_4 – параметры регуляризации, которые могут быть одинаковыми и в общем случае – разными, и которые надо определить.

Для нахождения коэффициентов $a_{ij}(i)$, продифференцируем суммы (6.1) и (6.2) по коэффициентам a_{ij} и приравняем к нулю. Получим две системы линейных алгебраических уравнений с ленточной 5-ти диагональной матрицей **M** размером **M**$(3K\times3K)$ и разными правыми частями. Решая первую систему, найдем неизвестные $a_{11}(i)$, $a_{12}(i)$ и $Q_0(i)$, а из второй – $a_{21}(i)$, $a_{22}(i)$ и $B_0(i)$, $(i = 1, \dots, K)$.

Для определения параметров регуляризации поступим следующим образом. Начальные значения параметров регуляризации положим некоторыми, вытекающими из предыдущего опыта или определенных оценок так, чтобы они сглаживали изменение коэффициентов. Если параметры регуляризации выбрать большими, то сглаживание будет очень сильным, и с такими коэффициентами уравнения модели (1) будут не лучшим образом описывать экспериментальные данные. Оптимальные значения параметров регуляризации будем определять, анализируя погрешность модели. Для этого на каждом отрезке Δt_i, используя найденные коэффициенты $a_{ij}(i)$ и начальные данные $Q_0(i)$ и $B_0(i)$, проинтегрируем уравнения модели (1) и найдем погрешность модели, как среднеквадратичное отклонение решений модели от статистических данных:

$$Z_1 = \left(\sum_j \left(G_j(t_j) - Q_j(t_j)\right)^2 /n\right)^{1/2}, \qquad (6.1)$$

$$Z_2 = \left(\sum_j \left(D_j(t_j) - B_j(t_j)\right)^2 /n\right)^{1/2}, \qquad (6.2)$$

где n – это количество точек наблюдения, в которых решение модели сравнивается со статистическими данными, Z_1 и Z_2 – это погрешности модели для функций Q и B соответственно. Будем рассматривать также относительные погрешности.

Применим предложенный метод регуляризации для рассмотренной выше модели с коэффициентами, которые случайным образом разбросаны вокруг кусочно-постоянных значений. Наибольшую трудность составляет выбор параметров регуляризации. Обычно параметр регуляризации выбирают из требования согласованности погрешности модели с точностью описания статистических данных [2]. Но она как правило – не известна.

Посмотрим на модельных примерах, с какой точностью можно восстановить исходные коэффициенты. На рис.6 исходные коэффициенты модели изображены точками, которые соединены отрезками сплошной линии, а значения восстановленных коэффициентов соединены отрезками штриховой линии. Мы видим, что восстановленные коэффициенты хорошо сглаживают и описывают некоторое среднее значение исходных коэффициентов. Параметры регуляризации в этом расчете – следующие:

$r_1 = 0.4,\ r_2 = 400,\ r_3 = 0.0007,\ r_4 = 400$. Погрешности модели (6.1) и (6.2) крайне малы и равны соответственно: Z_1=1.3318*10^{-6}и Z_2=6.461*10^{-7}.

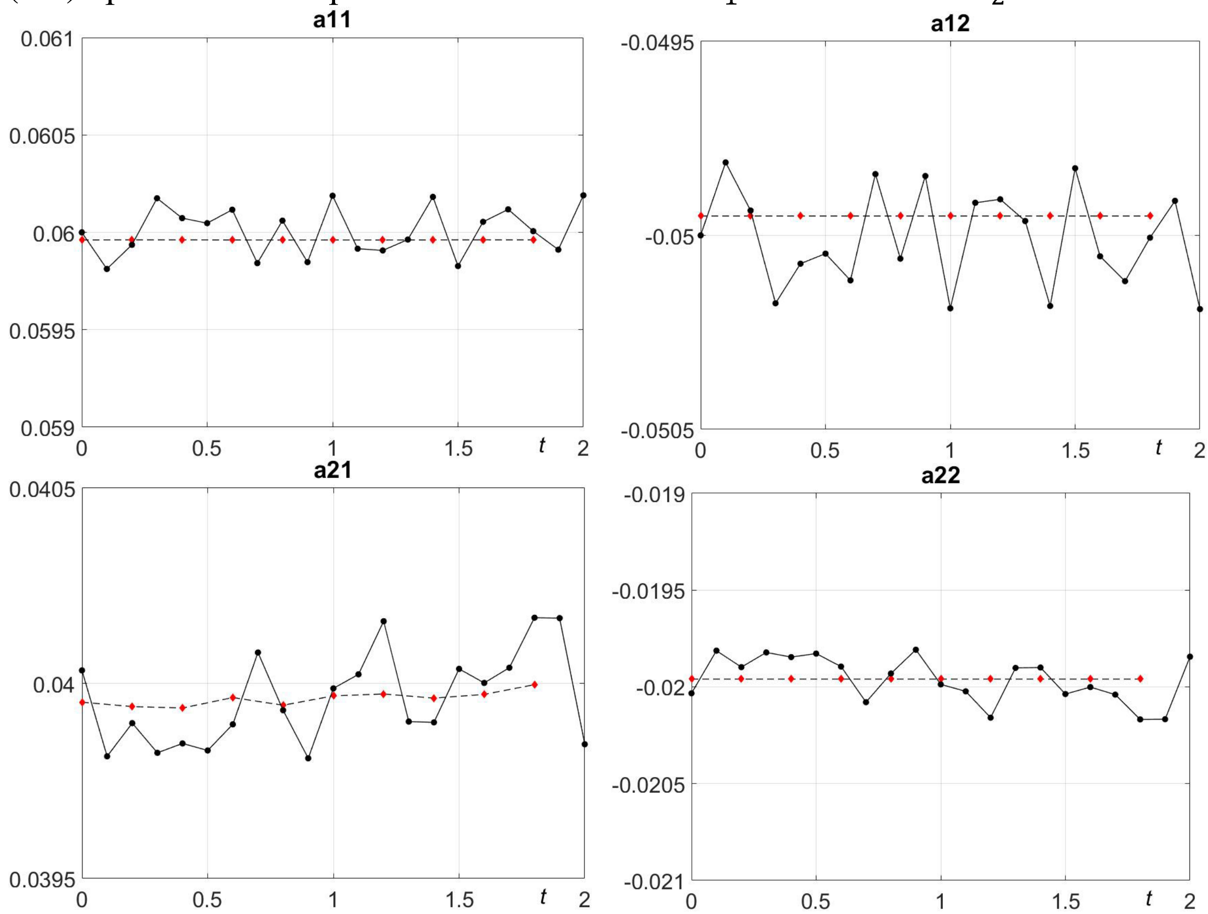


Рис.6. Исходные коэффициенты модели (1) на одном из отрезков (соединены сплошной линией) и восстановленные (соединены штриховой линией).

Рассмотрим вторую модель (1) с коэффициентами (5), в которой один коэффициент плавно изменяется по закону синуса, а остальные – кусочно-постоянные. Восстановим эти коэффициенты по известному решению, применяя метод регуляризации. Результаты представлены на рис. 7. Мы видим, что коэффициенты a_{21} и a_{22} отличаются от исходных менее чем на $0.001\ \%$, погрешность коэффициента a_{12} составляет менее 0.1%, а погрешность коэффициента a_{11} на большей части отрезка наблюдения также менее 0.1%, и только вблизи границ она составляет несколько процентов. Исходный коэффициент изображен сплошной линией, а восстановленный – штриховой.

Теперь эту модель немного изменим, а именно коэффициенты случайным образом разбросаем вокруг значений (5). Проинтегрируем модель с полученными таким образом коэффициентами и, применяя метод регуляризации, попробуем найти сглаженные коэффициенты линейной системы (1).

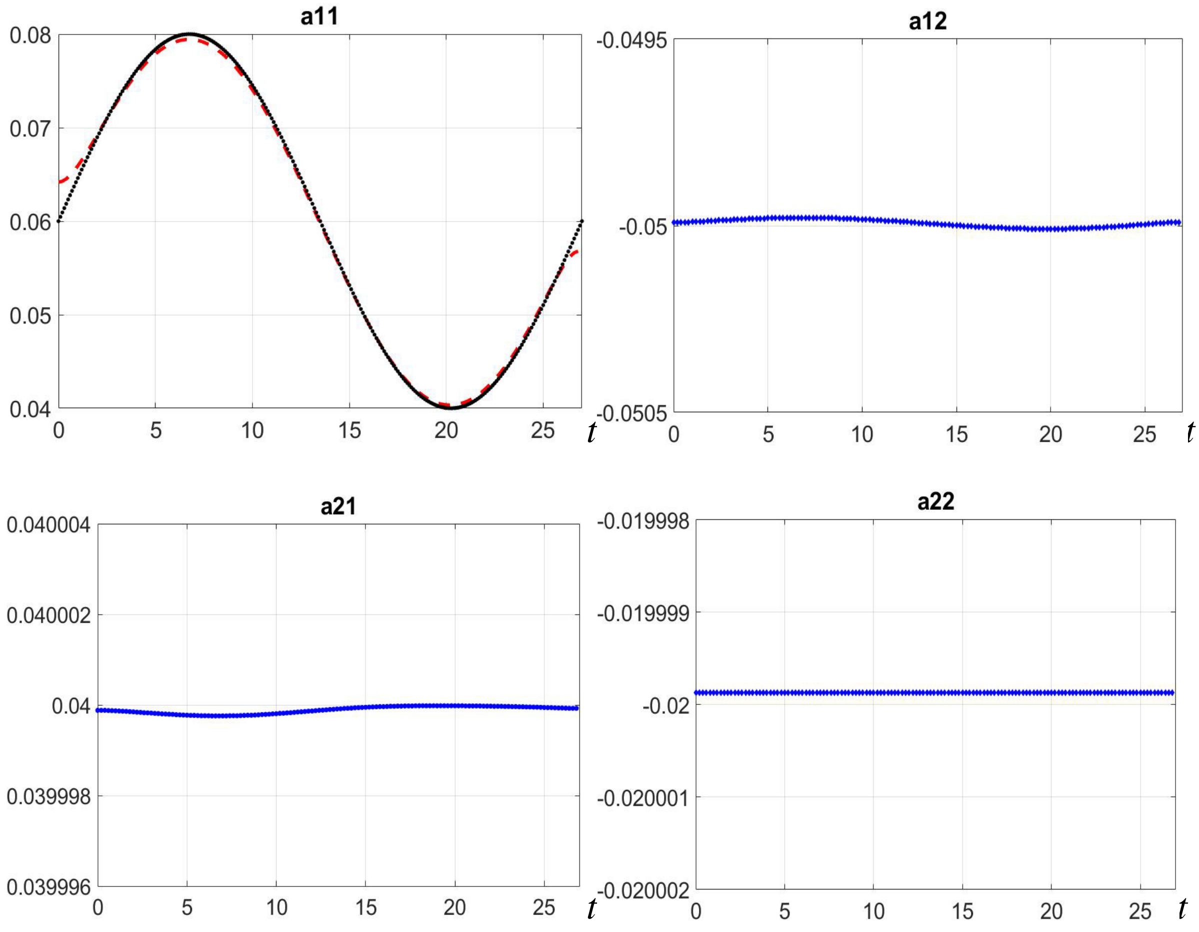


Рис. 7. Восстановленные коэффициенты модели (1) с параметрами (5).

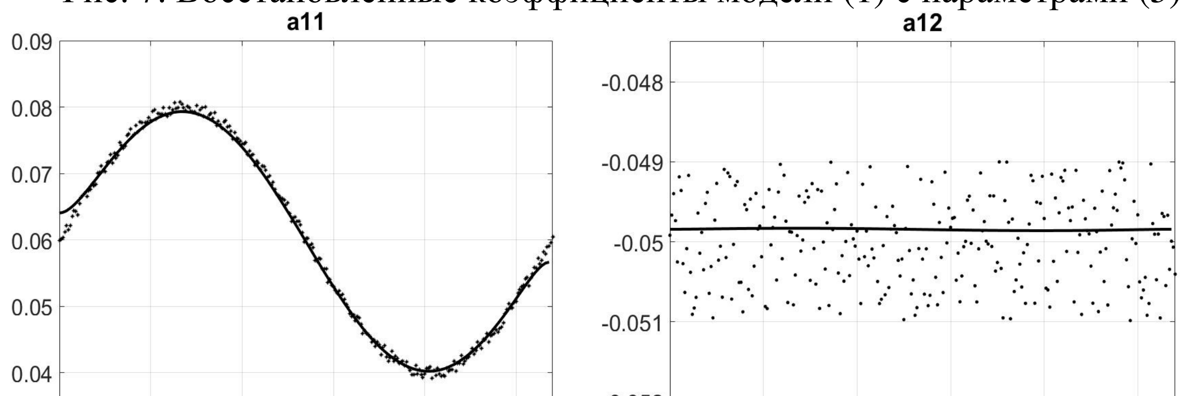


Рис. 8. Исходные коэффициенты модели (1) (изображены точками) и восстановленные (изображены сплошной линией).

Результаты для двух коэффициентов a_{11} и a_{12} представлены на рис (8). Мы видим, что и в этом случае можно подобрать параметры регуляризации так, что найденные коэффициенты хорошо описывают и сглаживают исходные коэффициенты модели.

2. Определение параметров математической модели взаимодействия ВВП и ГД по статистическим данным

1. В работе [1] была предложена модель, описывающая взаимосвязь между динамикой изменения ВВП страны и ее ГД. В основе модели лежит линейная система ОДУ, которая может быть записана в виде

$$\frac{dQ}{dt} = q(\alpha Q + I) + w_3 Q - \mu Q - \beta Q + \delta B - (r + w_1)B, \qquad (7.1)$$

$$\frac{dB}{dt} = w_3 Q + (w_2 - w_1)B + I + S, \qquad (7.2)$$

где $\alpha Q-$ доля ВВП, направленная на развитие экономики, $0 \le \alpha < 1$;

I – инвестиции в экономику за счет внешних государственных займов. Будем считать, что они равны какой-то доли прироста долга: $I = w_2 B, \quad 0 \le w_2 < 1$;

$q -$ эффективность инвестиций;

$\mu Q-$ затраты из ВВП, идущие на обслуживание ВВП, $0 < \mu < 1$,

βQ, $S = \delta B$ – соответственно доля ВВП и часть прироста долга, идущие на социальные или военные расходы, или на ликвидацию последствий стихийных бедствий или аварий, и другие расходы, не связанные непосредственно с развитием экономики; $0 \le \beta < 1, 0 \le \delta < 1$.

$(r + w_1)B$ – выплаты кредиторам по государственному долгу, включающие в себя уплату по процентам $r(t)$ и выплату части $w_1(t)$ самих долгов, $0 < (r + w_1) < 1$.

$w_3 Q$ – прирост ВВП за счет внешнего займа (без инвестиций в развитие), который на ту же сумму увеличивает объем долга.

В результате приходим к линейной системе:

$$\frac{dQ}{dt} = a_{11}Q + a_{12}B, \qquad (8.1)$$

$$\frac{dB}{dt} = a_{21}Q + a_{22}B, \qquad (8.2)$$

где коэффициенты a_{ij} могут быть, как положительными, так и отрицательными. Коэффициенты a_{ij} характеризуют структуру экономики, за счет каких ресурсов она растет или падает, и какую роль при этом играют внешние инвестиции. Они могут иметь следующий смысл. Положительный коэффициент $a_{11} > 0$ означает, что ВВП растет или за счет собственных ресурсов (без учета затрат на обслуживание внешнего долга) или за счет вложения прироста долга в ВВП. Если $a_{11} < 0$, то экономика без внешних инвестиций падает. Если коэффициент $a_{12} < 0$, это означает, что из ВВП изымаются средства на обслуживание долга. В противном случае при $a_{12} > 0$ большая часть новых инвестиций вкладывается в ВВП. Отрицательный коэффициент $a_{22} < 0$ описывает уменьшение долга за счет выплаты части долгов.

Положительный коэффициент $a_{22} > 0$ означает, что доля прироста новых долгов превышает выплаты по старым. Отрицательный коэффициент $a_{21} < 0$, означает что часть ВВП напрямую идет на выплаты части долгов, а положительный – что прирост ВВП идет за счет прямого прироста займов. Но точный смысл коэффициентов модели можно установить, только исследуя структуру национального дохода и структуру вложения внешних займов.

2. Считая, что система (8.1), (8.2) с переменными коэффициентами хорошо описывает изменение ВВП и ГД страны, по статистическим данным восстановим эти коэффициенты. Для этого воспользуемся предложенным выше методом нахождения коэффициентов модели и параметров регуляризации. Статистические данные для нескольких стран возьмем с сайта [3]. Здесь ВВП указан в ценах покупателей, он представляет собой сумму валовой добавленной стоимости всех производителей-резидентов в экономике плюс любые налоги на продукцию и минус любые субсидии, не включенные в стоимость продукции. Она рассчитывается без вычетов за счет амортизации произведенных активов или истощения природных ресурсов. Данные приводятся в текущих долларах США. Долларовые показатели ВВП пересчитываются из внутренних валют с использованием официальных обменных курсов за один год.

Рассмотрим период с 1990 по 2016 г. и посмотрим, как менялся ВВП и уровень государственной задолженности для нескольких стран в эти годы. Период до 2008 г. был благоприятным периодом экономического развития для многих стран. В 2008 г. случился мировой финансовый кризис, который потряс экономику развитых стран. Темпы роста ВВП или снизились, или ушли в минус. Интересно посмотреть, как разные страны изменяли свою экономическую политику по отношению к внешним заимствованиям в разные периоды.

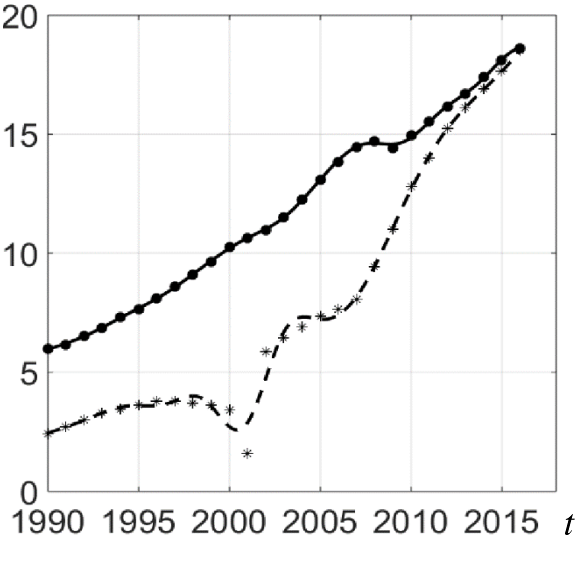
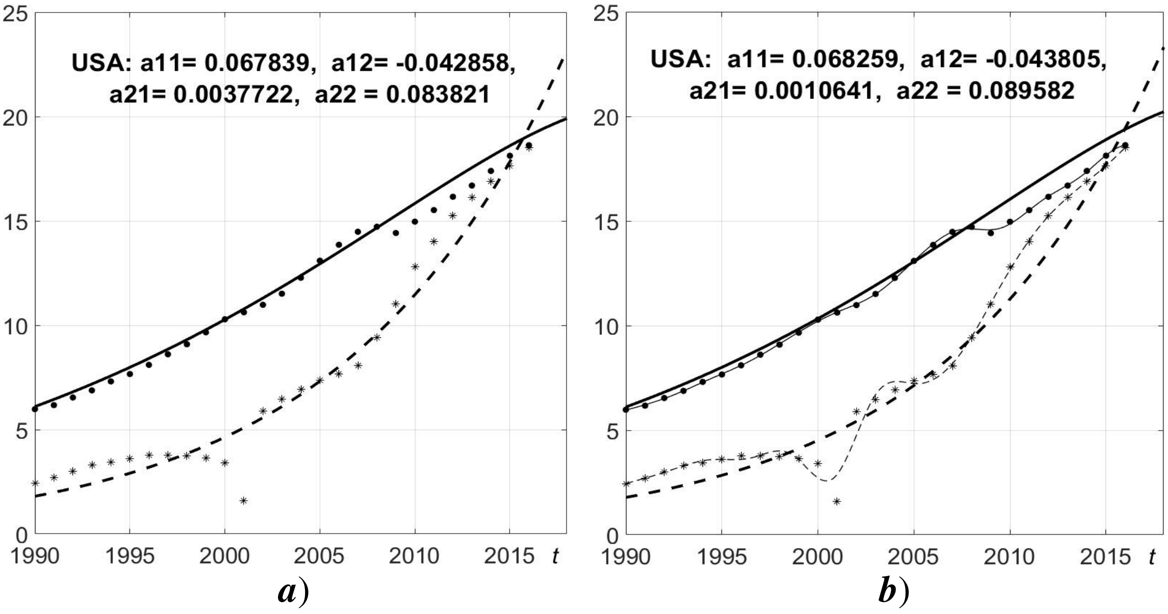


Рис. 9. США: динамика изменения ВВП и ГД. Статистические данные: • – ВВП, $*$ – ГД в трлн. долларов США. Линиями соединены сглаженные данные.



a)   ***b***)

Рис. 10. США: динамика изменения ВВП и ГД. ***a***) – статистические данные: • – ВВП, ∗ – ГД в трлн. долларов США; решение системы ОДУ: ВВП – сплошная линия, ГД – пунктирная линия. ***b***) Сглаженные данные представлены тонкими линиями, решения системы ОДУ – толстыми линиями.

Исследование модели начнем с США. Динамика изменения ВВП и государственного долга представлена на рис. 9. Самая мощная экономика Мира США неуклонно растет в рассматриваемый период с 1990 г., за исключением одного кризисного 2009 г. Перед этим падением наблюдается вздутие финансового пузыря, который в 2009 г. лопается, а уже с 2010 г. рост ВВП соответствует прежнему тренду. Что касается ГД, то в 2001 году была попытка его резко сократить, но уже в 2002 он гораздо сильнее возрос. А начиная с кризисного 2008 г. темпы роста ГД превышают темпы роста ВВП страны. В 2016 г. ГД сравнивается с ВВП, а в настоящее время превышает его.

Найдем коэффициенты модели. Сначала, считая, что коэффициенты a_{ij} постоянны на всем отрезке наблюдения (1990-2016 гг.), найдем эти коэффициенты методом, описанным в разделе 1.1. Численно проинтегрируем систему ОДУ (8), используя найденные параметры. Результаты представлены на рис. 10 а. Мы видим, что модель (8) в среднем не плохо описывает данные. Обратим внимание на значения коэффициентов. Отрицательный коэффициент a_{12} показывает, что часть средств из ВВП идет на обслуживание ГД. Большой положительный коэффициент a_{22} показывает, что рост экономики США осуществляется в большой мере за счет прироста долга.

Поскольку экономике присущи флуктуации, связанные с разными акторами, для лучшего описания модели сгладим статистические данные. По сглаженным статистическим данным вычислим промежуточные значения ВВП и ГД в конце каждого месяца. Считая, что коэффициенты a_{ij} постоянны на всем отрезке наблюдения (1990-2016 гг.), найдем эти коэффициенты, и результаты моделирования сравним с результатами для не сглаженных статистических данных (рис. 10 б). Мы видим, что модель, использующая сглаженные данные, также не плохо описывает статистические данные, а найденные коэффициенты близки к коэффициентам модели для не сглаженных статистических данных.

Модель с постоянными коэффициентами, как хорошо видно из рис. 10, описывает лишь основные тренды. Для более точного описания кривых изменения ВВП и ГД будем считать, что коэффициенты модели переменные и могут изменяться от года к году, оставаясь в течение года неизменными. Коэффициенты модели найдем с использованием разработанного метода регуляризации. Будем использовать сглаженные статистические данные. Сравнение решений модели (8) со статистическими данными представлено на рис. 11, а на рис. 12 показана динамика изменения коэффициентов модели (8). Мы видим, что начиная с 1994 г. вплоть до 2000 г. коэффициент a_{21} уменьшается и становится отрицательным. Это означает, что все большая часть ВВП идет на погашение ГД, и эти выплаты превышают новые внешние заимствования ($a_{22} > 0$), так что ГД заметно уменьшается. Экономика США при этом демонстрирует устойчивый рост, коэффициент $a_{11} > 0$ и около 0.04. Объем внешних инвестиций в экономику превышает затраты на обслуживание долга – коэффициент $a_{12} > 0$. Вначале 2000 г. экономическая политика качественно изменяется. Государство опять начинает наращивать государственный долг, пытаясь удержать рост ВВП за счет внешних вложений. Государственный долг начинает резко расти и к 2005 г. возвращается на свой прежний тренд, а коэффициент a_{11} достигает максимума. После 2005 г. наблюдается резкое падение вклада в рост ВВП собственных ресурсов, и коэффициент a_{11} становится отрицательным. Он достигает минимума к 2009 г. – в разгар мирового финансового кризиса. Сдержать падение ВВП в это время удается за счет внешних вливаний в экономику, коэффициент a_{21} возрастает и снова становится положительным. В последующие рассматриваемые нами годы, вплоть до 2016 г. коэффициенты изменяются несильно. Рост экономики США осуществляется во многом за счет роста внешних заимствований, в результате к концу 2016 г. объем государственного долга начинает превышать объем ВВП. Такая экономическая политика продолжается и сегодня. В августе 2019 г. ГД превысил 22 трил. дол. и составил 110% ВВП.

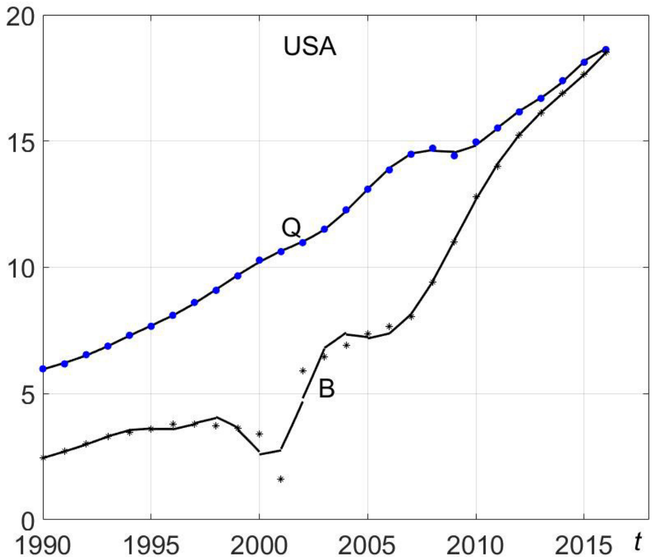


Рис. 11. США: динамика изменения ВВП и ГД; статистические данные:

• – ВВП, ∗ – ГД в трлн. долларов США;

решение системы ОДУ – сплошная линия.

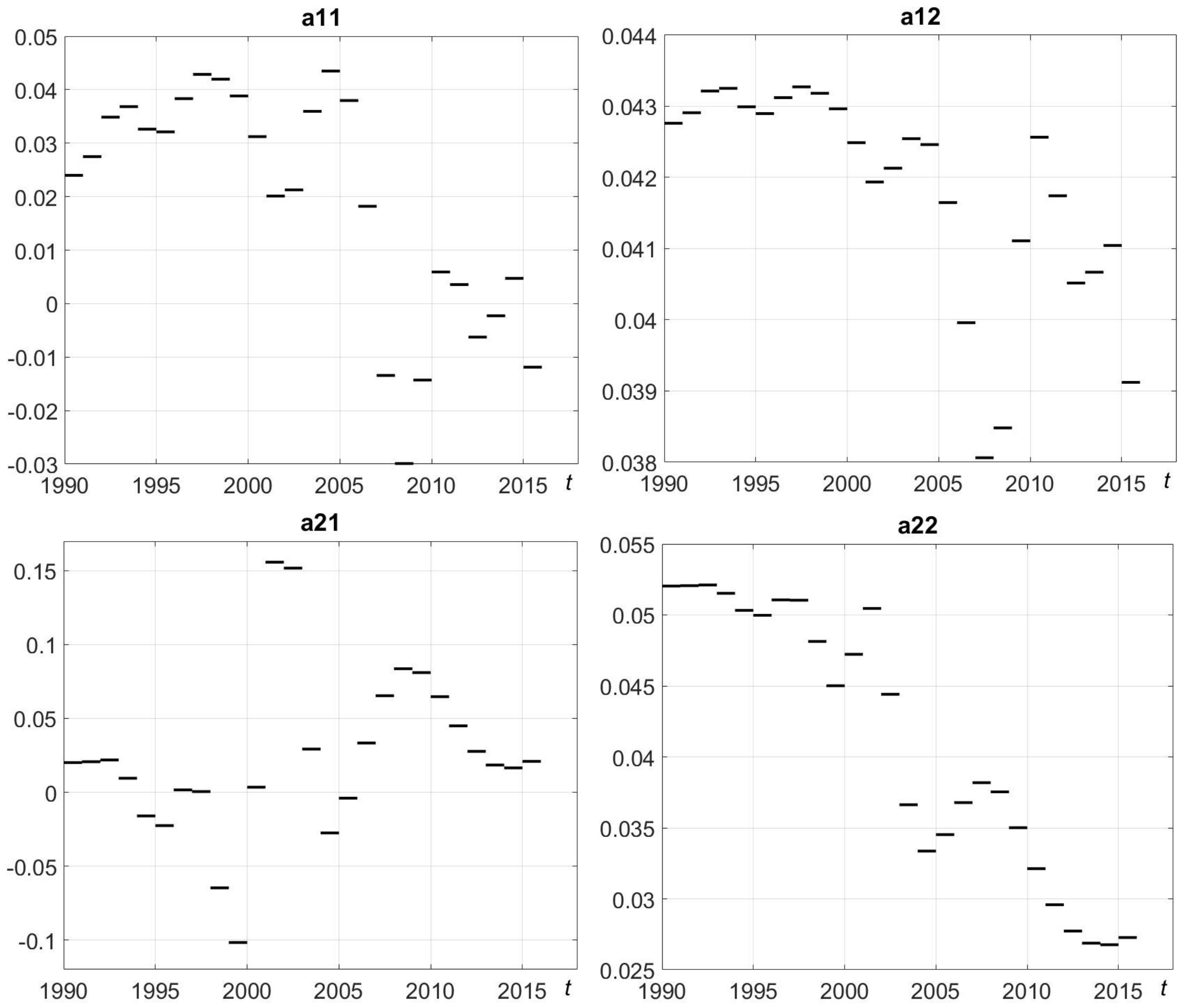


Рис. 12. США. Зависимость коэффициентов модели (8) от времени.

3. Теперь применим модель для анализа динамики изменения ВВП И ГД для пяти выбранных стран: Австралии, Японии, Нидерландов, Сингапура и Великобритании. Считая коэффициенты системы (8) переменными, найдем их, используя метод регуляризации. На рис. 13-17 для каждой из стран представлены следующие графики. На верхнем графике слева показаны статистические данные для ВВП и ГД в трлн. долларов США: $\bullet$ – ВВП, $*$ – ГД; и сглаженные статистические данные: ВВП – сплошная линия, ГД – пунктирная линия. На верхнем графике справа изображены решения системы ОДУ (8.1), (8.2) с восстановленными коэффициентами по сглаженным статистическим данным. Ниже на четырех графиках показаны зависимости восстановленных коэффициентов модели от времени $a_{ij}(t)$. Коэффициенты скачком изменяются каждый год и описываются кусочно-постоянной функцией. Параметры регуляризации подбирались так, чтобы с одной стороны, скачки коэффициентов не были бы большими, а с другой стороны, модель с этими восстановленными коэффициентами хорошо бы описывала статистические данные. Действительно, на графиках можно видеть, что во всех рассмотренных случаях решения модели хорошо ложатся на статистические данные (сглаженные).

Сначала рассмотрим динамику экономического роста **Австралии**. В рассматриваемый отрезок времени Австралия имела три периода роста экономики: с 1994 по 1997, с 2002 по 2008 и с 2010 по 2013 г. (рис. 13). В первые два периода темпы роста ВВП заметно превышали темпы роста ГД. Это происходило за счет внутренних ресурсов (большой коэффициент $a_{11} > 0$) и регулярных выплат по накопившемуся государственному долгу ($a_{12} < 0$, и $a_{22} < 0$). ВВП растет высокими темпами вплоть до глобального экономического кризиса в 2008 г. В 2009 г. на фоне мирового финансового кризиса происходит падение ВВП. Для поддержки экономики правительство Австралии увеличивает внешние займы и сокращает выплаты по государственному долгу (в уравнении для долга коэффициент a_{21} возрастает, а коэффициент a_{22} уменьшается). Коэффициент a_{11}, описывающий долю ВВП, идущую на развитие экономики, с 2012 до 2016 гг. падает до нуля. Несмотря на это ВВП Австралии в 2012 и в 2013 г. демонстрирует рост, который происходит за счет внешних инвестиций. ГД с 2009 по 2013 резко возрастает. В 2014 г. правительство больше не наращивает ГД. Это приводит к замедлению роста ВВП, а затем к его резкому падению в последующие три года, так что в 2016 г. уровень ВВП становится примерно таким, каким он был в 2010г. ГД при этом почти не меняется, растет очень медленно.

Теперь посмотрим, что дает модель для понимания экономического развития Японии. **Япония** является одной из сильнейших экономик Мира и лидером по относительному объему государственного долга. Начиная с 1985 г. ВВП Японии растет быстрыми темпами и достигает максимума в 5.449 трил. дол. в 1995 г. (рис. 14). После этого динамика изменения ВВП демонстрирует осциллирующий характер. Максимум 1995 г. временно преодолевается в 2010-2012 г., а затем снова ВВП падает, и в настоящее время он составляет примерно 5 трил. дол. [5]. Внешние инвестиции играют огромную роль для поддержки экономики Японии. ГД Японии все время растет, осциллируя вокруг основного тренда. В 2000 г. он впервые превышает ВВП, продолжая расти. В последние 5 лет относительный долг находится примерно на одном уровне в 235% ВВП [5]. О значительной роли внешних инвестиций говорит коэффициент a_{21}, который хоть и осциллирует, но остается на высоком уровне. Собственный вклад в экономику тоже большой (большой коэффициент a_{11}). Япония стабильно платит по накопившимся долгам (коэффициенты $a_{12} < 0$, $a_{22} < 0$). Считается, что главной причиной нарастания японского госдолга – увеличение бюджетных ассигнований на социальные нужды в связи с неуклонным старением населения.

В экономике **Нидерландов** внешние займы также играют заметную роль, и ВВП страны в среднем растет параллельно росту ГД. Если смотреть на графики изменения ГД и ВВП страны (рис.15), то можно отметить, что они совершают почти синфазные колебания вокруг своих трендов. Это означает, что увеличение прироста ГД ведет к увеличению темпов роста ВВП, и наоборот сокращение внешних заимствований ведет к замедлению экономического роста. В Нидерландах в период оживления мировой экономике в 2000-2007 г. наблюдается, как и во многих других развитых странах, бурный рост ВВП. В начавшийся кризис в 2008 г. правительство, пытаясь поддержать экономику страны, существенно увеличивает ГД, но ВВП все равно падает. За объем внешних инвестиций, которые вкладываются непосредственно в ВВП, в модели отвечает коэффициент a_{21}. Мы видим, что он осциллирует почти синхронно с коэффициентом a_{11} вплоть до 2006 г., описывая вклад внешних инвестиций в ВВП. Резкое уменьшение этого коэффициента в 2014 г. вместе с увеличением абсолютного значения отрицательного коэффициента a_{21}, отвечающего за обслуживание долга, ведет как к резкому падению ВВП, так и уменьшению объема долга. После финансового кризиса экономика Нидерландов так и не смогла восстановиться и до сих пор испытывает рецессию, а ВВП страны демонстрирует осцилляции. Его уровень так и не поднялся выше уровня 2007 г. и в настоящее время составляет немногим более 9 трил. дол. [5].

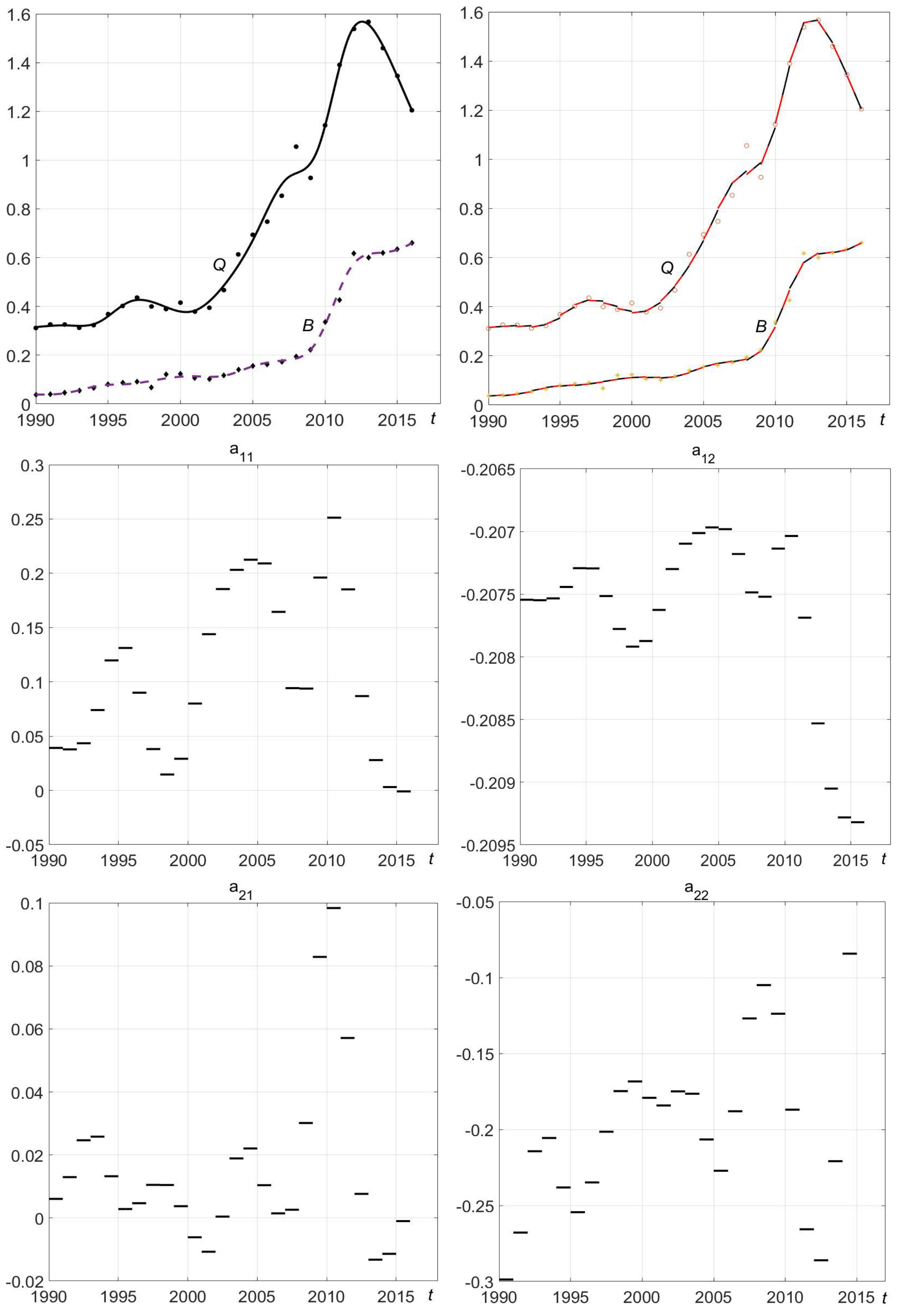


Рис. 13. **Австралия**. Стат. данные, интегральные кривые и коэффициенты модели.

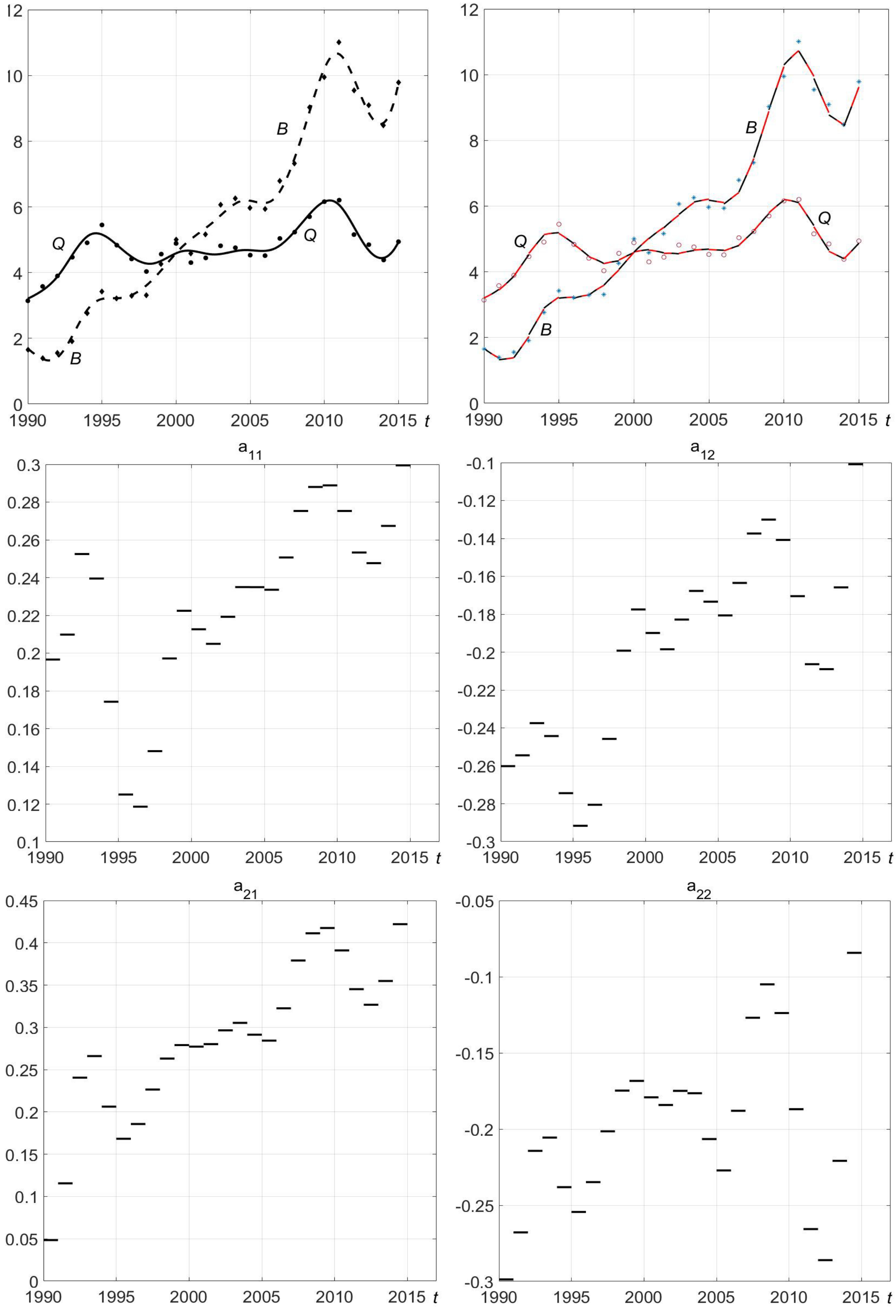


Рис. 14. **Япония**. Стат. данные, интегральные кривые и коэффициенты модели

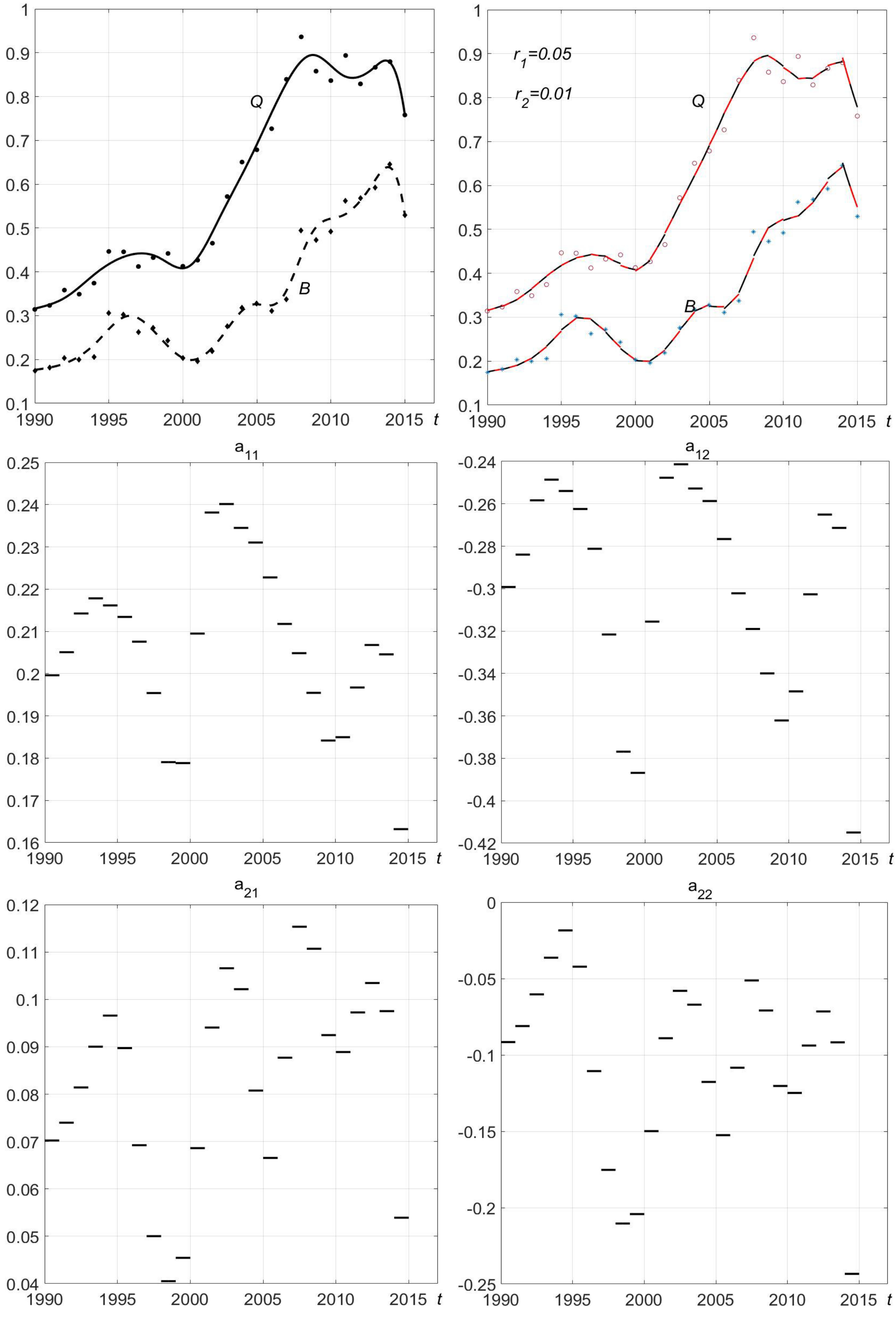


Рис.15. **Нидерланды**. Стат. данные, интегральные кривые и коэффициенты модели.

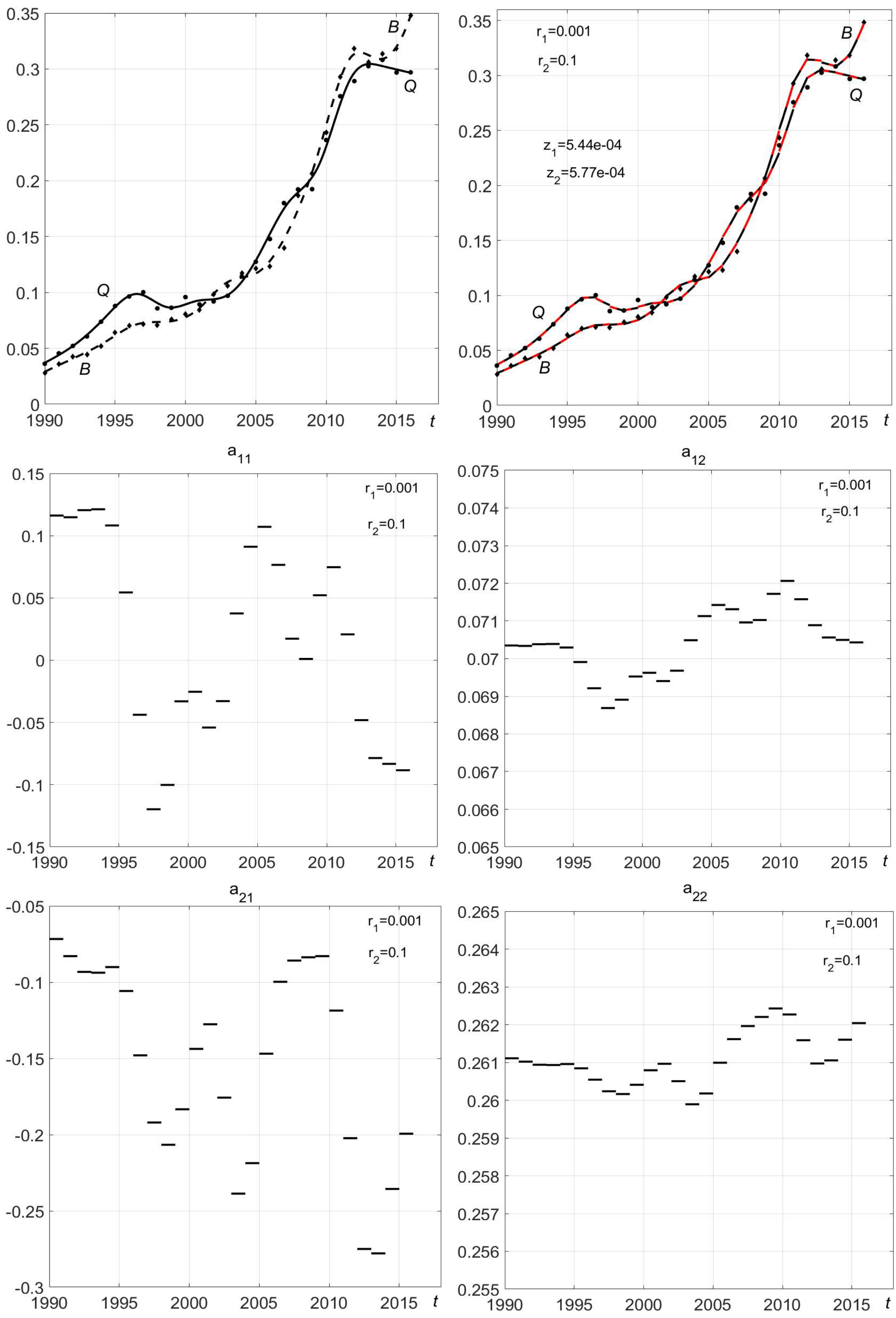


Рис.16. **Сингапур**. Стат. данные, интегральные кривые и коэфф. модели

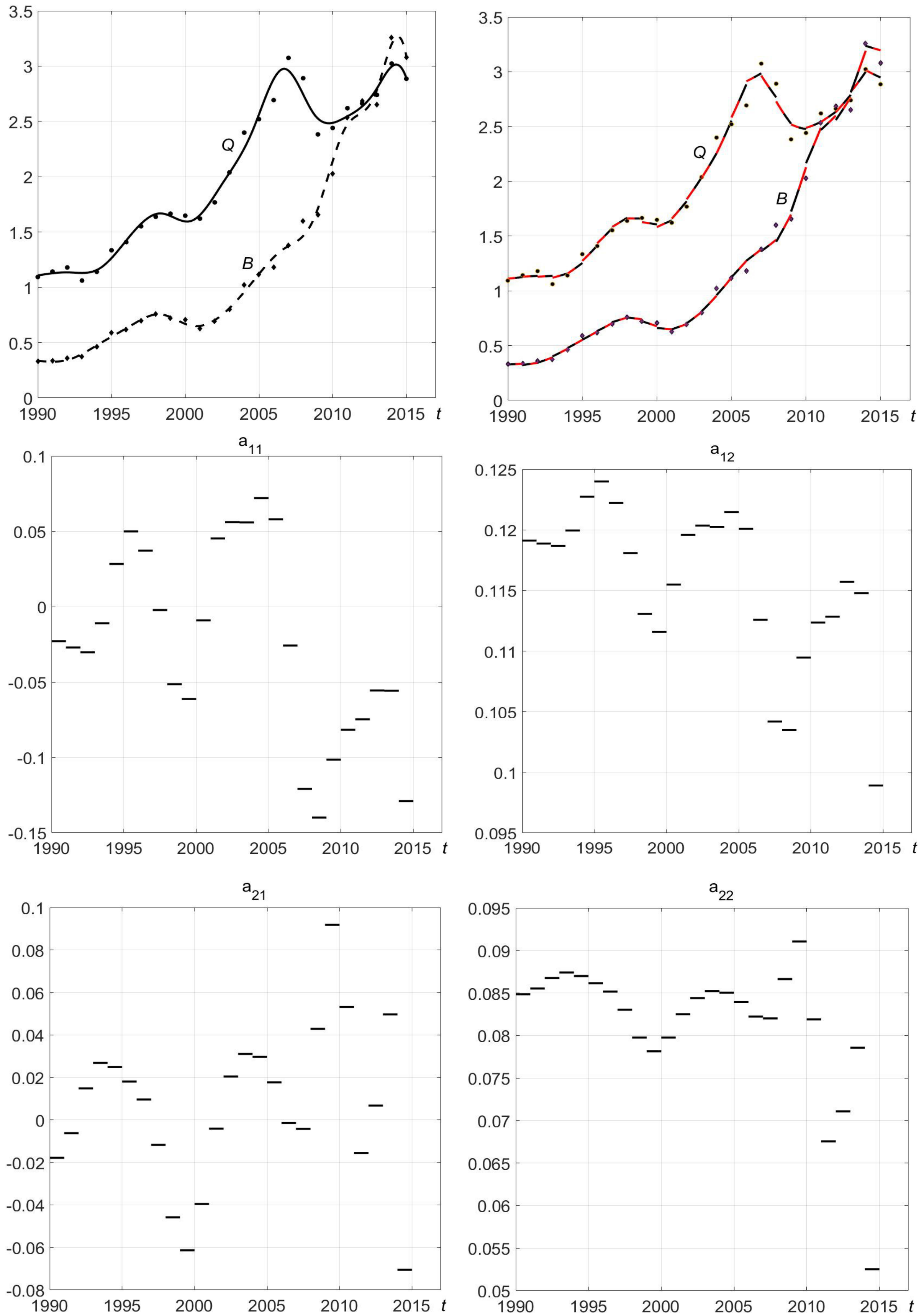


Рис.17. **Великобритания**. Стат. данные, интегральные кривые и коэффициенты модели.

Сингапур демонстрирует меньшую вовлеченность в мировую экономическую систему, чем другие развитые страны. Кризис 2008 г. на нем не сказался. Внешние инвестиции играют существенную роль в экономическом развитии страны; ВВП и государственный долг растут вместе, поочередно обгоняя друг друга (рис. 16). В настоящее время относительный ГД Сингапура составляет 109% [4]. Заметим, что восстановленные коэффициенты в модели (8) для Сингапура имеют другие знаки нежели в выше рассмотренных странах. Это указывает на то, что структура экономики в Сингапуре другая и механизм взаимодействия ВВП и ГД иной. Так коэффициент a_{12} при ГД в первом уравнении модели (8) положительный, что, по-видимому, означает, что часть прироста долга вкладывается в ВВП. И коэффициент a_{22} во втором уравнении модели также положительный, что может указывать на то, что новые инвестиции превышают выплаты по накопленным долгам и способствуют его увеличению. Коэффициент $a_{21} < 0$, что означает, что доля ВВП идет непосредственно на погашение долга.

В **Великобритании** государственный долг вплоть до начала мирового финансового кризиса рос параллельно с ВВП, составляя менее 50% ВВП (рис. 17). После 2008 г. наблюдается резкое увеличение ГД, и падение ВВП, несмотря на мощные внешние вливания в экономику. В результате в 2012 г. ГД догнал ВВП, а с 2014 г. превысил. Далее наблюдаются осцилляции ВВП и ГД. В настоящее время ГД Великобритании составляет 86% ВВП [4]. Восстановленные коэффициенты модели (8) для Великобритании имеют на многих отрезках времени те же знаки, что и для Сингапура, что может означать, что структура распределения внешних и внутренних инвестиций имеет схожий характер.

Заключение

В работе рассмотрена математическая модель, описывающая взаимосвязь изменения ВВП и государственного долга. Модель предложена в работе [1]. Показано, что внешние инвестиции могут стать при определенных условиях мощным фактором развития страны, но, с другой стороны, ведут к росту государственной задолженности и обременительной необходимости его обслуживания. В основе модели лежит система двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Коэффициенты системы неизвестны, известны ее решения в некоторые моменты времени – это ежегодные статистические данные по ВВП и ГД. Считается, что модель приближенно, но с хорошей точностью описывает статистические данные. Для исследования динамики в работе ставится цель, найти коэффициенты системы и проанализировать, как изменение параметров модели влияет на изменении поведения кривых ВВП и ГД. Определение коэффициентов системы по приближенно заданному решению является обратной некорректно поставленной задачей, которая имеет неединственное неустойчивое решение. В настоящей работе предложен эффективный алгоритм восстановления коэффициентов линейной системы ОДУ, использующий метод регуляризации А. Н. Тихонова. Регуляризирующим оператором является ограничение нормы производной коэффициентов по времени. Параметры регуляризации подбирались так, чтобы 1) модель с хорошей точностью описывала статистические данные на рассматриваемом отрезке времени; 2) коэффициенты не слишком резко изменялись (норма их производной ограничена).

Этот алгоритм был успешно применен для нахождения коэффициентов системы по статистическим данным для нескольких развитых стран. Был проведен анализ и динамика изменения ВВП и ГД была связана с изменением коэффициентов модели. Было выяснено за счет какого коэффициента растет или падает ВВП страны. Показано, что коэффициенты системы для разных стран могут качественно различаться (иметь разные знаки), что говорит о разных механизмах экономического роста.

Знание коэффициентов модели и соотнесение их с реальными экономическими показателями может позволить проводить более глубокий анализ роста ВВП с учетом внутренних механизмов, а также делать более точные прогнозы.

Литература

1. *V. I. Dmitriev, E. S. Kurkina* «Investigation of a mathematical model linking GDP growth with changes in national debt»// Computational Mathematics and Modeling, Vol. 30, No. 2, 2019, pp. 137-154.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 283 с.
3. World Bank: https://data.worldbank.org
4. «Всё о США», 2016-2019: https://usamagazine.ru/gosdolg-ssha
5. Мировой атлас данных: https://knoema.ru/atlas