

ИСКУССТВЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ 1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С КОНВЕКЦИЕЙ¹

Введение

При численном моделировании внешних течений газа, в частности, задач обтекания, как правило, требуется перенести задачу из бесконечной области в конечную. Последняя имеет искусственную границу, на которой необходимо задать граничные условия, также называемые искусственными. Эти граничные условия должны обеспечивать совпадение или, по крайней мере, близость решений задач, поставленных в бесконечной и конечной областях. С физической точки зрения, искусственная граница не должна вызывать отражение волн, движущихся изнутри области вовне. В этом контексте возник термин “неотражающие граничные условия”.

В задачах дозвуковой газовой динамики формулировка искусственных граничных условий является непростой проблемой. Трудности связаны как с построением неотражающих граничных условий, о чем скажем ниже, так и с большими искажениями решения при неверном выборе граничных условий. С середины 1970-х годов ведутся теоретические разработки неотражающих граничных условий для различных уравнений и систем, в том числе газодинамических. Автор [1]–[3] предпринял ревизию известных подходов и предложил ряд новых с целью охвата эффектов, присущих реальным прикладным задачам. Однако в указанных работах нет законченных результатов, относящихся к пространственно многомерным системам уравнений.

Сложности при построении неотражающего граничного условия для задач газовой динамики в многомерном случае проявляются уже на примере линеаризованных уравнений Эйлера. В них, в свою очередь, основную проблему создает отражение акустических волн, которые удовлетворяют волновому уравнению с конвекцией. Известно, что для многомерного волнового уравнения невозможно получить локальные неотражающие условия. Приближения к неотражающему условию, которым посвящена обширная литература, сходятся неравномерно и медленно.

По указанной причине мы уделили первую статью настоящего цикла граничным условиям для волнового уравнения в классическом виде (в

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00293.

неподвижной среде) и с учетом конвекции (в движущейся среде). Здесь будут сформулированы общие принципы и методика построения искусственных граничных условий для названных уравнений, а также приведены типичные примеры граничных условий. Предлагаются способы оценки свойств граничных условий. Рассматриваемым подходам дается теоретическое обоснование, которое, безусловно, не является полным, но, с другой стороны, простирается за рамки основного предмета исследования.

Волновое уравнение с конвекцией, в отличие от своего классического варианта, мало представлено в литературе. Мы сделаем акцент на специфических особенностях постановок задач для уравнения волн в движущейся среде по сравнению с неподвижным случаем. В других ситуациях, наоборот, наличие конвекции не препятствует сведению проблемы к более простому образцу.

Материал будет излагаться с оглядкой на то, что результаты предстоит применять к системам нелинейных уравнений газовой динамики и, более того, к разностным методам решения этих систем. Заметим, что механизм генерации колебаний в таких моделях не вполне ясен, а информация о распространении волн неточна. Нелинейность задач существенно мешает применять нелокальные граничные условия, и без того достаточно сложные и трудоемкие. Наконец, различные системы основных уравнений — от скалярного волнового уравнения до разностных схем, описывающих динамику вязкого газа, — требуют различного числа граничных уравнений. В последующих статьях, идя по пути усложнения моделей, мы будем придерживаться “принципа преемственности”, т.е. на каждом этапе комбинировать и адаптировать найденные ранее методы и сами граничные условия.

Данная статья носит обзорно-теоретический характер. Предлагаемые здесь граничные условия подвергнутся численной проверке уже на следующих этапах — после применения к более сложным моделям. Об этом пойдет речь в будущих статьях.

1. Методика исследования газодинамических задач

В настоящей работе будем изучать линеаризованные уравнения газовой динамики, описывающие поведение малых возмущений параметров на постоянном фоне. В дальнейшем ряд полученных результатов удастся распространить и на существенно нелинейные задачи.

Введем вектор возмущений примитивных переменных

$$U = (\rho' \ u' \ v' \ p')^T.$$

В линейных моделях возмущения соответствующих величин отмечаются штрихами, а фоновые газодинамические параметры обозначаются простыми буквами и считаются константами. Здесь и далее: ρ — плотность, u, v — компоненты скорости, $p = \rho c^2 / \gamma$ — давление, c — скорость звука, γ — показатель адиабаты. Линеаризованные уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$C_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \rho c^2 & v \end{pmatrix}.$$

Пусть исходная задача ставится в области Ω , типичным примером которой является плоскость за вычетом обтекаемого тела. Задача переносится в ограниченную область моделирования $\Omega' \subset \Omega$, охватывающую тело и важнейшие элементы течения. В качестве области Ω' в основном будем рассматривать полуплоскость с искусственной границей $\Gamma' = \{x = \text{const}, -\infty < y < \infty\}$, как правило, $\{x = 0\}$. Если речь идет о правом граничном условии, то область $\Omega' = \{x < 0\}$, если о левом — то $\Omega' = \{x > 0\}$.

Чтобы учесть процесс генерации колебаний в нелинейных моделях, примем следующее упрощенное линейное описание. Предположим, что внутри области Ω' и только там существуют источники колебаний с некоторыми заданными характеристиками. Тем самым линеаризованные уравнения Эйлера отличаются от (1.1) неоднородной правой частью с финитной функцией F :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C_x \frac{\partial U}{\partial x} + C_y \frac{\partial U}{\partial y} = F(x, y, t), \quad \text{supp}_{(x,y)} F \subset \Omega'.$$

Такая система формально получается из (1.1) путем введения в нее начальных условий и условий на твердом теле через аппарат обобщенных функций [4], но мы не будем связывать правую часть F с конкретной задачей. Поскольку в окрестности границы источники отсутствуют, отражающие свойства граничных условий обусловлены поведением решений однородного уравнения (1.1).

Дифференциальным следствием системы линейных уравнений Эйлера (1.1) является уравнение акустических волн

$$p''_{tt} + 2u p'_{xt} + 2v p'_{yt} + u^2 p'_{xx} + 2uv p'_{xy} + v^2 p'_{yy} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = 0, \quad (1.2)$$

называемое волновым уравнением с конвекцией. (Здесь и далее нижними индексами обозначаются производные скалярных функций по соот-

ветствующим переменным.) О нем и его частных случаях пойдет речь в данной статье.

Для анализа линейных уравнений будем в основном рассматривать их частные решения вида плоских гармонических волн

$$p' = \exp\{i\omega t - ikx - i\ell y\}, \quad \omega \geq 0, \quad k, \ell \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Все параметры гармоника можно считать вещественными, так как в уравнении (1.2) нет диссипации и волны не затухают.

Пусть граничное условие представляет собой линейное однородное уравнение общего вида

$$\mathcal{L}p' \Big|_{x=0} = 0. \quad (1.4)$$

Преимущественно будут рассматриваться операторы \mathcal{L} — дифференциально-алгебраические с постоянными коэффициентами. Подстановка функции (1.3) в граничное условие (1.4) определяет образ Фурье оператора \mathcal{L} , обозначаемый как $\hat{\mathcal{L}}(k, \ell, \omega)$.

2. Отражение акустических волн в движущейся среде

Рассмотрим среду, описываемую линеаризованными двумерными уравнениями Эйлера и движущуюся с постоянной скоростью. Пусть плоские волны взаимодействуют с неподвижной искусственной границей $\{x = \text{const}\}$. Конкретный вид граничного условия (1.4) роли не играет: важно лишь то, что отраженные волны плоские. Ввиду чисто вычислительного характера постановки задачи, она не является классической для физики. Законы отражения плоских акустических волн от проницаемой границы представлены в литературе [5]–[7], однако заслуживают дополнительного внимания.

Остановимся на случае горизонтального течения со скоростью $(u, 0)$. Уравнение акустических волн (1.2) принимает форму

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + u^2 p'_{xx} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = 0. \quad (2.1)$$

Течение дозвуковое: $0 < u < c$. Выберем правую границу, которая при положительном значении скорости u называется выходной границей.

Образ Фурье уравнения (2.1) есть

$$-\omega^2 + 2u\omega k - u^2 k^2 + c^2(k^2 + \ell^2) = 0. \quad (2.2)$$

Отсюда для y -компоненты волнового вектора ℓ получаем выражение

$$\frac{c\ell}{\omega} \equiv s = \frac{c \sin \theta}{c + u \cos \theta}, \quad \text{где } (k, \ell) = \sqrt{k^2 + \ell^2} (\cos \theta, \sin \theta). \quad (2.3)$$

Здесь $\theta \in (-\pi, \pi]$ — угол между нормалью фронта волны и осью x . Именно его в дальнейшем будем называть, вопреки традиции, углом падения либо отражения. При отражении волны не изменяются частота ω и вертикальное волновое число ℓ , а следовательно, и величина s . Обозначим $M = u/c$ — число Маха и рассмотрим функцию (2.3):

$$s(\theta) = \frac{\sin \theta}{1 + M \cos \theta}; \quad |s(\theta)| \leq s(\theta^*) = 1/\sqrt{1-M^2}, \quad (2.4)$$

$$\theta^* = \arccos(-M).$$

Уравнение (2.3) относительно θ имеет два корня при $|s| < s(\theta^*)$: θ_1 — угол падения и θ_2 — угол отражения.

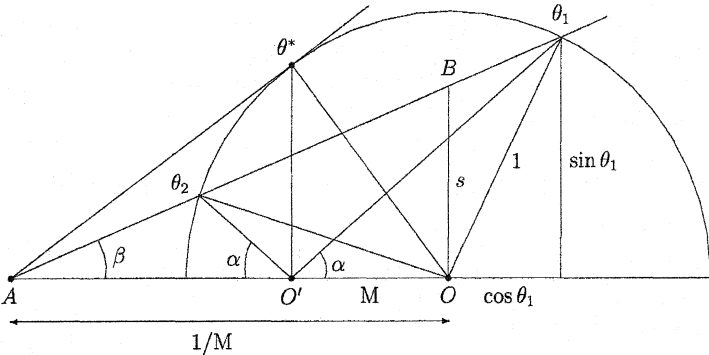


Рис. 1. Углы падающих и отраженных волн в подвижной среде

Геометрическую интерпретацию соотношений между параметрами падающей и отраженной волны при $s > 0$ дает рис. 1. На единичной окружности с центром O отмечены дуги углов θ_1 , θ_2 и θ^* . Проведем через точку θ^* касательную, которая пересекает ось абсцисс в точке A . Покажем, что точки θ_1 и θ_2 лежат на секущей, проходящей через точку A .

Из треугольника $AO\theta^*$ на рис. 1 и формулы (2.4) следует, что $|OA| = 1/\cos(\pi - \theta^*) = 1/M$. Выберем точку θ_1 и обозначим угол $\beta = \widehat{OA\theta_1}$. Проведем вертикальный отрезок OB . Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = M |OB| = \frac{\sin \theta_1}{M^{-1} + \cos \theta_1}.$$

Отсюда, согласно (2.4), $s(\theta_1) = |OB|$. Те же рассуждения верны для второй точки пересечения $A\theta_1$ с окружностью: θ_2 .

Таким образом, существует предельный угол $\theta^* > \pi/2$, правее которого лежат углы падения ($-\theta^* < \theta_1 < \theta^*$), а левее — углы отражения

($\theta^* < |\theta_2| \leq \pi$). При этом угол падения “не равен” углу отражения, т.е. $\theta_1 \neq \pi - \theta_2$ (для $s > 0$). В случае $1 < s < s(\theta^*)$ оба угла θ_1 и θ_2 тупые и волновые векторы обеих волн направлены влево (см. [5, 8]).

Введем, учитывая соотношения (2.4), “обобщенный косинус”

$$D = \sqrt{1 - (1-M^2)s^2} = \frac{|M + \cos \theta|}{1 + M \cos \theta}. \quad (2.5)$$

Отсюда для углов падающей и отраженной волн находим, по-разному раскрывая модуль, выражения

$$\cos \theta_1 = \frac{D-M}{1-MD}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{D+M}{1+MD}. \quad (2.6)$$

Из (2.6), а также непосредственно из (2.4), следует полезное соотношение, связывающее углы падения и отражения друг с другом:

$$\operatorname{tg}(\theta_1/2) \operatorname{tg}(\theta_2/2) = \operatorname{tg}^2(\theta^*/2) = \frac{1+M}{1-M}.$$

Аналогичная формула приводится в [7].

В подвижной среде направление нормали к волновому фронту отличается от направления распространения волны. Из (2.2) следует выражение для групповой скорости (см. [9]):

$$(\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial \ell) \equiv \mathbf{C} \equiv |\mathbf{C}| (\cos \alpha, \sin \alpha) = c (M + \cos \theta, \sin \theta). \quad (2.7)$$

На рис. 1 векторы групповых скоростей падающей и отраженной волн, отнесенные к скорости звука c , изображаются отрезками

$$\mathbf{C}_1/c = \overrightarrow{O'\theta_1}, \quad \mathbf{C}_2/c = \overrightarrow{O'\theta_2}.$$

Интересное свойство скоростей двух волн состоит в том, что они образуют одинаковые углы с горизонтальной осью:

$$\alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \alpha \quad (s > 0).$$

В этом смысле угол падения равен углу отражения.

В самом деле, применяя последовательно формулы (2.7), (2.4) и (2.5), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta}{M + \cos \theta} = s \cdot \frac{1 + M \cos \theta}{M + \cos \theta} = \pm s/D.$$

Очевидно, знак “+” отвечает падающей волне, а “-” — отраженной:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = s/D, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -s/D. \quad (2.8)$$

Следствием данного результата есть то, что всегда, при любом вертикальном волновом числе ℓ , одна акустическая волна распространяется вправо, а другая — влево [6]. Для уравнения (2.1) требуется одно граничное условие, не отражающее правую акустическую волну.

Отражение акустических волн от левой — входной границы подчиняется той же геометрии, только углы падения и отражения θ_1 и θ_2 меняются ролями.

Рассмотрим теперь произвольную скорость течения (u, v) , оставаясь в дозвуковом диапазоне: $u^2 + v^2 < c^2$. Уравнение акустических волн примет вид (1.2) вместо (2.1). Исследование сводится к предыдущему, если перейти в движущуюся со скоростью $(0, v)$ систему координат [5] или, что то же самое, ввести модифицированную частоту $\omega - v\ell$ в (2.2). Тогда формула (2.3) сохранит справедливость при замене s величиной

$$\hat{s} \equiv c\ell/(\omega - v\ell) = s(1 - vs/c)^{-1} = \frac{\sin \theta}{1 + M \cos \theta}. \quad (2.9)$$

Соответствие между параметрами s и \hat{s} взаимно-однозначное, поскольку мы договорились о дозвуковом характере всего течения. Особенность возникает, когда течение сверхзвуковое, но граница дозвуковая, т.е. скорость имеет дозвуковую нормальную составляющую, однако такая ситуация здесь рассматриваться не будет.

Случай наличия вертикальной скорости сводится к случаю $v = 0$ путем подстановки \hat{s} из (2.9) вместо s во все соотношения между параметрами волны. Тем самым ограничения (2.4) задаются для функции $\hat{s}(\theta)$, видоизменяется формула (2.5):

$$D = \sqrt{1 - (1 - M^2) \hat{s}^2}, \quad (2.10)$$

а связи между углами и D в выражениях (2.5) и (2.6) сохраняются. Геометрические свойства вектора групповой скорости (2.7) изменились, ибо к нему добавилась вертикальная компонента v .

3. Свойства граничных условий для волнового уравнения

В предыдущем параграфе мы рассмотрели законы отражения плоских волн от плоской границы: по волновому вектору падающей волны однозначно определяется волновой вектор отраженной волны. Отношение амплитуд двух мод следует из граничного условия (1.4) при постоянном операторе \mathcal{L} . Обсудим способы построения граничных условий и проведем исследование их отражающих свойств. Ради определенности будем иметь дело с правой границей области.

Начнем с волнового уравнения в неподвижной среде

$$p'_{tt} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = 0. \quad (3.1)$$

В этом случае горизонтальные волновые числа даются выражениями

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1-s^2}, \quad k_2 = -\frac{\omega}{c} \sqrt{1-s^2}, \quad (3.2)$$

где $s = cl/\omega$. Удобно перейти в (3.2) к безразмерному волновому числу $\zeta = ck/\omega$:

$$\zeta_1 = \sqrt{1-s^2}, \quad \zeta_2 = -\sqrt{1-s^2}. \quad (3.3)$$

($\zeta_j = ck_j/\omega$.) Частное решение уравнения (3.1) рассмотрим в виде следующей комбинации падающей и отраженной волн:

$$p' = \exp\{i\omega t - ik_1 x - i\ell y\} + R \exp\{i\omega t - ik_2 x - i\ell y\}. \quad (3.4)$$

Число R , называемое коэффициентом отражения (амплитудным), определяется из правого граничного оператора \mathcal{L} как

$$R = -\frac{\hat{\mathcal{L}}(k_1, \ell, \omega)}{\hat{\mathcal{L}}(k_2, \ell, \omega)}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим более узкий класс граничных условий: уравнения, в которых все производные имеют одинаковый порядок $m \geq 0$. В таком случае образ граничного оператора $\hat{\mathcal{L}}(k, \ell, \omega)$ является однородной функцией своих аргументов:

$$\hat{\mathcal{L}}(k, \ell, \omega) = \omega^m \hat{\mathcal{L}}(k/\omega, \ell/\omega, 1) = \omega^m \mathcal{L}'(\zeta, s). \quad (3.6)$$

Выражение для коэффициента отражения (3.5) с учетом (3.6) переписывается в виде

$$R = -\frac{\mathcal{L}'(\zeta_1, s)}{\mathcal{L}'(\zeta_2, s)}. \quad (3.7)$$

Итак, коэффициент отражения не изменяется с частотой и является функцией s : $R = R(s)$. В свою очередь, величина s зависит от угла падения θ (в данном случае $s = \sin \theta$), а следовательно, $R = R(\theta)$.

Ключевым фактом [10] является невозможность постановки локального точного неотражающего условия для волнового уравнения (3.1), т.е. не существует дифференциального либо дифференциально-алгебраического оператора, при котором числитель (3.7) или (3.5) тождественно равен нулю, но знаменатель не обращается в нуль. Связано это с тем, что образ Фурье локального оператора не может содержать иррациональное выражение $\sqrt{1-s^2}$.

Граничные условия [10, 11] основываются на приближении радикала рациональной функцией

$$\sqrt{1-s^2} \sim r(s) = \frac{p_m(s)}{q_n(s)},$$

где $p_m(s)$, $q_n(s)$ — многочлены степеней m , n . Это приводит к дисперсионному уравнению

$$\zeta = r(s),$$

и коэффициент отражения (3.7) дается формулой

$$R(s) = \frac{\sqrt{1-s^2} - r(s)}{\sqrt{1-s^2} + r(s)} = \frac{q_n(s)\sqrt{1-s^2} - p_m(s)}{q_n(s)\sqrt{1-s^2} + p_m(s)}. \quad (3.8)$$

Поскольку $\sqrt{1-s^2}$ является фактически функцией от s^2 , в качестве $r(s)$ берется, как правило, четная функция s . Имеются, однако, подходы [12, 13], связанные с несимметричными выражениями $r(s)$ и основанные на определении преобладающей ориентации падающих волн.

Укажем простейшие аппроксимации радикала и вытекающие из них граничные условия. Разложение Тейлора по степеням s дает:

$$\sqrt{1-s^2} = 1 + O(s^2); \quad (3.9)$$

$$\sqrt{1-s^2} = 1 - 0.5 s^2 + O(s^4). \quad (3.10)$$

Отсюда получим два варианта правого граничного условия, отбрасывая в (3.9), (3.10) остаточные члены, подставляя выражения в (3.2) и производя обратное преобразование Фурье:

$$p'_t + c p'_x = 0; \quad (3.11)$$

$$p'_{tt} + c p'_{xt} - 0.5 c^2 p'_{yy} = 0. \quad (3.12)$$

Коэффициенты отражения (3.8) для условий (3.11), (3.12) будут, соответственно,

$$R = -\frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{1 + \sqrt{1-s^2}} = -\operatorname{tg}^2(\theta/2);$$

$$R = -\left(\frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{1 + \sqrt{1-s^2}}\right)^2 = -\operatorname{tg}^4(\theta/2).$$

Таким образом, граничные условия (3.11) и (3.12) — точные неотражающие для волн, падающих по нормали к Γ' , и имеют точность $O(s^2)$ и $O(s^4)$ соответственно при малых s .

В прикладных целях можно применять различные эквивалентные формы граничного условия (3.12), подставляя в него основное уравнение (3.1), справедливое в окрестности границы. В частности, замена второй производной по времени p'_{tt} дает уравнение

$$p'_{xt} + c p'_{xx} + 0.5 c p'_{yy} = 0, \quad (3.13)$$

а замена члена p'_{yy} в (3.12) —

$$p'_{tt} + 2c p'_{xt} + c^2 p'_{xx} = 0. \quad (3.14)$$

Очевидно, что коэффициент отражения для граничных условий (3.12)–(3.14) одинаковый.

Отметим, что граничные операторы из (3.11) и (3.14) порождают семейство операторов n -го дифференциального порядка

$$\mathcal{L}p' \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)^n p' = 0. \quad (3.15)$$

Граничное условие (3.15) дает коэффициент отражения (3.7), равный

$$R = - \left(\frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{1 + \sqrt{1-s^2}} \right)^n = - \operatorname{tg}^{2n}(\theta/2).$$

Важной проблематикой является математическая корректность задач при постановке граничных условий в двумерных задачах [14]. Для корректности необходимо (но не достаточно), чтобы коэффициент отражения (3.5) или (3.7) имел знаменатель, не равный нулю во всей области определения. Иначе граничное условие разрешало бы входящую волну с произвольной амплитудой.

Дифференциальные граничные уравнения высокого порядка в большинстве случаев ведут к неустойчивости решения. Для волнового уравнения в [11] построен исчерпывающий класс корректных приближений радикала $\sqrt{1-s^2}$. В других моделях конвекция и прочие факторы создают дополнительные трудности. Подробнее данная тема будет обсуждаться в статье, посвященной линеаризованным уравнениям Эйлера.

Второе существенное обстоятельство. Ни для какого локального граничного условия коэффициент отражения не является малым при всех углах падения. В частности, всегда происходит полное отражение касательных (“скользящих”) волн:

$$|R(\theta)| \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow \pm\pi/2.$$

Как для волнового уравнения, так и в других случаях нежелательны граничные условия, допускающие, чтобы коэффициент отражения превышал единицу при каких-либо волновых параметрах. Это означало

бы возможность отражения волн с увеличением амплитуды. Поэтому к граничному условию предъявляется требование¹

$$|R(\theta)| \leq 1 \quad (3.16)$$

при всех углах падения θ . Выписанные выше граничные условия удовлетворяют (3.16). Ниже вернемся к оценке отражающих свойств граничных условий во всем диапазоне углов падения.

Мы не будем стремиться к значительному улучшению аппроксимации точного неотражающего условия. Помимо перечисленных причин, главную роль здесь играет то, что в реальных задачах газовой динамики качество таких граничных условий существенно падает по сравнению с данными линейной теории.

Затронем вопрос о граничных условиях для трехмерного волнового уравнения

$$p'_{tt} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz}) = 0. \quad (3.17)$$

Рассмотрим полупространство $\Omega' = \{x < 0, -\infty < y, z < \infty\}$ с искусственной правой границей $\Gamma' = \{x = 0, -\infty < y, z < \infty\}$. Образ Фурье (3.17) в терминах функций

$$p' = \exp\{i\omega t - ikx - il_y y - il_z z\}$$

есть дисперсионное уравнение

$$-\omega^2 + c^2 (k^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2) = 0.$$

Решив его относительно горизонтального волнового числа k , находим:

$$\zeta_1 = \sqrt{1-s^2}, \quad \zeta_2 = -\sqrt{1-s^2}, \quad \text{где } \zeta_j = ck_j/\omega, \quad s^2 = \frac{c^2}{\omega^2} (\ell_y^2 + \ell_z^2).$$

Как видим, задача о построении неотражающего условия сводится к двумерному случаю (3.3). Приближения радикала по формулам (3.9) и (3.10) приводят к уравнениям (3.11) и

$$p'_{tt} + c p'_{xt} - 0.5 c^2 (p'_{yy} + p'_{zz}) = 0 \quad (3.18)$$

вместо (3.12). Примечательно, что замена в (3.18) выражения $p'_{yy} + p'_{zz}$ с помощью (3.17) возвращает к уравнению (3.14). Выражения для коэффициентов отражения, определяемых двумя указанными граничными условиями, остаются прежними.

Обратимся к общему случаю уравнения двумерных волн в движущейся среде (1.2) при $u^2 + v^2 < c^2$. Рассмотрим только правую границу,

¹Связь данного свойства с корректностью постановки задачи нетривиальна.

которая является выходной при $u > 0$ и входной при $u < 0$. Дисперсионные соотношения двух акустических мод и соответствующие выражения для волновых чисел имеют вид (см. (2.10)):

$$\begin{aligned} \omega &= uk + v\ell + ck\sqrt{1+\ell^2/k^2}; \\ k_1 &= \frac{(\omega - v\ell)(-u + cD)}{c^2 - u^2} \quad \text{или} \quad \zeta_1 = \frac{s}{\hat{s}} \frac{D-M}{1-M^2}; \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \omega &= uk + v\ell - ck\sqrt{1+\ell^2/k^2}; \\ k_2 &= -\frac{(\omega - v\ell)(u + cD)}{c^2 - u^2} \quad \text{или} \quad \zeta_2 = -\frac{s}{\hat{s}} \frac{D+M}{1-M^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отражение волн от правой границы будем, как и прежде, изучать, рассматривая комбинацию гармоник (3.4) и коэффициент отражения (3.5).

Простейший вариант правого граничного условия — одномерное уравнение. Полагая в дисперсионном соотношении (3.19) $\ell = 0$, получаем

$$k = \omega/(c+u) \quad \text{или} \quad \zeta = 1/(1+M).$$

Отсюда имеем условие на правой границе

$$p'_t + (c+u)p'_x = 0. \quad (3.21)$$

Коэффициент отражения вычисляем по формуле (3.7):

$$R = -\frac{1 - D + (1-M)v\hat{s}/c}{1 + D + (1-M)v\hat{s}/c}. \quad (3.22)$$

R является величиной первого порядка малости по \hat{s} (также по s и по углу θ).

Предпочтительны такие аппроксимации дисперсионного соотношения (3.19), в которых радикал D , определяемый из (2.10), разлагается по степеням \hat{s} . Разложение $D \sim r(\hat{s})$ содержит только четные степени \hat{s} . Это же свойство передается коэффициенту отражения (3.7), который, по аналогии с неподвижным случаем (3.8), выражается как

$$R(\hat{s}) = \frac{D - r(\hat{s})}{D + r(\hat{s})}. \quad (3.23)$$

В граничных условиях, получаемых путем обратного преобразования Фурье, производные по t обязательно сопровождаются конвективными членами в направлении y : $p'_t + vp'_y$.

Начальное приближение $D \sim 1$ дает после подстановки в (3.19) дисперсионное соотношение

$$k = \frac{\omega - v\ell}{c + u}$$

и граничное условие

$$p'_t + (c+u)p'_x + v p'_y = 0, \quad (3.24)$$

для которого коэффициент отражения (3.23) есть

$$R = -\frac{1-D}{1+D} = -\frac{1-M}{1+M} \operatorname{tg}^2(\theta/2) = -\operatorname{ctg}^2(\theta^*/2) \operatorname{tg}^2(\theta/2)$$

(см. формулы (2.4), (2.5)). Здесь R — величина второго порядка малости по θ , и она, кроме того, не зависит от вертикальной компоненты течения.

Учтем теперь следующий член разложения Тейлора $D(\delta)$ из (2.10). В (3.19) выражение для k_1 приводит к

$$k = \frac{\omega - v\ell}{c + u} - \frac{0.5 c \ell^2}{\omega - v\ell}.$$

Отсюда имеем граничное условие (ср. (3.12)):

$$p'_{tt} + 2v p'_{yt} + v^2 p'_{yy} + (c+u)(p'_{xt} + v p'_{xy} - 0.5 c p'_{yy}) = 0. \quad (3.25)$$

Другая форма записи (3.25), аналогичная (3.13), получается путем замены члена p'_{tt} в (3.25) при помощи основного уравнения (1.2):

$$p'_{xt} + (c+u)p'_{xx} + v p'_{xy} + 0.5 c p'_{yy} = 0. \quad (3.26)$$

Коэффициент отражения (3.23) граничных условий (3.25) и (3.26) равен

$$R = -\left(\frac{1-D}{1+D}\right)^2 = -\left(\frac{1-M}{1+M}\right)^2 \operatorname{tg}^4(\theta/2),$$

т.е. $R = O(\delta^4)$. Легко видеть, что граничные условия (3.24) и (3.26) удовлетворяют требованию (3.16).

Простейшее граничное условие (3.21) оказывается менее надежным. А именно, если граница входная, абсолютная величина скорости фоновое течения достаточно близка к скорости звука, а вертикальная компонента скорости v значительна, то в некотором диапазоне углов падения θ коэффициент отражения (3.22) может обращаться в бесконечность или, по крайней мере, по модулю превышать единицу. Исследование довольно громоздко и потому вынесено в Приложение А.

4. Распространение и отражение неплоских волн

В предыдущих параграфах мы рассматривали свойства плоских гармонических волн, удовлетворяющих волновому уравнению с конвекцией

при тех или иных граничных условиях. Теория предполагала разложимость любого решения по таким волнам. Однако в типичных практических многомерных внешних задачах преобладают волны других видов: от сосредоточенных начальных возмущений либо источников различного типа (мультиполей — монополей, диполей, квадрупольей и т.д.). Разложение по плоским волнам в принципе существует, но коэффициенты имеют характерное распределение по модам, и это распределение плохо поддается теоретическому исследованию. По указанной причине нельзя обойти вниманием цилиндрические и сферические (в трехмерном случае) волны.

Анализ неплоских волн много сложнее, чем плоских. В связи с этим мы проведем сравнение разных видов волн, по возможности сводя результаты к плоским волнам, подобранным соответствующим образом. Будем рассматривать цилиндрические гармоники в двумерной среде, а также — для полноты картины — сферические трехмерные волны. Отметим, что трехмерный случай в ряде ситуаций проще двумерного.

Итак, рассмотрим неоднородное волновое уравнение в неподвижной среде

$$p'_{tt} - c^2 \Delta p' = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (4.1)$$

где \mathbf{x} — точка d -мерного пространства, Δ — оператор Лапласа. Пусть некоторая точка \mathbf{x}_0 является источником возмущений. Укажем важнейшие примеры таких задач для уравнения (4.1).

Первый случай — задача Коши с сосредоточенным начальным возмущением. Уравнение (4.1) задано при $t > 0$, правая часть $f \equiv 0$, начальное условие есть

$$p' = a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad p'_t \equiv 0, \quad t = 0, \quad (4.2)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — многомерная функция Дирака.

Другой пример — изотропный источник гармонических колебаний. Уравнение (4.1) справедливо при $t \in \mathbb{R}$, правая часть имеет вид

$$f(\mathbf{x}, t) = a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{i\omega t}. \quad (4.3)$$

Перейдем к решению выписанных задач. Начнем с трехмерного случая ($d = 3$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$). Задача о точечном источнике колебаний (4.1), (4.3) принимает вид

$$p'_{tt} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz}) = a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.4)$$

Решение (4.4) есть

$$p' = \frac{A}{r} \exp\{i\omega t - i\bar{r}\}, \quad (4.5)$$

где r — расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{x}_0 , безразмерный радиус $\bar{r} = \omega r/c$.

Решение задачи о точечном начальном возмущении (3.17), (4.3) выражается [4] в терминах обобщенных функций и формально представимо в виде

$$p' = A V_3(r, t), \quad (4.6)$$

т.е. обладает пространственной изотропией.

В двумерном пространстве ($d = 2$, $\mathbf{x} = (x, y)$) задача о точечном источнике (4.1), (4.3) имеет вид

$$p'_{tt} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = a \delta(x-x_0, y-y_0) e^{i\omega t}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.7)$$

Ее решением является

$$p' = a' e^{i\omega t} H_0(\bar{r}) = \frac{a'}{\sqrt{\bar{r}}} \exp\{i\omega t - i\bar{r}\} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (i\bar{r})^{-j} \right], \quad (4.8)$$

где $H_0(\bar{r})$ — функция Ханкеля (2-го рода) нулевого индекса, представляемая в форме асимптотического ряда. Ниже нас будет интересовать приближение коротких волн и/или больших расстояний $\bar{r} \gg 1$.

Задача Коши (3.1), (4.3) имеет, как и в (4.6), изотропное решение $p' = A V_2(r, t)$, где обобщенная функция V_2 указана, например, в [4].

Для практических целей решения прикладных задач и постановки к ним граничных условий наиболее полезна следующая модель. Пусть тип точечного источника известен, но отсутствует информация о его местоположении \mathbf{x}_0 и интенсивности. Предполагается лишь то, что \mathbf{x}_0 принадлежит расчетной области.

Рассмотрим простой частный случай задач, для которых существует точное неотражающее условие: распространение изотропных волн в трехмерном пространстве от источника либо начального возмущения, находящегося в заданной точке. Тогда решение будет зависеть от двух переменных (r, t). Волновой оператор следует переписать в сферических координатах, причем в данной ситуации он разлагается в произведение двух операторов:

$$p'_{tt} - c^2 \Delta p' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial r} + \frac{c}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial r} - \frac{c}{r} \right) p'.$$

Первый множитель описывает волны, движущиеся от центра к периферии, второй — в обратном направлении. Физический смысл имеют только волны первого типа, и потому решения соответствующих задач, например, функция (4.5), удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{L}p' \equiv p'_t + c(p'_r + p'/r) = 0. \quad (4.9)$$

Пусть задача ставится в области с искусственной границей, в частности, в полупространстве $\Omega' = \{x < 0, -\infty < y, z < \infty\}$. При этом

$x_0 < 0$. Тогда уравнение (4.9) должно использоваться в качестве граничного условия на $\Gamma' = \{x = 0\}$. Напомним также, что в задачах без начальных условий, таких как (4.1), (4.3), для выделения единственного решения служит условие излучения [4, 15], получающееся из (4.9) при $r \rightarrow \infty$.

В более широких классах задач для трехмерного волнового уравнения (при смешанном типе источника), а также в любых двумерных случаях, локальных точных неотражающих условий не существует. В [16] построена последовательность приближенных неотражающих условий n -го дифференциального порядка, точности $O(\bar{r}^{-2n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, для сферических волн (о понятии степени точности граничного условия поговорим ниже).

Другая трудность связана не с типом источника, а с его локализацией. Например, если источник изотропных сферических волн лежит в точке, отличной от предполагаемой \mathbf{x}_0 , то в граничном условии (4.9) следует переопределить радиус r , а в исходном виде оно перестает быть точным. Использование серии граничных условий из [16] возможно и здесь, поскольку в некоторой внешней области справедливо разложение решения по мультиполям, центрированным в \mathbf{x}_0 . Вместе с тем, исчезает то достоинство условий [16], что точность каждого из них повышается с увеличением частоты колебаний ω в (4.4).

Ошибка локализации источника аналогична ошибке определения угла падения плоских волн. Это соображение дает основание применять "бездисперсионные" граничные условия с операторами вида $\mathcal{L}'(\zeta, s)$ при моделировании волн от сосредоточенных источников.

Обсудим вопрос о теоретической оценке точности искусственного граничного условия. Он решается просто при рассмотрении плоских гармонических волн, взаимодействующих с плоской границей, на которой задано условие, постоянное по всей границе. Оценкой граничного условия служит амплитудный коэффициент отражения (3.5) либо (3.7) (в трехмерном случае формулы аналогичны указанным).

Ввести коэффициент отражения позволяет следующая ситуация. Пусть в некоторой области с границей Γ задано основное уравнение и граничное условие

$$\mathcal{L}p'|_{\Gamma} = 0. \quad (4.10)$$

Предположим, решение основного уравнения $p' = p_1(\mathbf{x}, t)$, условно называемое падающей волной, таково, что (4.10) определяет решение дифференциальной задачи вида

$$p' = p_1(\mathbf{x}, t) + R p_2(\mathbf{x}, t) \quad (4.11)$$

с постоянным и единственным значением R . Функция p_2 должна иметь одинаковый порядок величины с p_1 , например, удовлетворять условию

нормировки типа

$$|p_1(\mathbf{x}_\Gamma, t)| = |p_2(\mathbf{x}_\Gamma, t)|,$$

где \mathbf{x}_Γ — произвольная граничная точка $\mathbf{x} \in \Gamma$. Тем самым

$$R = R[p_1] = -\frac{\mathcal{L}p_1(\mathbf{x}_\Gamma, t)}{\mathcal{L}p_2(\mathbf{x}_\Gamma, t)} \quad (4.12)$$

есть искомый коэффициент отражения.

Примеры, когда описанные манипуляции можно осуществить на практике, довольно редки. Необходимо, чтобы для выбранной функции p_1 в явном виде строилась функция p_2 , причем, желательно, единая для целого класса операторов \mathcal{L} из (4.10), ибо речь идет о сравнении граничных условий друг с другом. Указанному требованию удовлетворяют плоские волны и граничные операторы с постоянными коэффициентами. Следующий пример также допускает введение коэффициента отражения.

Рассмотрим уравнение изотропных волн в области, ограниченной сферой радиуса r_1 :

$$p'_{tt} - c^2 \left(p'_{rr} + \frac{2}{r} p'_r \right) = 0, \quad 0 \leq r_0 < r < r_1.$$

По образцу (4.11) запишем решение (см. (4.5)):

$$p' = p_1 + Rp_2 \equiv \frac{e^{i\omega t}}{r} \left[\exp\{-i(\bar{r} - \bar{r}_1)\} + R \exp\{i(\bar{r} - \bar{r}_1)\} \right], \quad (4.13)$$

где $\bar{r}_1 = \omega r_1 / c$. Значение R зависит от граничного условия при $r = r_1$. Если в этой точке задать уравнение (4.9), то, очевидно, $R = 0$. Будем искать коэффициенты отражения в случае постановки граничных условий, предложенных в § 3. При этом производной по x , т.е. по нормали к границе, отвечает производная по r .

Для условия (3.11)

$$\mathcal{L}p' \equiv p'_t + c p'_r = 0$$

из (4.13) получаем

$$\mathcal{L}p_1 = i\omega p_1 + c \frac{\partial p_1}{\partial r} = -\frac{cp_1}{r}, \quad \mathcal{L}p_2 = 2i\omega p_2 - \frac{cp_2}{r}.$$

Отсюда, согласно (4.12),

$$R = \frac{1}{2i\bar{r}_1 - 1} = -\frac{i}{2\bar{r}_1} + O(\bar{r}_1^{-2}). \quad (4.14)$$

Условие (3.14)

$$\mathcal{L}p' \equiv p'_{tt} + 2c p'_{rt} + c^2 p'_{rr} = 0$$

дает

$$\begin{aligned} \mathcal{L}p_1 &= \frac{2c^2}{r^2} p_1, & \mathcal{L}p_2 &= -\frac{4}{r^2} (\omega^2 r^2 + ic\omega r - c^2/2) p_2, \\ R &= \frac{1}{2\bar{r}_1^2 + 2i\bar{r}_1 - 1} = \frac{1}{2\bar{r}_1^2} + O(\bar{r}_1^{-3}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Формулы (4.14)–(4.15) демонстрируют повышение порядка малости коэффициента отражения с ростом порядка точности по s граничных условий для многомерного волнового уравнения.

Для большинства задач и функций $p_1(\mathbf{x}, t)$ нет явного выражения отраженной волны $p_2(\mathbf{x}, t)$ из (4.11) либо она представляется в виде разложения (распределения) по известным функциям, где коэффициенты разложения зависят от выбора граничного условия. В такой ситуации числитель дроби в правой части (4.12) вычисляется, но знаменатель теряет определенность. Если граничное условие математически корректное, то в некотором смысле можно утверждать, что знаменатель (4.12) не обращается в нуль и сохраняет априорный порядок величины. Таким образом, граничный оператор должен, прежде всего, давать при действии на “пробную” падающую волну p_1 малую величину. Порядок точности граничного условия равен отношению порядков величины числителя и знаменателя дроби из (4.12).

Предыдущие рассуждения применим к исследованию отражающих свойств операторов класса (3.6) в задаче о взаимодействии изотропных цилиндрических волн (4.7) с правой границей $\{x = 0\}$. Пусть, для большей определенности, источник находится в точке $(x_0, 0)$, где $x_0 < 0$.

Обратимся к числителю выражения (4.12). В данном случае $p_1 = p'$ из формулы (4.8). Утверждается, что

$$\mathcal{L}p'(0, y, t) = \omega^m \mathcal{L}'(\zeta_1, s) p' + O(\omega^m \bar{r}^{-1} p'), \quad (4.16)$$

где

$$\zeta_1 = -x_0/r, \quad s = y/r, \quad r = \sqrt{x_0^2 + y^2}$$

(легко проверить выполнение первого равенства (3.3)). Иными словами, основной вклад в действие оператора \mathcal{L} на цилиндрическую волну вносит член, описывающий действие того же оператора на соответствующую плоскую волну. В окрестности рассматриваемой точки $(0, y_1)$ решение (4.8) близко к функции

$$p' \simeq A(y_1) \exp\{i\omega t - ik_1 x - i\ell y\}, \quad \text{где } k_1 = -\frac{\omega x_0}{cr}, \quad \ell = \frac{\omega y_1}{cr}.$$

Справедливость оценки (4.16) вытекает из теоремы, доказанной в Приложении Б.

При малых углах падения ($s \ll 1$) полученный результат, по-видимому, можно усилить. Увеличение порядка точности $\mathcal{L}'(\zeta_1, s)$ по s дает рост порядка малости по \bar{r} остаточного члена (4.16). Это наблюдается на примере операторов (3.15).

Чтобы оценить коэффициент отражения, необходима информация о знаменателе дроби (4.12), т.е. о свойствах отраженной волны p_2 . Очевидно, ее масштаб (характерная амплитуда) меняется вдоль границы, поскольку величина (4.16) зависит от s , причем для типичных граничных условий значение \mathcal{L}' мало при нормальном падении волны. Можно принять традиционную для физики гипотезу о возможности *локальной* замены как падающих, так и отраженных волн эффективными плоскими волнами. В данном контексте удобно рассматривать вместо постоянного коэффициента отражения $R = \text{const}$ одинаковую амплитуду отраженной волны $|p_2|$ при $x = 0$ и переменную величину $R = R(y)$.

Формула (4.16) свидетельствует в пользу более сильного предположения. Любой граничный оператор из класса (3.6) действует на функцию p_2 приблизительно так же, как на плоскую гармоническую волну с волновым вектором, отвечающим законам отражения падающей волны в данной точке. В результате правомерно считать коэффициент отражения из (4.12) близким к $R(s)$, задаваемому выражением (3.7).

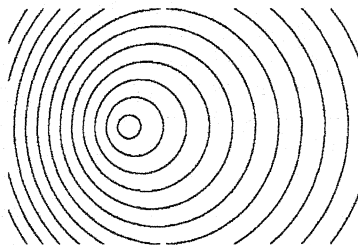


Рис. 2. Фазовые линии волн от точечного источника в подвижной среде

Волны в подвижной среде — более сложный для исследования объект.

Пусть сферические волны в среде, движущейся со скоростью $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ при $|u| < c$, генерирует неподвижный точечный источник:

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + u^2 p'_{xx} - c^2(p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz}) = a \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.17)$$

Задача (4.17) имеет решение

$$p' = A \frac{\exp\{i\omega t - i\bar{r}\}}{r(1 + M \cos \theta)}, \quad (4.18)$$

в котором величины связаны соотношениями (для простоты $y_0 = z_0 = 0$):

$$r = \frac{x - x_0}{M + \cos \theta} = \sqrt{y^2 + z^2} / \sin \theta. \quad (4.19)$$

Фазовыми поверхностями (4.18) являются эксцентрические сферы, изображенные на рис. 2. Геометрию волн иллюстрирует также рис. 1, где радиус $r = 1$ и измеряется он от центра окружности O , тогда как источник лежит в точке O' . Заметим, что амплитуда волн (4.18) меняется с направлением излучения.

Рассмотрим теперь волны, излучаемые неподвижным цилиндрическим источником при $\mathbf{u} = (u, 0)$:

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + u^2 p'_{xx} - c^2 (p'_{xx} + p'_{yy}) = a \delta(x - x_0, y - y_0) e^{i\omega t}, \quad (4.20)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Решить задачу (4.20) можно методом спуска [15], т.е. интегрированием трехмерного решения (4.18) по координате z . С помощью замены переменных задача сводится к случаю неподвижной среды (4.8):

$$p' = a' H_0 \left(\frac{1 + M \cos \theta}{1 - M^2} \bar{r} \right) \exp\{i\omega t - iu\omega x/c^2\} \simeq$$

$$\simeq \frac{A}{\sqrt{r}} \frac{\exp\{i\omega t - i\bar{r}\}}{\sqrt{1 + M \cos \theta}}. \quad (4.21)$$

Излучение волн анизотропно.

Задачи Коши с точечным начальным возмущением в двумерном и трехмерном пространствах превращаются в аналогичные задачи для неподвижной среды (4.1), (4.3) при переходе в систему отсчета, движущуюся со скоростью \mathbf{u} . Решение уравнения

$$p'_{tt} + 2u p'_{xt} + u^2 p'_{xx} - c^2 \Delta p' = 0$$

с начальным условием (4.3) выражается как

$$p' = A V_d(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{u}t|, t), \quad d = 2, 3, \quad (4.22)$$

где V_d — обобщенные функции, введенные для неподвижного случая. Таким образом, наблюдаются изотропные волны от перемещающегося центра.

На свойствах граничных условий для задач об источниковых волнах в движущейся среде детально останавливаться не будем. Точных локальных неотражающих условий здесь, по-видимому, не существует. Отметим, что в [17] подход [16] расширяется на построение граничных условий в задачах о сферических и цилиндрических волнах при наличии конвекции. Наконец, при исследовании взаимодействия волн с

плоской границей $\{x = 0\}$ локальная их замена эффективными плоскими волнами также допустима. Для граничных операторов без младших производных, по всей видимости, справедлива формула (4.16). Ее доказательство становится более громоздким, чем в случае неподвижной среды, либо требует универсализации методики.

В дальнейшем оценка качества граничных условий и их оптимизация будет проводиться в рамках приближения плоских волн, плоских границ и постоянных коэффициентов.

5. Суммарные коэффициенты отражения

Для оценки отражающих свойств граничного условия используются коэффициенты отражения, определяемые этим условием. Однако, как мы видели, в большинстве задач не существует универсального коэффициента отражения. Он зависит от выбора вида падающей волны, а кроме того, зачастую носит локальный характер. В практических целях необходимо знать общую степень отражения волн с различными частотами и углами падения. Приходим к выводу, что следует определить понятие *суммарного*, или интегрального, коэффициента отражения.

Пусть область моделирования $\Omega' = \{x < 0\}$, граница $\Gamma' = \{x = 0\}$, пространство двух- или трехмерное. В случае плоских волн и граничных условий из класса (3.6) коэффициент отражения зависит только от угла падения: $R = R(\theta)$. Суммарный коэффициент отражения должен быть осреднением $R(\theta)$ по θ из диапазона углов падения. Основной вопрос стоит о выборе весовой функции, которая определяется типом волн. Будем рассматривать волны от сосредоточенных возмущений и источников, заменяя эти волны локальными плоскими аналогами в окрестности границы. Однако учтем зависимость амплитуды таких волн от пройденного расстояния и, возможно, угла излучения.

При осреднении имеет смысл использовать не амплитуды пары мод, а их энергетические характеристики: например, энергию либо поток энергии [5], что не одно и то же. Мы остановимся на плотности энергии. Для падающей волны эта величина пропорциональна квадрату модуля возмущения давления $|p'|^2$, а плотность энергии отраженной волны, в свою очередь, пропорциональна $|R|^2$. Оба параметра в конечном счете выражаются через угол падения θ , причем результат будет зависеть от вида волн.

5.1. Отражение волн в неподвижной среде

Применим принципы, изложенные выше, к конкретным примерам дифференциальных уравнений. Начнем со случая изотропного точечного источника для двумерного волнового уравнения (4.7). Точка (x_0, y_0)

находится внутри области моделирования, т.е. $x_0 < 0$. Заранее скажем, что конкретное местоположение источника на результат не повлияет. Амплитуда возмущения $|p'|$ подчиняется, согласно (4.8), асимптотическому закону

$$|p'| = \frac{A}{\sqrt{r}} \left[1 + O\left(\frac{c}{\omega r}\right) \right].$$

На правой границе $\{x = 0\}$ радиус $r = |x_0|/\cos \theta$ и

$$|p'| \simeq |p'(\theta)| = A' \sqrt{\cos \theta}. \quad (5.1)$$

Определим суммарный коэффициент отражения R_S для задачи (4.1), (4.3) и воспользуемся формулой (5.1):

$$R_S^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |R(\theta)|^2 \frac{|p'(\theta)|^2}{|p'(0)|^2} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |R(\theta)|^2 \cos \theta d\theta. \quad (5.2)$$

Нормировка интеграла выражает отношение интенсивностей косых волн и волн, падающих под прямым углом. Тем самым подчеркивается отличие цилиндрических волн от плоских. Если коэффициент отражения $R(\theta) \equiv 1$ (или оценивать не отраженные, а падающие волны), то суммарный коэффициент отражения меньше единицы: согласно (5.2),

$$R_S^2 = 2/\pi, \quad R_S = 0.7979.$$

Выпишем суммарные коэффициенты отражения для известных примеров граничных условий со своими зависимостями $R(\theta)$:

$$R(\theta) = -\operatorname{tg}^2(\theta/2); \quad R_S^2 = \frac{38}{3\pi} - 4, \quad R_S = 0.1787.$$

$$R(\theta) = -\operatorname{tg}^4(\theta/2); \quad R_S^2 = \frac{2642}{105\pi} - 8, \quad R_S = 0.09635.$$

Здесь мы рассматриваем суммарный коэффициент отражения в качестве функционала от функции $R(\theta)$, заданной на отрезке: $R_S[R]$. Средняя плотность энергии отраженных волн, отнесенная к средней плотности энергии падающих волн, равна $R_S^2[R]/R_S^2[1]$.

Когда коэффициент отражения R выражен через безразмерное волновое число $s = \sin \theta$, интеграл (5.2) преобразуется в

$$R_S^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |R(s)|^2 ds.$$

Для граничного уравнения, основанного на рациональной аппроксимации радикала, формула (3.8) дает

$$R_S^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{q_n(s) \sqrt{1-s^2} - p_m(s)}{q_n(s) \sqrt{1-s^2} + p_m(s)} \right]^2 ds. \quad (5.3)$$

В литературе встречалась [11] постановка задачи о приближении радикала $\sqrt{1-s^2}$ рациональной функцией методом наименьших квадратов. Речь идет о нахождении многочленов $p_m(s)$ и $q_n(s)$ заданных степеней из условия

$$\min_{p_m, q_n: q_n(0)=1} \int_{-1}^1 [q_n(s) \sqrt{1-s^2} - p_m(s)]^2 ds.$$

Как видим из (5.3), оптимизационная задача должна формулироваться немного иначе, хотя минимизация выражения (5.3) слишком трудна технически. Впрочем, мы перед собой подобных целей не ставим.

Суммарный коэффициент отражения введен выше для случая одиночного точечного источника (4.3). С тем же успехом эта величина определяется для нескольких или даже для распределенных источников при условии, что источники *некогерентны*. Поскольку вклад каждого источника в энергию отраженных волн пропорционален интегралу (5.2), при любых весах источников в сумме получается всё то же выражение (5.2).

Формула (5.2) справедлива не только для изотропного источника (4.3), но и для случайно ориентированного мультиполя. Пусть дан цилиндрический диполь

$$f(x, y, t) = a \frac{\partial \delta}{\partial x_\alpha} (x-x_0, y-y_0) e^{i\omega t}, \quad (5.4)$$

где через $\partial \delta / \partial x_\alpha$ обозначена производная дельта-функции по направлению α , причем ось равномерно распределена по углу $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Асимптотика $|p'|$ такова (ср. (5.1)):

$$|p'| \simeq |p'(\theta, \alpha)| = A' \sqrt{\cos \theta} \cos(\theta - \alpha). \quad (5.5)$$

Обобщая (5.2), введем суммарный коэффициент отражения для источника (5.4) как

$$R_S^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |R(\theta)|^2 |p'(\theta, \alpha)|^2 d\theta \Big/ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |p'(0, \alpha)|^2 d\alpha.$$

Подставляя сюда $|p'|$ из (5.5) и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим:

$$\begin{aligned} R_S^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |R(\theta)|^2 \cos \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta - \alpha) d\alpha \Big/ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |R(\theta)|^2 \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Вновь имеем для суммарного коэффициента отражения формулу (5.2).

Если вместо источника постоянной мощности рассматривать задачу Коши (3.1), (4.3), результат будет тот же. Амплитуда возмущения p' в момент пересечения границы обладает асимптотикой (5.1) (для начальных функций, слабо сходящихся к $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$), а значит, определение суммарного коэффициента отражения (5.2) сохраняет силу.

На практике задача ставится не в полуплоскости, а в ограниченной области, например, в прямоугольнике, правая граница которого имеет конечный размер по y . Это означает, что волны, распространяющиеся под углами θ , близкими к $\pm\pi/2$, не всегда достигают правой границы. Такие углы падения хотя и не исключены, поскольку источник (x_0, y_0) может располагаться сколь угодно близко к границе, но вероятность их меньше, чем малых θ . Строго учесть эти обстоятельства едва ли возможно, однако для большинства функций $R(\theta)$ суммарный коэффициент отражения (5.2) может служить верхней оценкой реальных отражающих свойств граничного условия.

Введем суммарный коэффициент отражения для общего случая. Следуя принципу, по которому было выведено выражение (5.2), определим суммарный коэффициент отражения формулой

$$R_S^2 = \frac{1}{|\Omega_+|} \int_{\Omega_+} |R(\Omega)|^2 \frac{|p'(\Omega)|^2}{|p'(\Omega_0)|^2} d\Omega. \quad (5.6)$$

Здесь Ω_+ — (телесный) угол падающих волн, $|\Omega_+|$ — его величина, Ω — текущее направление, Ω_0 — направление нормального падения; значение p' берется на границе области.

Трехмерные волны от точечного изотропного источника описываются уравнением (4.4). Правая граница Γ' есть плоскость $\{x = 0, -\infty < y, z < \infty\}$. Вместо двумерной асимптотики (5.1) выполняется вытекающее из (4.5) равенство

$$|p'| = A/r = A' \cos \theta. \quad (5.7)$$

Найдем выражение для суммарного коэффициента отражения, применяя формулу (5.6), где $\Omega_+ = \{\Omega : 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$, $|\Omega_+| = 2\pi$. Типичные граничные условия дают $R = R(\theta)$, и после подстановки (5.7) в (5.6) получаем

$$R_S^2 = \int_0^{\pi/2} |R(\theta)|^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \quad (5.8)$$

Укажем суммарные коэффициенты отражения для граничных усло-

вий, приведенных выше.

$$\begin{aligned}
 R(\theta) &= 1; & R_S^2 &= 1/3, & R_S &= 0.5774. \\
 R(\theta) &= -\operatorname{tg}^2(\theta/2); & R_S^2 &= \frac{25}{3} - 12 \ln 2, & R_S &= 0.1248. \\
 R(\theta) &= -\operatorname{tg}^4(\theta/2); & R_S^2 &= 61 - 88 \ln 2, & R_S &= 0.05521.
 \end{aligned}$$

Отличия от двумерного случая имеют очевидные причины. Сравнивая формулы (5.2) и (5.8), замечаем, что в трехмерном пространстве уменьшается роль как больших углов ($\theta \approx \pi/2$), так и малых ($\theta \approx 0$).

5.2. Отражение волн в подвижной среде

Рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда среда движется со скоростью $u \in (-c, c)$ параллельно оси x . Выясним, как волны от неподвижного сферического источника (4.17) ведут себя у правой границы. Из (4.18) и (4.19) вытекает:

$$|p'| = \frac{A}{r(1 + M \cos \theta)} = A' \frac{M + \cos \theta}{1 + M \cos \theta}. \quad (5.9)$$

Пусть коэффициент отражения $R = R(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \theta^*$. Вводим суммарный коэффициент отражения, согласно (5.6), при телесном угле $\Omega_+ = \{\Omega : 0 \leq \theta \leq \theta^*\}$ величины $|\Omega_+| = 2\pi(1+M)$. После подстановки (5.9) в (5.6) получаем выражение

$$R_S^2 = \frac{1}{1+M} \int_0^{\theta^*} |R(\theta)|^2 \left(\frac{M + \cos \theta}{1 + M \cos \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta. \quad (5.10)$$

В таблице 1 приведены значения R_S для типичных примеров коэффициентов отражения $R(\theta)$ при различных числах Маха M . При $M = 0$ результаты, разумеется, совпадают со случаем неподвижной среды (5.8). То, что для $R(\theta) \equiv 1$ значение R_S меняется с числом Маха, объясняется неравновесной интенсивностью излучения волн по направлению (см. (4.18)).

Ситуация иная, когда ставится задача Коши: (4.17) с нулевой правой частью и (4.3). В силу выражения (4.22), обобщенная амплитуда, как и в неподвижной среде, не зависит от угла излучения и имеет асимптотику

$$|p'| \simeq A/r = A'(M + \cos \theta).$$

Модель	M	R(θ)		
		1	$\frac{1-M}{1+M} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$	$\operatorname{ctg}^4 \frac{\theta^*}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{2}$
Источник 2D (5.14)	0	0.7979	0.1787	0.09635
	1/2	0.8372	0.1608	0.08268
	-1/2	0.7734	0.1878	0.1043
З. Коши 2D (5.13)	0	0.7979	0.1787	0.09635
	1/2	0.6090	0.1281	0.06250
	-1/2	0.6540	0.2129	0.1217
Источник 3D (5.10)	0	0.5774	0.1248	0.05521
	1/2	0.6744	0.1167	0.04661
	-1/2	0.5185	0.1258	0.05907
З. Коши 3D (5.11)	0	0.5774	0.1248	0.05521
	1/2	0.5774	0.07982	0.02836
	-1/2	0.5774	0.1572	0.07800

Таблица 1. Суммарные коэффициенты отражения $R_S[R]$ для различных типов волн и чисел Маха

В итоге формула для суммарного коэффициента отражения не совпадает с (5.10):

$$R_S^2 = \frac{1}{(1+M)^3} \int_0^{\theta^*} |R(\theta)|^2 (M + \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta. \quad (5.11)$$

При $R(\theta) \equiv 1$ получается одинаковый суммарный коэффициент отражения для любых чисел Маха: $R_S = 1/\sqrt{3}$. Результаты для основных $R(\theta)$ указаны в таблице 1. Зависимость R_S от числа Маха более резкая, чем в случае точечного источника (5.10). Однотипные граничные условия гораздо хуже “работают” на дозвуковом входе, чем на дозвуковом выходе.

Анализ двумерных волн в движущейся среде начнем со случая задачи Коши (4.2) для однородного уравнения (2.1). Амплитуда возмущений имеет асимптотику

$$|p'| \simeq A/\sqrt{r} = A' \sqrt{M + \cos \theta}. \quad (5.12)$$

Коэффициент отражения $R(\theta)$ задан при $-\theta^* \leq \theta \leq \theta^*$. Определение суммарного коэффициента отражения (5.6) с подстановкой (5.12) обобщает формулу (5.2):

$$\begin{aligned} R_S^2 &= R_{SC}^2 = \frac{1}{2\theta^*} \int_{-\theta^*}^{\theta^*} |R(\theta)|^2 \frac{|p'(\theta)|^2}{|p'(0)|^2} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\theta^*(1+M)} \int_{-\theta^*}^{\theta^*} |R(\theta)|^2 (M + \cos \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Сводка значений $R_S[R]$ представлена в таблице 1. Суммарный коэффициент отражения опять-таки существенно зависит от числа Маха.

Далее рассмотрим волны, излучаемые неподвижным цилиндрическим источником (4.20). Из (4.21) и первого равенства (4.19) следует, что на правой границе

$$|p'| \simeq \frac{A}{\sqrt{r} \sqrt{1 + M \cos \theta}} = A' \left(\frac{M + \cos \theta}{1 + M \cos \theta} \right)^{1/2}.$$

Вместо (5.13) имеем следующую формулу для суммарного коэффициента отражения:

$$R_S^2 = R_{S1}^2 = \frac{1}{2\theta^*} \int_{-\theta^*}^{\theta^*} |R(\theta)|^2 \frac{M + \cos \theta}{1 + M \cos \theta} d\theta. \quad (5.14)$$

Значения R_S при различных коэффициентах $R(\theta)$ показывают (табл. 1) довольно слабую зависимость от числа Маха.

Из всего изложенного следует, что суммарный коэффициент отражения по ряду причин не описывает точно степень отражения волн в конкретной задаче. В то же время величина $R_S[R]$ служит вполне универсальной мерой отражающих свойств данного граничного условия. Пусть, например, в некоторой двумерной задаче присутствует как начальное возмущение, так и источник колебаний, который движется медленнее потока и затухает во времени. Тогда с высокой степенью достоверности можно полагать, что относительная плотность энергии отраженных волн лежит между значениями выражений R_{SC}^2 из (5.13) и R_{S1}^2 из (5.14). Две разновидности суммарного коэффициента отражения дают, таким образом, нижнюю и верхнюю оценку отражения волн в более общем случае.

Приложение А. Анализ коэффициента отражения для простейшего граничного условия

Проведем исследование, при каких параметрах фонового течения граничное условие (3.21) может или не может быть заведомо некорректным или давать отражение волны с увеличением амплитуды. Выражение для коэффициента отражения (3.22) перепишем с использованием формул (2.9), (2.5) и в новых обозначениях:

$$R(\theta) = -\frac{(1-M_x)(1 - \cos \theta + M_y \sin \theta)}{(1+M_x)(1 + \cos \theta) + (1-M_x)M_y \sin \theta}, \quad (\text{A.1})$$

где $M_x = u/c$, $M_y = v/c$. Введем также скалярное число Маха

$$M \equiv \sqrt{M_x^2 + M_y^2} < 1.$$

Величина (A.1) зависит, помимо угла падения, от двух параметров течения M_x и M_y : $R = R(\theta; M_x, M_y)$. Проведя классификацию этих параметров, выделим три свойства функции $R(\theta)$.

1. При $M_x \geq 0$ величина $R(\theta)$ из (A.1) определена при $-\theta^* \leq \theta \leq \theta^*$ и удовлетворяет свойству (3.16). Это означает, что если граница выходная, то граничное условие (3.21) корректно и гарантирует уменьшение амплитуды волн при отражении.

Для доказательства вначале убедимся в том, что знаменатель дроби в (A.1) не обращается в нуль на сегменте $[-\theta^*, \theta^*]$. Рассуждения будем проводить для случая $M_y \geq 0$. Учитывая, что $\cos \theta \geq -M_x$, оценим знаменатель снизу:

$$\begin{aligned} & (1+M_x)(1 + \cos \theta) + (1-M_x)M_y \sin \theta \geq \\ & \geq (1+M_x)(1-M_x) - (1-M_x)M_y = (1-M_x)(1+M_x-M_y). \end{aligned}$$

При $M_x \geq 0$ второй сомножитель, как и первый, положителен, а следовательно, положительно и исходное выражение. Ситуация $M_x < 0$ требует другого метода исследования и будет рассмотрена ниже.

Вещественная функция $R(\theta)$, когда ее знаменатель положителен на всём сегменте, является на нем непрерывной. Покажем, что $R \geq -1$. Для этого вычтем из числителя (A.1) знаменатель и получим выражение

$$-2(M_x + \cos \theta) \leq 0,$$

причем равенство достигается лишь на концах отрезка $\theta = \pm\theta^*$. Неравенство доказывает заявленное свойство.

Осталось проверить, при каких параметрах R может принимать значение $+1$. Уравнение $R = 1$ равносильно выражению

$$1 + M_x \cos \theta + (1 - M_x) M_y \sin \theta = 0. \quad (\text{A.2})$$

Левая часть (A.2) оценивается снизу величиной

$$1 - M_x^2 - (1 - M_x) M_y = (1 - M_x)(1 + M_x - M_y),$$

которая строго положительна при $M_x \geq 0$. Отсюда вытекает, что $R < 1$.

В итоге мы доказали, что для R из (A.1) выполняется свойство (3.16).

2. При $M_x < 0$ для того, чтобы существовал угол $\theta \in [-\theta^*, \theta^*]$, в окрестности которого $|R(\theta)| \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$M_y^2 \geq \frac{1 + M_x}{1 - M_x}. \quad (\text{A.3})$$

Значения M_x и M_y , удовлетворяющие (A.3), существуют тогда и только тогда, когда

$$M \geq M^* \approx 0.7625. \quad (\text{A.4})$$

Иными словами, при числе Маха $M < M^*$ знаменатель (A.1) никогда не обращается в нуль и необходимое условие корректности нарушаться не может.

Обращение в нуль знаменателя дроби из (A.1) эквивалентно уравнению

$$\text{tg}(\theta/2) \equiv \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = -\frac{1 + M_x}{(1 - M_x)M_y} < 0. \quad (\text{A.5})$$

Единственный корень уравнения, принадлежащий области определения, существует при

$$\text{tg}^2(\theta/2) \leq \text{tg}^2(\theta^*/2) = \frac{1 + M_x}{1 - M_x}.$$

Возводя в квадрат правую часть уравнения (A.5), получаем формулу (A.3).

Найдем, при каких значениях M_x условие (A.3) выполнимо. Сочетание (A.3) с ограничением на M приводит к двойному неравенству

$$\frac{1 + M_x}{1 - M_x} \leq M_y^2 < 1 - M_x^2.$$

Поскольку равенство может достигаться, выписанное выражение дает необходимое и достаточное неравенство для M_x . Последнее легко разрешимо:

$$-1 < M_x < 0,$$

т.е. никаких новых ограничений не возникает. Тем самым критерий (А.3) доказан.

Покажем теперь, что неравенство (А.3) достижимо только при достаточно больших значениях M . Выражение (А.3) равносильно следующему:

$$M^2 \geq M_x^2 + \frac{1 + M_x}{1 - M_x} \equiv \Phi(M_x).$$

Найдя

$$\min_{x \in [-1, 0]} \Phi(x) \approx 0.5814 = (M^*)^2$$

и учтя неуточняемость неравенства (А.3), заключаем, что оно выполнимо при условии (А.4).

3. Если

$$M < M_* \approx 0.7603, \quad (\text{А.6})$$

то заведомо выполняется свойство (3.16), т.е. при не слишком больших M амплитуда отраженных волн всегда уменьшается.

Как следует из предыдущего, для $M < M^*$ функция $R(\theta)$ в (А.1) непрерывна. Выше было показано, что в таком случае $R(\theta) \geq -1$. Выясним, при каких параметрах функция может принимать значение $+1$.

Приходим вновь к уравнению (А.2) и замечаем, что оно имеет решение только тогда, когда сумма квадратов коэффициентов при $\cos \theta$ и $\sin \theta$ не меньше единицы. В противном случае обеспечено то, что величина R не достигает значения $+1$.

Введем обозначения

$$M_x = M\xi, \quad M_y = M\sqrt{1-\xi^2}.$$

Сумма квадратов коэффициентов в левой части (А.2) есть

$$M_x^2 + (1-M_x)^2 M_y^2 = M^2 - 2M^3 \xi (1-\xi^2) + M^4 \xi^2 (1-\xi^2) \equiv F(\xi; M).$$

Далее по отдельности максимизируем коэффициенты при различных степенях M по всем $\xi \in [-1, 0]$. Получаем:

$$F(\xi; M) \leq M^2 + \frac{4\sqrt{3}}{9} M^3 + \frac{M^4}{4} = \Psi(M).$$

В свою очередь, неравенство $\Psi(M) < 1$ эквивалентно (А.6).

Итак, оценка (А.6) закругленная, однако уточнять максимально допустимое число Маха не имеет большого смысла ввиду близости значения M_* к M^* из (А.4).

Приложение Б. Общее свойство операторов с постоянными коэффициентами

Докажем утверждение из § 4 о действии бездисперсионных операторов на цилиндрическую гармонику в точке (x, y) . Ради удобства перейдем к безразмерным величинам.

Рассмотрим оператор порядка n из класса (3.6):

$$\mathcal{L}u = \mathcal{L}_{(n)}u = \sum_{k=0}^n \mathcal{L}_k \frac{\partial^{n-k} u}{\partial t^{n-k}}, \quad \mathcal{L}_k = \sum_{j=0}^k a_{jk} \frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}}. \quad (\text{Б.1})$$

Образ оператора $\mathcal{L}_{(n)}$ применительно к функциям

$$u(x, y, t) = \exp\{it - i\zeta x - isy\}$$

есть

$$\mathcal{L}'_{(n)}(\zeta, s) = \sum_{k=0}^n (i)^{n-k} \mathcal{L}'_k(\zeta, s), \quad \text{где } \mathcal{L}'_k(\zeta, s) = (-i)^k \sum_{j=0}^k a_{jk} \zeta^j s^{k-j}.$$

Здесь и далее нижним индексом без скобок обозначается однородный многочлен указанной степени, индексом в скобках — многочлен общего вида. Цилиндрическая волна представляется функцией

$$u(x, y, t) = e^{it} H_0(r), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{Б.2})$$

H_0 — функция Ханкеля индекса 0.

Формулу (4.16) перепишем в виде

$$\mathcal{L}_{(n)}u(x, y, t) = \mathcal{L}'_{(n)}(\zeta_1, s)u + O(r^{-1}u), \quad r \rightarrow \infty, \quad (\text{Б.3})$$

где u задается выражением (Б.2),

$$\zeta_1 = x/r, \quad s = y/r.$$

Методом математической индукции будем доказывать не непосредственно оценку (Б.3), а два равенства, справедливых при четном и нечетном n , из которых вытекает (Б.3). Оператор вида (Б.1) порядка $n+1$ представим в форме

$$\mathcal{L}_{(n+1)}u = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{(n)}u + \mathcal{L}_{n+1}u, \quad \mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{L}_n^{(2)} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (\text{Б.4})$$

Первый член (дифференцирование по t), очевидно, не влияет на оценку (Б.3) для функций (Б.2). Необходимо лишь проверить истинность утверждения для однородного пространственного оператора \mathcal{L}_{n+1} , состоящего из двух аналогичных слагаемых.

Ниже будет фигурировать функция Ханкеля индекса единица $H_1(r)$ и понадобятся следующие тождества:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}H_0(r) &= -H_1(r), & \frac{d}{dr}H_1(r) &= H_0(r) - \frac{1}{r}H_1(r), & (Б.5) \\ \partial r/\partial x &= x/r, & \partial r/\partial y &= y/r. \end{aligned}$$

Учтем также соотношение между функциями Ханкеля 2-го рода

$$H_1(r) = iH_0(r) + O(r^{-1}H_0(r)). \quad (Б.6)$$

Кроме того, заметим, что $\mathcal{L}'_k(\zeta_1, s) = r^{-k}\mathcal{L}'_k(x, y)$.

Вначале убедимся в том, что формула (Б.3) верна для операторов первого порядка. На примере $\mathcal{L} = \partial/\partial x$, используя тождества (Б.5) и асимптотику (Б.6), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}H_0(r) &= -\frac{x}{r}H_1(r) = -\frac{ix}{r}H_0(r) + O(xr^{-2}H_0(r)) = \\ &= -i\zeta_1H_0(r) + O(r^{-1}H_0(r)). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{L}'(\zeta, s) = -i\zeta$, из выписанного следует (Б.3).

Теорема. Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_nH_0(r) &= r^{-n}\mathcal{L}'_n(x, y)H_0(r) + r^{-2n+2}P_{(2n-4)}(x, y)H_0(r) + \\ &+ r^{-2n+1}Q_{(2n-2)}(x, y)H_1(r), \quad n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (Б.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_nH_0(r) &= -ir^{-n}\mathcal{L}'_n(x, y)H_1(r) + r^{-2n+2}P_{(2n-3)}(x, y)H_0(r) + \\ &+ r^{-2n+1}Q_{(2n-3)}(x, y)H_1(r), \quad n = 2m + 1, \quad m = 1, 2, \dots \quad (Б.8) \end{aligned}$$

Доказательство. Пользуясь формулами (Б.5), легко убедиться в том, что при $n = 2$ выражение (Б.7) верно. Далее схема доказательства следующая. Исходя из истинности (Б.7) при $n = 2m$ получим равенство (Б.8) для

$$\begin{aligned} n+1 = 2m+1: \quad \mathcal{L}_{n+1}H_0(r) &= -ir^{-n-1}\mathcal{L}'_{n+1}(x, y)H_1(r) + \\ &+ r^{-2n}P_{(2n-1)}(x, y)H_0(r) + r^{-2n-1}Q_{(2n-1)}(x, y)H_1(r), \quad (Б.9) \end{aligned}$$

а затем — (Б.7) для

$$\begin{aligned} n+2 = 2m+2: \quad \mathcal{L}_{n+2}H_0(r) &= r^{-n-2}\mathcal{L}'_{n+2}(x, y)H_0(r) + \\ &+ r^{-2n-2}P_{(2n)}(x, y)H_0(r) + r^{-2n-3}Q_{(2n+2)}(x, y)H_1(r). \quad (Б.10) \end{aligned}$$

Опираясь на (Б.4), рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}_{n+1}u = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_n u. \quad (\text{Б.11})$$

Дифференцирование выражения (Б.7) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_n H_0(r) &= r^{-n}\mathcal{L}'_n(x, y) \frac{dH_0}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + r^{-2n+2}P_{(2n-4)}(x, y) \frac{dH_0}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \\ &+ r^{-2n+1}Q_{(2n-2)}(x, y) \frac{dH_1}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + r^{-n} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}'_n(x, y) H_0(r) + \\ &+ r^{-2n+2} \frac{\partial}{\partial x}P_{(2n-4)}(x, y) H_0(r) + r^{-2n+1} \frac{\partial}{\partial x}Q_{(2n-2)}(x, y) H_1(r) - \\ &- nr^{-n-1} \frac{\partial r}{\partial x}\mathcal{L}'_n(x, y) H_0(r) - (2n-2)r^{-2n+1} \frac{\partial r}{\partial x}P_{(2n-4)}(x, y) H_0(r) - \\ &- (2n-1)r^{-2n} \frac{\partial r}{\partial x}Q_{(2n-2)}(x, y) H_1(r). \end{aligned}$$

Подставляя сюда первые три формулы (Б.5) и вводя новые обозначения для производных по x от многочленов, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_n H_0(r) &= -r^{-n-1}x\mathcal{L}'_n(x, y) H_1(r) - r^{-2n+1}xP_{(2n-4)}(x, y) H_1(r) + \\ &+ r^{-2n}xQ_{(2n-2)}(x, y) H_0(r) - r^{-2n-1}xQ_{(2n-2)}(x, y) H_1(r) + \\ &+ r^{-n}\mathcal{M}'_{n-1}(x, y) H_0(r) + r^{-2n+2}A_{(2n-5)}(x, y) H_0(r) + \\ &+ r^{-2n+1}B_{(2n-3)}(x, y) H_1(r) - nr^{-n-2}x\mathcal{L}'_n(x, y) H_0(r) - \\ &- (2n-2)r^{-2n}xP_{(2n-4)}(x, y) H_0(r) - \\ &- (2n-1)r^{-2n-1}xQ_{(2n-2)}(x, y) H_1(r). \quad (\text{Б.12}) \end{aligned}$$

При $n = 2$ член, в котором должно стоять $A_{(2n-5)}$, отсутствует.

Обсудим первый член правой части (Б.12). Образ оператора (Б.11) есть

$$\mathcal{L}'_{n+1}(\zeta, s) = -i\zeta\mathcal{L}'_n(\zeta, s).$$

Поэтому

$$-r^{-n-1}x\mathcal{L}'_n(x, y) H_1(r) = -ir^{-n-1}\mathcal{L}'_{n+1}(x, y) H_1(r). \quad (\text{Б.13})$$

Преобразуем члены, содержащие $H_0(r)$.

$$r^{-n}\mathcal{M}'_{n-1}(x, y) = r^{-2n}(x^2+y^2)^{n/2}\mathcal{M}'_{n-1}(x, y).$$

Число $n/2 = m$ целое, следовательно, функция, на которую умножается r^{-2n} , является многочленом $\mathcal{N}'_{2n-1}(x, y)$. Аналогично поступим с

другими членами. Итого:

$$r^{-2n} \left[x Q_{(2n-2)}(x, y) + (x^2 + y^2)^{n/2} M'_{n-1}(x, y) + (x^2 + y^2) A_{(2n-5)}(x, y) - \right. \\ \left. - n (x^2 + y^2)^{\frac{n-2}{2}} x \mathcal{L}'_n(x, y) - (2n-2) x P_{(2n-4)}(x, y) \right] H_0(r) = \\ = r^{-2n} P_{(2n-1)}(x, y) H_0(r). \quad (\text{Б.14})$$

Наконец, члены (Б.12), содержащие $H_1(r)$, приводятся к виду

$$r^{-2n-1} \left[(x^2 + y^2) x P_{(2n-4)}(x, y) - 2nx Q_{(2n-2)}(x, y) H_1(r) + \right. \\ \left. + (x^2 + y^2) B_{(2n-3)}(x, y) \right] H_1(r) = r^{-2n-1} Q_{(2n-1)}(x, y) H_1(r). \quad (\text{Б.15})$$

Правые части (Б.13), (Б.14) и (Б.15) в сумме дают искомое выражение (Б.9).

Действие оператора

$$\mathcal{L}_{n+1}u = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_n u$$

приводится к требуемому виду тем же способом, что и (Б.11), с привлечением четвертой формулы (Б.5). Тем самым представление (Б.9) справедливо для любого пространственного оператора 1-го порядка, примененного к оператору \mathcal{L}_n . Утверждение для $n+1 = 2m+1$ доказано.

Вывод выражения (Б.10) из (Б.9) проводится на основе тех же методов, которые использовались на предыдущем этапе. Теорема доказана.

Из равенства (Б.7) сразу следует справедливость оценки (Б.3) при четных n . Формула (Б.8) для нечетных n также приводит к (Б.3), с учетом соотношения (Б.6).

Литература

1. *Л.В. Дородницын*. Акустические свойства непрерывных и дискретных газодинамических моделей // Прикладная математика и информатика, N 6 – М.: МАКС Пресс, 2000, с.39–62.
2. *Л.В. Дородницын*. Неотражающие граничные условия для систем уравнений газовой динамики // ЖВМ и МФ, 2002, т.42, N 4, с.522–549.
3. *Л.В. Дородницын*. Искусственные граничные условия при численном моделировании дозвуковых течений газа // ЖВМ и МФ, 2005, т.45, N 7, с.1251–1278.
4. *В.С. Владимиров*. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1985.

5. *А. Т. Федорченко*. Отражение плоской звуковой волны от проницаемой поверхности при наличии нормального потока газа // *Акуст. ж.*, 1989, т.35, N 5, с.951–953.
6. *M.B. Giles*. Nonreflecting boundary conditions for Euler equation calculations // *AIAA J.*, 1990, v.28, N 12, pp.2050–2058.
7. *F.Q. Hu*. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer // *J. Comp. Phys.*, 1996, v.129, N 1, pp.201–219.
8. *Л.В. Дородницын*. Неотражающие граничные условия: от концепции до алгоритмов: Препринт. – М.: МАКС Пресс, 2002, 60 с.
9. *Д.И. Блохинцев*. Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981.
10. *B. Engquist, A. Majda*. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Math. Comp.*, 1977, v.31, N 139, pp.629–651.
11. *L.N. Trefethen, L. Halpern*. Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions // *Math. Comp.*, 1986, v.47, N 176, pp.421–435.
12. *М.А. Ильгамов*. О неотражающих условиях на границах расчетной области // *Динамика оболочек в потоке. Труды семинара, вып. XVIII* – Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1985, с.4–76.
13. *P. Luchini, R. Tognaccini*. Direction-adaptive nonreflecting boundary conditions // *J. Comp. Phys.*, 1996, v.128, N 1, pp.121–133.
14. *R.L. Higdon*. Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems // *SIAM Rev.*, 1986, v.28, N 2, pp.177–217.
15. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский*. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
16. *A. Bayliss, E. Turkel*. Radiation boundary conditions for wave-like equations // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1980, v.33, N 6, pp.707–725.
17. *T. Hagstrom, S.I. Hariharan, D. Thompson*. High-order radiation boundary conditions for the convective wave equation in exterior domains // *SIAM J. Sci. Comp.*, 2004, v.25, N 3, pp.1088–1101.