

Численное моделирование солитонных решений задачи распространения фемтосекундного импульса в среде с кубической нелинейностью

Проблема построения солитонных решений для задач распространения фемтосекундных световых импульсов актуальна в связи с задачами передачи информации по оптическим волокнам. В этом случае, как известно, солитон распространяется без искажений. В данной работе нахождение солитонного решения сформулировано в виде задачи на собственное значение с нелинейным вхождением собственной функции в оператор. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$i\lambda A + i \frac{d^2 A}{dt^2} + i\alpha |A|^2 A + \gamma \alpha \frac{d}{dt} (|A|^2 A) = 0, \quad 0 < t < L, \quad (1)$$

с краевыми условиями $A(0) = A(L) = 0$,

где α и γ – действительные параметры, λ – собственное значение, t – время, L – размер рассматриваемой области.

Для заданных значений параметров α и γ необходимо найти действительное собственное значение λ и отвечающий ему собственный вектор. В этом случае собственный вектор представляет собой солитон, не изменяющийся вдоль координаты распространения светового импульса.

Умножив уравнение (1) на $(-i)$, получаем задачу на собственные значения с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A}{dt^2} + \alpha |A|^2 A - i\gamma \alpha \frac{d}{dt} (|A|^2 A) = -\lambda A, & 0 < t < L, \\ A(0) = A(L) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

с условием нормировки $\|A(t)\|_{L_2}^2 = \int_0^L |A(t)|^2 dt = 1$.

Умножив правую и левую части уравнения (2) на комплексно-сопряженную к A функцию A^* и проинтегрировав уравнение на отрезке $[0, L]$, легко показать, что при выполнении условия

$$\int_0^L (|A|^2 A)' A^* dt = \int_0^L |A|^2 A (A^*)' dt = 0, \quad (3)$$

где $(A^*)'$ – производная по t сопряженной к A функции, собственное значение будет действительным и, следовательно, собственный вектор будет представлять решение типа солитона.

Для численного решения задачи (2) введем равномерную сетку с шагом h : $\omega = \{t_j = jh, j=0..N, h=L/N\}$. Определим на ней разностную функцию $u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}, u_N)^T$.

Рассмотрим дифференциальную задачу второго порядка, содержащую нелинейность по первой производной. На сетке ω построим для нее разностную задачу со вторым порядком аппроксимации:

$$B(u) = \lambda u. \quad (4)$$

Согласно [4] первая треть спектра соответствующей разностной задачи с заданной точностью совпадает с первой третью спектра дифференциальной задачи.

Для нахождения собственных значений задачи (4) предположим, что действительные части собственных значений оператора расположены в порядке возрастания действительной части: $\text{Re } \lambda_1 \leq \text{Re } \lambda_2 \leq \dots \leq \text{Re } \lambda_{N-1}$.

Применительно к задаче (4) организуем итерационный процесс, основанный на методе простой итерации:

$$u^{n+1} = u^n + \tau B(u^n). \quad (5)$$

Здесь τ – итерационный параметр, n – номер итерации. Тогда для нелинейной разностной задачи на собственное значение (4) справедлива теорема 1 (см. [1] и [2]).

Теорема 1. Пусть λ_1 – собственное значение оператора B , имеющее минимальную действительную часть. Тогда существуют такие значения

итерационного параметра τ , удовлетворяющие условиям: $\tau < 0$, $|\tau| < \frac{2(\text{Re } \lambda_k - \text{Re } \lambda_1)}{(|\lambda_k|^2 - |\lambda_1|^2)}$

для всех k : $|\lambda_k|^2 - |\lambda_1|^2 > 0$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((u^{n+1} - u^n), u^n)}{\tau(u^n, u^n)} = \lambda_1.$$

Далее для решения уравнения (2) построим следующую разностную схему со вторым порядком аппроксимации:

$$\begin{cases} u_{\bar{x},j} + \alpha |u_j|^2 u_j - i \gamma \alpha \frac{|u_{j+1}|^2 u_{j+1} - |u_{j-1}|^2 u_{j-1}}{2h} = -\lambda u_j, & j=1, \dots, (N-1), \\ u_0 = u_N = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Оператор $B(u)$ для задачи (6) определяется следующим образом:

$$B_i(u^n) = u_{\bar{x},j}^n + \alpha |u_j^n|^2 u_j^n - i \gamma \alpha \frac{|u_{j+1}^n|^2 u_{j+1}^n - |u_{j-1}^n|^2 u_{j-1}^n}{2h}. \quad (7)$$

На основе теоремы 1 можно доказать теорему 2 для исследуемой задачи на собственные значения с нелинейным вхождением собственной функции в оператор (6) (см. [2]):

Теорема 2. Решение системы:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \tau B(u^n), \\ \lambda^{n+1} = \frac{((u^{n+1} - u^n), u^n)}{\tau(u^n, u^n)}, \\ \|u^{n+1}\|_{L_2}^2 = \sum_{j=0}^N |u_j^{n+1}|^2 h = 1, \end{cases} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где τ удовлетворяет условию Теоремы 1, а компоненты $B(u^n)$ вычисляются по формуле (7), сходится к решению разностной задачи на собственные значения:

$$\begin{cases} u_{\bar{x},j} + \alpha |u_j|^2 u_j - i \gamma \alpha (|u|^2 u)_{x,j} = -\lambda u_j, & j=1 \dots (N-1) \\ u_0 = u_N = 0, \\ \|u\|_{L_2}^{(h)} = \sum_{k=0}^N |u_k|^2 h = 1, \end{cases}$$

аппроксимирующей со вторым порядком дифференциальную задачу (2).

Расчеты проводились с точностью 0,1 ($\max_{j=1, \dots, N-1} |u_j^{n+1} - u_j^n| \leq 0,1$). С уменьшением

точности до 0,01 скорость сходимости итерационного процесса резко уменьшается, а полученные результаты отличаются во втором знаке после запятой. Полученная невязка во всех рассмотренных случаях порядка 10^{-4}

$$(|\psi| = |B(u) - \lambda u|).$$

Заметим, что сходимость итерационного процесса немонотонная.

Численные расчеты исследуемой задачи показали, что при различных параметрах γ и α действительная часть собственного значения всегда достаточно велика и положительна, а мнимая часть имеет порядок $10^{-3} - 10^{-4}$. Так как расчеты проводились с точностью 0,1, мнимой частью можно пренебречь и рассматривать полученное собственное значение как действительное.

При различных параметрах γ и α график модуля собственной функции с минимальной действительной частью имеет различную форму. Условно плоскость параметров (α, γ) можно разбить на 3 подобласти (рис. 1).

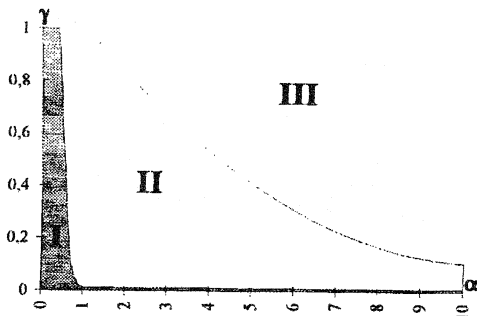


Рис. 1. Области подобия формы импульса модуля и фазы собственного вектора, имеющего минимальную действительную часть.

В области I для параметров γ и α форма импульса модуля и фазы собственного вектора, имеющего минимальную действительную часть, подобна и показана на примере параметров $\gamma = 0,1$, $\alpha = 0,1$ (рис. 2).

Для иллюстрации зависимости результатов алгоритма от длины выбранного отрезка на рис. 2 а) изображены графики собственного вектора при различных L : $L = 50, 100, 200$. Полученные результаты подтверждаются физическими экспериментами. Незначительное увеличение ширины центральной части обусловлено погрешностями задачи, аппроксимации и метода.

На рис. 2 б) показаны фазы собственного вектора при различных L : $L = 50, 100,$

200, которые вычислялись по следующей формуле:

$$\varphi_j = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im} u_j}{\text{Re} u_j} \right). \quad (8)$$

Фазы собственных функций антисимметричны, что соответствует физическим экспериментам.

На рис. 2 в) показана зависимость производной собственного вектора от модуля собственного вектора при параметрах $\gamma = 0,1$, $\alpha = 0,1$, $L = 200$. Полученные расчеты и графики подтверждают теоретические исследования (3) с допустимой погрешностью,

т.е. $\sum_{k=0}^N |u_k|^2 u_k (u^*)_{x,k} \approx 10^{-5}$.

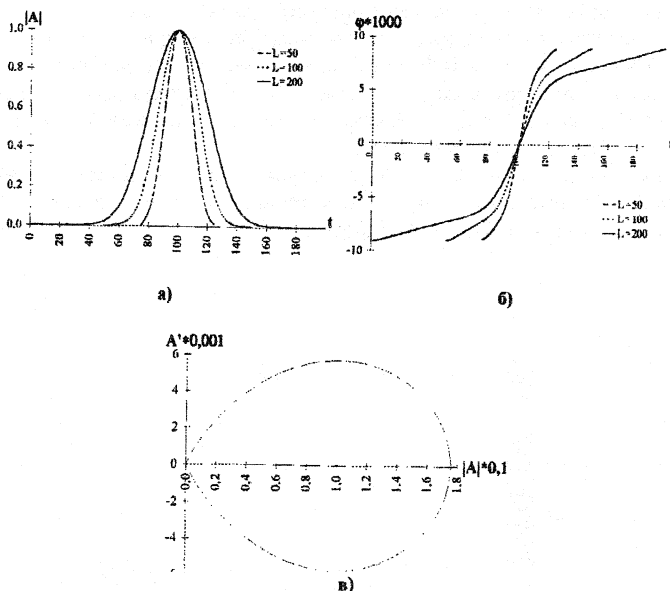


Рис. 2. Модуль собственного вектора (а), фаза (б) и зависимость производной собственного вектора от модуля собственного вектора (в) при значениях параметров $\gamma = 0,1$, $\alpha = 0,1$, $L = 50, 100, 200$, $\lambda = 4,045 + i 1,34 \cdot 10^{-5}$.

Собственное значение задачи, соответствующее рис.2, равно $\lambda = 4,045 + i 1,34 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, полученное собственное значение можно рассматривать как действительное и положительное.

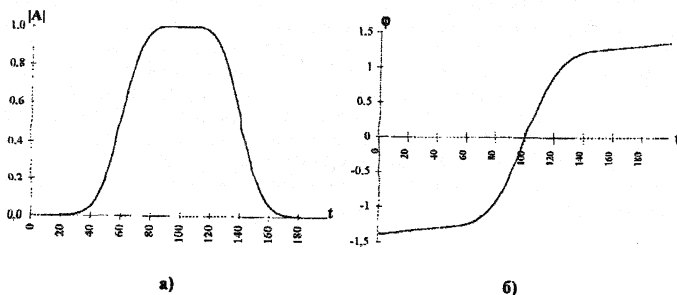


Рис. 3. Модуль собственного вектора (а) и фаза (б) при значениях параметров $\gamma = 1$, $\alpha = 0,9$, $L = 200$, $\lambda = 4,035 + i 7,9 \cdot 10^{-4}$.

В области II для параметров γ и α форма графика модуля и фазы собственного вектора, имеющего минимальную действительную часть, показана на примере параметров $\gamma = 1$, $\alpha = 0,9$, $L = 200$ (рис. 3). Характерной чертой эволюции формы импульса является наличие однородного участка вблизи его центра. Фаза собственного вектора асимметрична и определяется по формуле 8.

Представленному варианту соответствует собственное значение задачи $\lambda = 4,035 + i 7,9 \cdot 10^{-4}$.

Для параметров γ и α из области III характерное распределение модуля и фазы собственного вектора, имеющего минимальную действительную часть, имеет две и больше вершин. Полученные результаты при параметрах $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $L = 200$ иллюстрирует рис. 4. Фаза собственного вектора определялась по формуле (8).

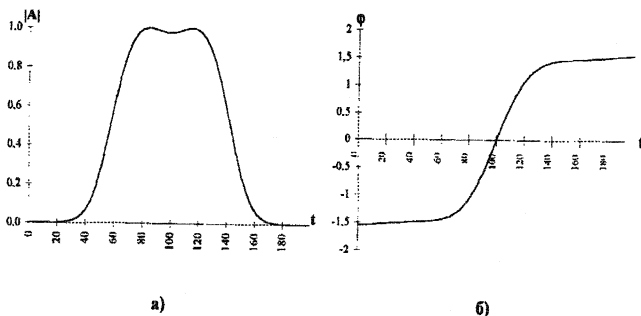


Рис. 4. Модуль собственного вектора (а) и фаза (б) при значениях параметров $\gamma = 1$, $\alpha = 1$, $L = 200$, $\lambda = 4,034 + i 1,3 \cdot 10^{-3}$.

Собственное значение задачи, соответствующее рис.4, равно $\lambda = 4,034 + i 1,3 \cdot 10^{-3}$. Таким образом, полученное собственное значение можно рассматривать как действительное и положительное.

Работа выполнена при поддержке программой «Университеты России – фундаментальные исследования».

Литература

1. Захарчук В.Т., Савенкова Н.П. Неявные схемы в алгоритме определения границ комплексного спектра. Вестн. Моск. Ун-та, сер.15, Вычисл. матем. и киберн., 1994, №2, стр. 66–69.
2. Dorokhova T.V., Savenkova N.P.. Algorithm of Calculating Lower Boundary of Spectrum for Eigenvalue Problem with Non-linear Dependence on the Eigenfunction. Proceedings of Second International Conference «Finite-difference methods: theory and application», Minsk, Belarus, 1998, pp. 105–108.
3. Дорохова Т.В., Савенкова Н.П., Трофимов В.А. Численно моделирование солитоновых решений задачи распространения фемтосекундного импульса в среде с кубической нелинейностью. Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», 1999.
4. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. Наука, 1978.