О.В. Дрожжина, А.Ю. Щеглов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ[1]

1. Введение

Задачи для уравнений в частных производных гиперболического типа привлекают к себе внимание и в связи с исследованием различных колебательных процессов, и при моделировании теплопередачи с конечной скоростью [1], [2], а также в качестве приближения традиционного для теплопроводности уравнения параболического типа [3] - [5]. Последнее фактически означает большую привлекательность, в силу лучших свойств, гиперболических уравнений по сравнению с параболическими. Однако, в сравнении с аналогичными постановками для параболических уравнений обратные задачи для гиперболических уравнений не столь разнообразны. Тем не менее, уже имеется значительное число результатов по обратным гиперболическим задачам [6] - [15]. Разрешимость прямых постановок в гиперболическом случае в достаточной степени изучена для линейных уравнений [16] - [18], но нелинейные задачи исследованы лишь фрагментально [19] - [25], что определяется по-видимому значительно меньшим числом приложений. Нижеследующие результаты предваряют изучение обратной постановки для формулируемой задачи Коши.

Пусть функция $u(x,t)$ двух аргументов удовлетворяет уравнению и начальным условиям:

$$\begin{gathered} u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f(u), \quad -a(T-t)\le x\le a(T-t),\ 0\le t\le T, \\ u(x,0)=\varphi(x), \ \ u_t(x,0)=\psi(x), \quad -aT\le x\le aT, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\varphi(x)\in C^2[-aT,aT]$, $\psi(x)\in C^1[-aT,aT]$ и

$$\begin{gathered} f(\xi)\in C[\varphi(0)-X,\varphi(0)+X],\ 0\le f(\xi)\le R,\ \xi\in[\varphi(0)-X,\varphi(0)+X], \\ |f(\xi_1)-f(\xi_2)|\le L_f\,|\xi_1-\xi_2|, \quad \forall\,\xi_1,\,\xi_2\in[\varphi(0)-X,\varphi(0)+X], \end{gathered} \tag{1.2}$$

при заданных постоянной c, положительных постоянных a, R, неотрицательной постоянной L_f для любого числа $X>0$.

Пусть $\Delta_{x,t}=\{(\xi,\tau): 0\le\tau\le t,\, x-(t-\tau)a\le\xi\le x+(t-\tau)a\}$, $\Delta_T=\Delta_{0,T}$ – характеристические области.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00344).

Далее будет установлена однозначная разрешимость сформулированной задачи Коши для уравнения гиперболического типа с нелинейным источником в пространстве $C^2(\Delta_T)$ при задании специального вида ограничений на начальные функции, что позволит свести задачу к системе интегральных уравнений, и затем представлена схема численного решения.

2. Разрешимость прямой задачи

Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, определяющие начальные условия в задаче Коши (1.1), таковы, что

$$\begin{gathered}\varphi(x)\in C^2[-aT,aT],\ 0\le\varphi_0\le\varphi(x)\le\varphi_1,\ x\in[-aT,aT],\\ 0\le\varphi'(x)\le\varphi_2,\ x\in[-aT,0],\quad -\varphi_2\le\varphi'(x)\le 0,\ x\in[0,aT],\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$\psi(x)\in C^1[-aT,aT],\ 0<\psi_0\le\psi(x)\le\psi_1,\ x\in[-aT,aT],\tag{2.2}$$

при заданных постоянной c, положительных постоянных a, R, ψ_0, ψ_1, неотрицательных постоянных φ_0, φ_1, φ_2, L_f, и помимо (2.1), (2.2) выполнены ограничения:

$$\psi(x)+(c/2)\varphi(x)-a|\varphi'(x)|\ge\psi_0>0\quad\text{при}\quad c<0,\tag{2.3.1}$$

$$\begin{gathered}\psi(x)-a|\varphi'(x)|-(cT/4)(2\psi_1+c\varphi_1+Rt\exp\{cT/2\})\times\\ \times\exp\left\{c^2T^2/8\right\}\ge\psi_0>0\quad\text{при}\quad c\ge 0,\quad x\in[-aT,aT].\end{gathered}\tag{2.3.2}$$

Теорема 1. При выполнении условий (1.2), (2.1)-(2.3) задача (1.1) имеет единственное решение $u(x,t)\in C^2(\Delta_T)$.

Доказательство. Заменой $u(x,t) = v(x,t)\exp\{-ct/2\}$, $(x,t)\in\Delta_T$, задача (1.1) сводится к эквивалентной постановке для функции $v(x,t)$:

$$\begin{gathered}v_{tt}=a^2v_{xx}+(c^2/4)v+f(v\exp\{-ct/2\})\exp\{ct/2\},\quad (x,t)\in\Delta_T,\\ v(x,0)=\varphi(x),\ v_t(x,0)=\psi(x)+c\varphi(x)/2,\quad -aT\le x\le aT.\end{gathered}\tag{2.4}$$

Покажем, что решение задачи (2.4) при условиях (1.2), (2.1)-(2.3) эквивалентно решению уравнения

$$\begin{gathered}v(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\,d\xi\ +\\ +\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}[\widetilde{f}(\xi,\tau,v)+\widetilde{r}(\xi,\tau,v)]\,d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_T,\end{gathered}\tag{2.5}$$

где $\widetilde{\psi}(\xi)=\psi(\xi)+c\varphi(\xi)/2,\ \ \xi\in[-aT,\,aT],\quad \widetilde{r}(\xi,\tau,v)=(c^2/4)v(\xi,\tau)$, $\widetilde{f}(\xi,\tau,v)=f(v(\xi,\tau)\exp\{-c\tau/2\})\exp\{c\tau/2\},\ \ (\xi,\tau)\in\Delta_T$.

Исследуем предварительно разрешимость уравнения (2.5) и выпишем представления для производных его решения.

Докажем, что при выполнении ограничений (1.2), (2.1)-(2.3) решение уравнения (2.5) существует и единственно. Для этого рассмотрим его в операторном виде $v=Av$, где $v\in C(\Delta_T)$, и оператор A:

$$Av=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\,d\xi\ +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}[\widetilde{f}(\xi,\tau,v)+\widetilde{r}(\xi,\tau,v)]\,d\xi d\tau,$$

действует из пространства $C(\Delta_{x,t})$ в пространство $C(\Delta_{x,t})$ при любых $(x,t)\in\Delta_T$. Докажем, что найдется такое число $\theta\in(0,T]$, для которого отображение A из $C(\Delta_{x,\theta})$ в $C(\Delta_{x,\theta})$ при $(x,\theta)\in\Delta_T$ является сжимающим, то есть

$$\|Av_1-Av_2\|_{C(\Delta_{x,\theta})}\le q\ \|v_1-v_2\|_{C(\Delta_{x,\theta})}\tag{2.6}$$

при любых $v_1,v_2\in C(\Delta_{x,\theta})$, $(x,\theta)\in\Delta_T$, и фиксированном значении $q\in(0,1)$. Оценивая норму разности Av_1-Av_2 с учетом ограничений (1.2), (2.1), (2.2), для любых $(x,\theta)\in\Delta_T$ получим

$$\|Av_1-Av_2\|_{C(\Delta_{x,\theta})}\le\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\theta}\int\limits_{x-a(\theta-\tau)}^{x+a(\theta-\tau)}\Big[\big|\widetilde{r}(\xi,\tau,v_1)-\widetilde{r}(\xi,\tau,v_2)\big|+$$

$$+\big|\widetilde{f}(\xi,\tau,v_1)-\widetilde{f}(\xi,\tau,v_2)\big|\Big]\,d\xi d\tau\le\theta^2(L_f+c^2/4)\ \|v_1-v_2\|_{C(\Delta_{x,\theta})}.$$

При фиксированном значении $q\in(0,1)$ найдется положительное число $\theta=\min\Big\{T,\sqrt{q}/\sqrt{L_f+c^2/4}\Big\}$ такое, что выполнено неравенство (2.6). В соответствии с принципом сжимающих отображений это влечет существование единственного решения уравнения (2.5) при $t\le\theta$.

В силу неизменности величин L_f и c для всех $t\in[0,T]$ существование и единственность решения уравнения (2.6) на всем отрезке $[0,T]$ для любых $(x,t)\in\Delta_T$ доказывается продолжением процесса с шагом θ на большие t. Таким образом, уравнение (2.5) имеет единственное решение $v(x,t)\in C(\Delta_T)$, для которого в соответствии с леммой Гронуолла-Беллмана справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
0 \le \varphi_0 \le v(x,t) \le [\varphi_1 + t(\psi_1 + |c|\varphi_1/2) + R\exp(|c|t/2)t^2/2] \times \\
\times \exp(c^2t^2/8) \le B_0 + RB_{00} \le v^0, \quad (x,t)\in\Delta_T,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где B_0, B_{00}, v^0 - положительные постоянные, причем величины B_0, B_{00} не зависят от R, L_f, а значение v^0 не зависит от L_f, и все они могут быть выбраны так, что аналогичная (2.7) оценка $0 \le \varphi_0 \le u(x,t) \le v^0$ имеет место и для функции $u(x,t)$, $(x,t)\in\Delta_T$.

Получим представления для производных решения уравнения (2.5) и оценки для них. В силу дифференцируемости правой части уравнения (2.5) из него следует, что

$$
\begin{aligned}
v_t(x,t) = \frac{a[\varphi'(x+at) - \varphi'(x-at)]}{2} + \frac{\widetilde{\psi}(x+at) + \widetilde{\psi}(x-at)}{2} + \\
+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[\widetilde{f}(x+(t-\tau)a,\tau,v) + \widetilde{f}(x-(t-\tau)a,\tau,v)\right] d\tau + \\
+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[\widetilde{r}(x+(t-\tau)a,\tau,v) + \widetilde{r}(x-(t-\tau)a,\tau,v)\right] d\tau,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
v_x(x,t) = \frac{\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)}{2} + \frac{\widetilde{\psi}(x+at) - \widetilde{\psi}(x-at)}{2a} + \\
+ \frac{1}{2a}\int_0^t \left[\widetilde{f}(x+(t-\tau)a,\tau,v) - \widetilde{f}(x-(t-\tau)a,\tau,v)\right] d\tau + \\
+ \frac{1}{2a}\int_0^t \left[\widetilde{r}(x+(t-\tau)a,\tau,v) - \widetilde{r}(x-(t-\tau)a,\tau,v)\right] d\tau.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Из непрерывности правых частей (2.8), (2.9) следует непрерывность производных $v_t(x,t)$, $v_x(x,t)$ при $(x,t)\in\Delta_T$. Кроме того, из ограничений и уравнений (2.2), (2.3), (2.5), (2.8), (2.9) следуют оценки

$$
\begin{aligned}
0 \le \psi_0 \le v_t(x,t) \le B_1(t) + R\Big[t\exp(|c|t/2) + \\
+ \frac{c^2t^3}{24}\exp\left(\frac{c^2t^2+|c|t}{2}\right)\Big] \le B_1^t + RB_{11}^t \le v^*, \quad (x,t)\in\Delta_T,
\end{aligned}
$$

$$|v_x(x,t)| \le B_1^x + RB_{11}^x \le v^*, \qquad (x,t)\in\Delta_T,$$

где $B_1(t)$ – положительная непрерывная функция, B_1^t, B_{11}^t, B_1^x, B_{11}^x, v^* – положительные постоянные, причем B_1^t, B_{11}^t, B_1^x, B_{11}^x не зависят от R и L_f, а константа v^* не зависит от L_f. Мажорирующие постоянные могут быть выбраны так, что, аналогично предыдущему, имеют место оценки: $\psi_0 \le u_t(x,t) \le v^*$, $|u_x(x,t)| \le v^*$, $(x,t)\in\Delta_T$.

Таким образом, уравнение (2.5) имеет решение $v \in C^1(\Delta_T)$.

Докажем существование непрерывных частных производных второго порядка функции $v(x,t)$. На основе представлений (2.8), (2.9) может быть записано выражение для разности

$$\begin{aligned}
&v_1(x,t,\Delta t) = v_t(x,t{+}\Delta t) - v_t(x,t) = \\
&= \frac{a}{2}\Big[\varphi'(x{+}at{+}a\Delta t) - \varphi'(x{-}at{-}a\Delta t) - \varphi'(x{+}at) + \varphi'(x{-}at)\Big] + \\
&+ \frac{1}{2}\Big[\widetilde{\psi}(x{+}at{+}a\Delta t) + \widetilde{\psi}(x{-}at{-}a\Delta t) - \widetilde{\psi}(x{+}at) - \widetilde{\psi}(x{-}at)\Big] + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\Big[\widetilde{f}(x{+}(t{+}\Delta t{-}\tau)a,\tau,v) + \widetilde{f}(x{-}(t{+}\Delta t{-}\tau)a,\tau,v)\Big]\,d\tau - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\Big[\widetilde{f}(x{+}(t{-}\tau)a,\tau,v) + \widetilde{f}(x{-}(t{-}\tau)a,\tau,v)\Big]\,d\tau + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\Big[\widetilde{r}(x{+}(t{+}\Delta t{-}\tau)a,\tau,v) + \widetilde{r}(x{-}(t{+}\Delta t{-}\tau)a,\tau,v)\Big]\,d\tau - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\Big[\widetilde{r}(x{+}(t{-}\tau)a,\tau,v){+}\widetilde{r}(x{-}(t{-}\tau)a,\tau,v)\Big]\,d\tau, \quad (x,t),\ (x,t{+}\Delta t)\in\Delta_T.
\end{aligned}$$

и аналогично для приращения аргумента x и другой производной. В интегралах правых частей полученных равенств, как и в формулах (2.8), (2.9), выполним замену подынтегральных переменных

$$s_1 = v(x{+}(t{-}\tau)a,\tau)\exp(-\,c\tau/2), \quad s_2 = v(x{-}(t{-}\tau)a,\tau)\exp(-\,c\tau/2)$$

для любых фиксированных значений $(x,t)\in\Delta_T$ так, что

$$I(x,t) = \int\limits_0^t \widetilde{f}(x + (t{-}\tau)a,\tau,v)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\varphi(x+at)}^{v(x,t)\exp(-ct/2)} \left.\frac{f(s_1)\exp\{c\theta/2\}}{k^+(\xi,\theta)}\right|_{\xi=x+(t-\chi(x,t,s_1))a,\ \theta=\chi(x,t,s_1)} ds_1,$$

$$J(x,t) = \int\limits_0^t \widetilde{f}(x-(t-\tau)a,\tau,v)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\varphi(x-at)}^{v(x,t)\exp(-ct/2)} \left.\frac{f(s_2)\exp\{c\theta/2\}}{k^-(\xi,\theta)}\right|_{\xi=x-(t-\nu(x,t,s_2))a,\ \theta=\nu(x,t,s_2)} ds_2,$$

где $k^{\pm}(\xi,\theta)=[v_t(\xi,\theta)\mp av_x(\xi,\theta)-cv(\xi,\theta)/2]\exp(-c\theta/2)$, $(\xi,\theta)\in\Delta_T$, или, в другом виде, $k^{\pm}(\xi,\theta)=u_t(\xi,\theta)\mp au_x(\xi,\theta)$, $(\xi,\theta)\in\Delta_T$.

При фиксированных значениях $(x,t)\in\Delta_T$ функция $\chi(x,t,s_1)$ является обратной к $s_1=v(x+(t-\tau)a,\tau)\exp(-c\tau/2)$, $\tau\in[0,t]$, то есть при фиксации $(x,t)\in\Delta_T$ для $s_1\in[\varphi(x+at),v(x,t)\exp(-ct/2)]$ имеет место равенство $v(x+(t-\chi(x,t,s_1))a,\chi(x,t,s_1))\exp(-c\chi(x,t,s_1)/2)=s_1$, или, с учетом начальной замены функции, это ведет при $(x,t)\in\Delta_T$ к соотношению $u(x+(t-\chi(x,t,s_1))a,\chi(x,t,s_1))=s_1$. Функция $\nu(x,t,s_2)$ при фиксированных значениях $(x,t)\in\Delta_T$ является обратной к аналогичной $s_2=v(x-(t-\tau)a,\tau)\exp(-c\tau/2)$, $\tau\in[0,t]$, то есть при фиксированных $(x,t)\in\Delta_T$ для $s_2\in[\varphi(x-at),v(x,t)\exp(-ct/2)]$ имеет место соотношение $v(x-(t-\nu(x,t,s_2))a,\nu(x,t,s_2))\exp(-c\nu(x,t,s_2)/2)=s_2$, то есть $u(x-(t-\nu(x,t,s_2))a,\nu(x,t,s_2))=s_2$ при $(x,t)\in\Delta_T$.

Осуществимость указанных замен следует из неравенств

$$\begin{aligned} k^{\pm}(\xi,\theta)=\Big[&\mp a\varphi'(\xi\mp a\theta)+\widetilde{\psi}(\xi\mp a\theta)+\int\limits_0^t \widetilde{f}(\xi\mp a(\theta-\tau),\tau,v)\,d\tau\,+\\ &+\int\limits_0^t \widetilde{r}(\xi\mp a(\theta-\tau),\tau,v)\,d\tau-\frac{c}{2}v(\xi,\theta)\Big]\exp\{-c\theta/2\}\geq\psi_0>0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$(\xi,\theta)\in\Delta_T$, являющихся непосредственным следствием условий (2.3). После замены подынтегральной переменной и с учетом обратной замены функции в пределах интегралов входящая в выражения для функций v_i разность интегралов $\Delta I=I(x,t+\Delta t)-I(x,t)$ примет вид

$$\Delta I = \int\limits_{\varphi(x+at+a\Delta t)}^{v(x,t+\Delta t)\exp[-c(t+\Delta t)/2]} \frac{f(s)\exp\{c\theta_1/2\}}{k^+(\xi_1,\theta_1)}\Bigg|_{\substack{\theta_1=\chi(x,t+\Delta t,s)\\ \xi_1=x+(t+\Delta t-\chi(x,t+\Delta t,s))a}} ds -$$

$$- \int\limits_{\varphi(x+at)}^{v(x,t)\exp(-ct/2)} \frac{f(s)\exp\{c\theta/2\}}{k^+(\xi,\theta)}\Bigg|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a\\ \theta=\chi(x,t,s)}} ds =$$

$$= \int\limits_{u(x,t)}^{u(x,t+\Delta t)} \frac{f(s)\exp\{c\theta_1/2\}}{k^+(\xi_1,\theta_1)}\Bigg|_{\substack{\xi_1=x+(t+\Delta t-\chi(x,t+\Delta t,s))a\\ \theta_1=\chi(x,t+\Delta t,s)}} ds +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(x+at+a\Delta t)}^{u(x,t)} \frac{f(s)}{k^+(\xi,\theta)\,k^+(\xi_1,\theta_1)}[k^+(\xi,\theta)\exp\{c\theta_1/2\} -$$

$$- k^+(\xi_1,\theta_1)\exp\{c\theta/2\}]\Bigg|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\ \theta=\chi(x,t,s)\\ \xi_1=x+(t+\Delta t-\chi(x,t+\Delta t,s))a,\ \theta_1=\chi(x,t+\Delta t,s)}} ds -$$

$$- \int\limits_{\varphi(x+at)}^{\varphi(x+at+a\Delta t)} \frac{f(s)\exp\{c\theta/2\}}{k^+(\xi,\theta)}\Bigg|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a\\ \theta=\chi(x,t,s)}} ds =$$

$$= I_1 + \int\limits_{\varphi(x+at+a\Delta t)}^{u(x,t)} f(s)R(x,t,\Delta t,s)ds + I_2, \quad (x,t),\ (x,t+\Delta t)\in\Delta_T.$$

Приводя составляющую функцию $R(x,t,\Delta t,s)$ разность к общему знаменателю, можно получить:

$$R(x,t,\Delta t,s) = \frac{1}{k^+(\xi,\theta)\,k^+(\xi_1,\theta_1)}\left\{\frac{k^+(\xi_1,\theta)-k^+(\xi_1,\theta_1)}{\theta-\theta_1}\exp\{c\theta/2\}\times\right.$$

$$\times(\theta-\theta_1) + k^+(\xi_1,\theta)\frac{\exp\{c\theta_1/2\}-\exp\{c\theta/2\}}{\theta-\theta_1}(\theta-\theta_1) +$$

$$\left. + \exp\{c\theta_1/2\}\frac{k^+(\xi,\theta)-k^+(\xi_1,\theta)}{\xi-\xi_1}(\xi-\xi_1)\right\}.$$

С учетом переобозначения $\Delta\xi=\xi-\xi_1$, $\Delta\theta=\theta-\theta_1$, используя формулы

$$\Delta\xi = a\Big[\chi(x,t+\Delta t,s)-\chi(x,t,s)-\Delta t\Big] = a\left[\frac{\partial\chi}{\partial t}(x,t,s)\Big|_{t=t^*}-1\right]\Delta t =$$

$$= a\left[-\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left\{v(x+(t-\tau)a,\tau)\exp(-c\tau/2)\right\}}{\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{v(x+(t-\tau)a,\tau)\exp(-c\tau/2)\right\}}\bigg|_{t=t^*} + 1\right]\Delta t =$$

$$= \frac{-a\exp(-c\theta^*/2)}{k^+(\xi^*,\theta^*)}\left[v_t(\xi^*,\theta^*) - c\,v(\xi^*,\theta^*)/2\right]\bigg|_{\substack{\theta^*=\chi(x,t^*,s)\\ \xi^*=x+(t^*-\chi(x,t^*,s))a}} \Delta t,$$

$$\Delta\theta = \chi(x,t,s) - \chi(x,t+\Delta t,s) = -\frac{\partial\chi}{\partial t}(x,t,s)\bigg|_{t=t^*}\Delta t =$$

$$= a\frac{v_x(\xi^*,\theta^*)\exp(-c\theta^*/2)}{k^+(\xi^*,\theta^*)}\bigg|_{\substack{\theta=\chi(x,t^*,s)\\ \xi^*=x+(t^*-\chi(x,t^*,s))a}} \Delta t,$$

где t^* принадлежит отрезку с концами в точках t и $t+\Delta t$, получим

$$\Delta I = \frac{f(u(x,t^*))\exp(c\theta^*/2)u_t(x,t^*)}{k^+(\xi^*,\theta^*)}\bigg|_{\substack{\theta^*=\chi(x,t+\Delta t,u(x,t^*))\\ \xi^*=x+(t+\Delta t-\chi(x,t+\Delta t,u(x,t^*)))a}} \Delta t +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(x+at+a\Delta t)}^{u(x,t)} \frac{af(s)\exp(-c\theta^*/2)}{k^+(\xi,\theta)k^+(\xi_1,\theta_1)k^+(\xi^*,\theta^*)}\left\{v_x^*\frac{v_1(\xi_1,\theta_1,\Delta\theta)}{\Delta\theta} -\right.$$

$$- av_x^*\frac{v_3(\xi_1,\theta_1,\Delta\theta)}{\Delta\theta} - \left(v_t^* - \frac{c}{2}v^*\right)\frac{v_4(\xi_1,\theta,\Delta\xi)}{\Delta\xi}\exp\left(\frac{c(\theta_1-\theta)}{2}\right) +$$

$$+ a\left(v_t^* - \frac{c}{2}\,v^*\right)\frac{v_2(\xi_1,\theta,\Delta\xi)}{\Delta\xi}\exp\left(\frac{c(\theta_1-\theta)}{2}\right) - \frac{c}{2}v_t(\xi_1,\theta^*)v_x^* +$$

$$+ \frac{c}{2}\,v_x(\xi^*,\theta)\left(v_t^* - \frac{c}{2}\,v^*\right)\exp\left(\frac{c(\theta_1-\theta)}{2}\right) - \frac{c}{2}\,v_x^*\Big[k^+(\xi_1,\theta)\exp(c\theta^*/2) +$$

$$\left.\left. + \; k^+(\xi_1,\theta_1)\exp\left(\frac{c(\theta_1-\theta)}{2}\right)\Big]\right\}\right|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\quad \theta=\chi(x,t,s)\\ \xi^*=x+(t^*-\chi(x,t^*,s))a,\quad \theta^*=\chi(x,t^*,s)\\ \xi_1=x+(t+\Delta t-\chi(x,t+\Delta t,s))a,\ \theta_1=\chi(x,t+\Delta t,s)}} ds\,\Delta t -$$

$$- \frac{af(s^*)\exp(c\theta^*/2)\varphi'(x+at^*)}{k^+(\xi^*,\theta^*)}\bigg|_{\substack{\theta^*=\chi(x,t,s^*)\\ \xi^*=x+(t-\chi(x,t,s^*))a}} \Delta t,$$

где функции v^*, v_t^*, v_x^* имеют аргументы $(x+(t^*-\chi(x,t^*,s))a,\ \chi(x,t^*,s))$, а число s^* принадлежит отрезку с концами в точках $\varphi(x+at+a\Delta t)$ и $\varphi(x+at)$, $(x,t)\in\Delta_T$.

Проводя аналогичные преобразования для других интегралов, составляющих представления для функций v_1, v_2, v_3, v_4, получим для функций $V_1(x,t,\Delta t) = v_1(x,t,\Delta t)/\Delta t$, $V_2(x,t,\Delta x) = v_2(x,t,\Delta x)/\Delta x$,

$V_3(x,t,\Delta t) = v_3(x,t,\Delta t)/\Delta t$, $V_4(x,t,\Delta x) = v_4(x,t,\Delta x)/\Delta x$ систему уравнений второго рода Вольтерровского типа

$$V_i(x,t,\Delta t)=\alpha_i^*(x,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\int\limits_{\varphi(x+at)}^{u(x,t)}\Bigg[\sum_{j=1,3}\beta_{ij}^*(x,t,s)V_j(\xi_1,\theta_1,\Delta\theta)+$$

$$+\sum_{j=2,4}\beta_{ij}^*(x,t,s)V_j(\xi_1,\theta,\Delta\xi)\Bigg]\Bigg|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\ \theta=\chi(x,t,s)\\ \xi_1=x+\Delta x+(t-\chi(x+\Delta x,t,s))a\\ \theta_1=\chi(x+\Delta x,t,s)}} f(s)\,ds\;+$$

$$+\int\limits_{\varphi(x-at)}^{u(x,t)}\Bigg[\sum_{j=1,3}\gamma_{ij}^*(x,t,s)V_j(\xi_1,\theta_1,\Delta\theta)+\sum_{j=2,4}\gamma_{ij}^*(x,t,s)\;\times$$

$$\times V_j(\xi_1,\theta,\Delta\xi)\Bigg]\Bigg|_{\substack{\xi=x+(t-\nu(x,t,s))a\\ \xi_1=x+\Delta x-(t-\nu(x+\Delta x,t,s))a\\ \theta=\nu(x,t,s),\ \theta_1=\nu(x+\Delta x,t,s)}} f(s)\,ds,\ i=1,3, \qquad (2.11.1)$$

$$V_i(x,t,\Delta x)=\alpha_i^*(x,t)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}+\int\limits_{\varphi(x+at)}^{u(x,t)}\Bigg[\sum_{j=1,3}\beta_{ij}^*(x,t,s)V_j(\xi_1,\theta_1,\Delta\theta)+$$

$$+\sum_{j=2,4}\beta_{ij}^*(x,t,s)V_j(\xi_1,\theta,\Delta\xi)\Bigg]\Bigg|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\ \theta=\chi(x,t,s)\\ \xi_1=x+(t+\Delta t-\chi(x,t+\Delta t,s))a,\ \theta_1=\chi(x,t+\Delta t,s)}} f(s)\,ds\;+$$

$$+\int\limits_{\varphi(x-at)}^{u(x,t)}\Bigg[\sum_{j=1,3}\gamma_{ij}^*(x,t,s)V_j(\xi_1,\theta_1,\Delta\theta)+\sum_{j=2,4}\gamma_{ij}^*(x,t,s)\;\times$$

$$\times V_j(\xi_1,\theta,\Delta\xi)\Bigg]\Bigg|_{\substack{\xi=x-(t-\nu(x,t,s))a\\ \xi_1=x+\Delta x-(t-\nu(x+\Delta x,t,s))a\\ \theta=\nu(x,t,s),\ \theta_1=\nu(x+\Delta x,t,s)}} f(s)\,ds,\ i=2,4,\ (x,t)\in\Delta_T. \qquad (2.11.2)$$

Входящие в формулы (2.11) функции $\alpha_i^*(x,t)$, $\beta_{ij}^*(x,t,s)$, $\gamma_{ij}^*(x,t,s)$, $i,j=1,2,3,4$, вычисляемые аналогично приведенным в выражении для разности интегралов ΔI, определяются значениями известных граничных непрерывных ограниченных функций, определенных на основаниях характеристических треугольников с вершинами в точках (x,t), $(x+\Delta x,t)$, $(x,t+\Delta t)\in\Delta_T$, а также значениями функции $v(x,t)$ и ее первых производных из треугольника с вершинами в точках (x,t), $(x+\Delta x,t)$,

$(x, t+\Delta t)$. Следовательно, коэффициенты $\alpha_i^*(x,t)$, $\beta_{ij}^*(x,t,s)$, $\gamma_{ij}^*(x,t,s)$, $i,j=1,2,3,4$, непрерывны и ограничены во всех точках области Δ_T.

Систему (2.11) можно записать в операторно-векторном виде $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{A} + \mathcal{K}\overrightarrow{V}$, где $\overrightarrow{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)^{\mathbf{T}}$, $\overrightarrow{A} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*)^{\mathbf{T}}$, а оператор $\mathcal{K}$ реализует интегральные операторы Вольтерра, входящие в (2.11). Применяя принцип сжимающих отображений, получим, что при $\Delta t, \Delta x \to 0$ система (2.11) имеет непрерывное во всех точках области Δ_T решение

$$\overrightarrow{V} = (E + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}^k)\,\overrightarrow{A}, \tag{2.12}$$

причем оператор $(E + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}^k)$ равномерно ограничен при всех допустимых Δt и Δx, включая нули, а в векторе $\overrightarrow{A}$ допустим предельный переход при $\Delta t, \Delta x \to 0$. Таким образом, переходя к пределу в правой части равенства (2.12), получим предельный переход и в левой части равенства (2.12) от вектора $\overrightarrow{V}$ к производным v_{tt}, v_{xx}, v_{xt}, v_{tx} соответственно. Следовательно, функции $v_{xx}(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$, $v_{xt}(x,t)$, $v_{tx}(x,t)$ при $(x,t)\in\Delta_T$ непрерывны, причем $v_{xt}(x,t) = v_{tx}(x,t)$, и кроме того равномерно ограничены на множестве $(x,t)\in\Delta_T$.

Таким образом, решение уравнения (2.4) имеет при $(x,t) \in \Delta_T$ непрерывные производные до второго порядка включительно. Непосредственно из системы (2.11) получается система интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно производных v_{tt}, v_{xx}, v_{xt}, которая имеет единственное непрерывное решение.

С другой стороны, в силу существования у решения $v(x,t)$ непрерывных производных второго порядка система уравнений для их определения получается и следующим образом. Дифференцируя равенства (2.8), (2.9) с содержащими функции f интегралами, записанными по введенным выше подынтегральным переменным, можно получить

$$\left.\begin{array}{ll} v_{tt}(x,t) & \text{при } \ i=1 \\ v_{xx}(x,t) & \text{при } \ i=2 \\ v_{xt}(x,t) & \text{при } \ i=3 \end{array}\right\} = \alpha_i(x,t) + \int\limits_{\varphi(x+at)}^{u(x,t)} f(s)\Big[\beta_{i1}(x,t,s)v_{tt}(\xi,\theta) \ +$$

$$+\beta_{i2}(x,t,s)v_{xx}(\xi,\theta) + \beta_{i3}(x,t,s)v_{xt}(\xi,\theta)\Big]\Bigg|_{\substack{\theta=\chi(x,t,s)\\ \xi=x+(t-\chi(x,t,s))a}} ds \ +$$

$$+\int\limits_{\varphi(x-at)}^{u(x,t)} f(s)\Big[\gamma_{i1}(x,t,s)v_{tt}(\xi,\theta) + \gamma_{i2}(x,t,s)v_{xx}(\xi,\theta) \ +$$

$$+\gamma_{i3}(x,t,s)v_{xt}(\xi,\theta)\Big]\Big|_{\substack{\theta=\nu(x,t,s)\\ \xi=x-(t-\nu(x,t,s))a}} ds, \quad (x,t)\in\Delta_T. \tag{2.13}$$

В уравнениях (2.13) использованы обозначения:

$$\alpha_1(x,t)=\frac{a}{2}\Big[a\varphi''(x+at)+a\varphi''(x-at)+\widetilde{\psi}'(x+at)-\widetilde{\psi}'(x-at)\Big] +$$
$$+\frac{f(u(x,t))}{2}\Big[v_t(x,t)-\frac{c}{2}v(x,t)\Big]\Big[\frac{1}{k^-(x,t)}+\frac{1}{k^+(x,t)}\Big]+\frac{c^2}{4}v(x,t) -$$
$$-\frac{af(\varphi(x+at))\varphi'(x+at)}{2k^+(x+at,0)}+\frac{af(\varphi(x-at))\varphi'(x-at)}{2k^-(x-at,0)}+$$
$$+\frac{ac^2}{8}\int\limits_0^t[v_x(x+(t-\tau)a,\tau)-v_x(x-(t-\tau)a,\tau)]\,d\tau +$$
$$+\frac{c}{4}\int\limits_{\varphi(x+at)}^{v(x,t)\exp\{-ct/2\}}\frac{f(s)}{[k^+(\xi,\theta)]^2}\Big\{3\chi_t v_t(\xi,\theta)+a(1-3\chi_t)v_x(\xi,\theta) -$$
$$-c\chi_t v(\xi,\theta)\Big\}\Big|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a\\ \theta=\chi(x,t,s)}} ds+\frac{c}{4}\int\limits_{\varphi(x-at)}^{v(x,t)\exp\{-ct/2\}} f(s)\ \times$$
$$\times\ \frac{[3v_t(\xi,\theta)-cv(\xi,\theta)]\nu_t+v_x(\xi,\theta)a(3\nu_t-1)}{[k^-(\xi,\theta)]^2}\Big|_{\substack{\theta=\nu(x,t,s)\\ \xi=x-(t-\nu(x,t,s))a}} ds,$$

$$\beta_{11}(x,t,s)=-(\chi_t/2)[k^+(\xi,\theta)]^{-2}\Big|_{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\ \theta=\chi(x,t,s)},$$
$$\beta_{12}(x,t,s)=(a^2/2)(1-\chi_t)[k^+(\xi,\theta)]^{-2}\Big|_{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\ \theta=\chi(x,t,s)},$$
$$\beta_{13}(x,t,s)=a(\chi_t-1/2)[k^+(\xi,\theta)]^{-2}\Big|_{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a,\ \theta=\chi(x,t,s)},$$
$$\gamma_{11}(x,t,s)=-(\nu_t/2)[k^-(\xi,\theta)]^{-2}\Big|_{\xi=x-(t-\nu(x,t,s))a,\ \theta=\nu(x,t,s)},$$
$$\gamma_{12}(x,t,s)=(a^2/2)(1-\nu_t)[k^-(\xi,\theta)]^{-2}\Big|_{\xi=x-(t-\nu(x,t,s))a,\ \theta=\nu(x,t,s)},$$
$$\gamma_{13}(x,t,s)=-a(\nu_t-1/2)[k^-(\xi,\theta)]^{-2}\Big|_{\substack{\xi=x-(t-\nu(x,t,s))a\\ \theta=\nu(x,t,s)}},\ (x,t)\in\Delta_T.$$

и аналогично для функций $\alpha_i(x,t)$, $\beta_{ij}(x,t,s)$, $\gamma_{ij}(x,t,s)$ при $i=2,3$ и

$j = 1, 2, 3$, где

$$\chi_t = -\,a\,v_x(\xi,\theta)\exp(-\,c\theta/2)[k^+(\xi,\theta)]^{-1}\Big|_{\substack{\xi=x+(t-\chi(x,t,s))a\\ \theta=\chi(x,t,s)}},$$
$$\nu_t = av_x(\xi,\theta)\exp(-\,c\theta/2)[k^-(\xi,\theta)]^{-1}\Big|_{\substack{\xi=x-(t-\nu(x,t,s))a\\ \theta=\nu(x,t,s)}}, \quad (x,t)\in\Delta_T.$$

Из системы (2.13) следует оценка:

$$|v_{xx}(x,t)|,\ |v_{xt}(x,t)|,\ |v_{tt}(x,t)| \le B_2\exp\left\{B_{22}R^2\right\} \le v^{**},\ (x,t)\in\Delta_T,$$

где B_2, B_{22}, v^{**} – положительные постоянные, причем B_{22} не зависит от R и L_f, а B_2, v^{**} не зависят от L_f. Пусть мажорирующие постоянные выбраны так, что $|u_{xx}(x,t)|$, $|u_{xt}(x,t)|$, $|u_{tt}(x,t)| \le v^{**}$, $(x,t)\in\Delta_T$.

Докажем теперь эквивалентность решения задачи (2.4) и уравнения (2.5) в пространстве $C^2(\Delta_T)$.

Выражения для функций v, v_{tt}, v_{xx}, взятые из представлений (2.5), (2.13) при подстановке в уравнение (2.4) образуют тождество. Следовательно, функция $v(x,t)$, получаемая из уравнения (2.5), удовлетворяет уравнению (2.4). Также подстановкой устанавливается, что функция $v(x,t)$, получаемая из представления (2.5), удовлетворяет начальным условиям, входящим в (2.4). Итак, решение уравнения (2.5) является решением задачи (2.4). С другой стороны, интегрируя для каждого (x,t) по области $\Delta_{x,t}$ уравнение (2.4), с учетом начальных условий из (2.4), и ограничений (1.2), (2.1)-(2.3) можно получить уравнение (2.5). Следовательно, решение задачи (2.4) эквивалентно решению уравнения (2.5) при выполнении ограничений (1.2), (2.1) -(2.3).

Так как эквивалентность уравнения (2.5) и задачи (2.4) установлена при условиях (1.2), (2.1)-(2.3), а выше была установлена однозначная разрешимость уравнения (2.5), то отсюда следует и однозначная разрешимость задачи (2.4), решение которой $v(x,t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, удовлетворяющие при условиях (1.2), (2.1)-(2.3) оценке (2.7) и аналогичным равномерным оценкам для производных первого и второго порядков. Из существования и единственности непрерывной функции $v(x,t) \in C^2(\Delta_T)$ в силу обратимости начальной замены следует существование и единственность решения $u(x,t)\in C^2(\Delta_T)$ исходной задачи (1.1).

Теорема 1 доказана.

3. Схема численного решения в $C^2(\Delta_T)$ задачи Коши

За основу алгоритма численного решения задачи Коши может быть взята система уравнений (2.5), (2.8), (2.9), (2.13), допускающая итерационное решение и имеющая в операторной записи соответственно следующий вид:

$$u(x,t) = A[u](x,t), \qquad \begin{cases} u_x(x,t) = B_1[u](x,t), \\ u_t(x,t) = B_2[u](x,t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) = D_1[u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}](x,t), \\ u_{xt}(x,t) = D_2[u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}](x,t), \\ u_{tt}(x,t) = D_3[u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}](x,t). \end{cases}$$

В силу сжимаемости операторов A, B, D, установленной при доказательстве теоремы, метод основан на получении приближений функции $u(x,t)$ при помощи последовательных итеративных процедур

$$u^{(i+1)}(x,t) = A[u^{(i)}(x,t)], \quad (x,t) \in \Delta_T, \quad i = 1,2,\ldots$$

с удовлетворяющим условиям задачи начальным приближением $u^{(0)}(x,t)$, $(x,t) \in \Delta_T$. На втором этапе следует итерационное вычисление частных производных второго порядка функции $u(x,t)$ с подставленной в правые части уравнений вычисленных значений уже полученной функцией $u(x,t)$ и вычисляемых по формулам

$$u_x(x,t) = B_1[u(x,t)], \quad u_t(x,t) = B_2[u(x,t)], \quad (x,t) \in \Delta_T.$$

При этом сам итерационный алгоритм вычисления вторых производных имеет вид:

$$\begin{cases} u_{xx}^{(i+1)}(x,t) = D_1[u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), u_{xx}^{(i)}, u_{xt}^{(i)}, u_{tt}^{(i)}] \\ u_{xt}^{(i+1)}(x,t) = D_2[u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), u_{xx}^{(i)}, u_{xt}^{(i)}, u_{tt}^{(i)}], \\ u_{tt}^{(i+1)}(x,t) = D_3[u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), u_{xx}^{(i)}, u_{xt}^{(i)}, u_{tt}^{(i)}] \end{cases} \quad \begin{array}{l} (x,t) \in \Delta_T, \\ i = 1,2,\ldots \end{array}$$

с любыми допустимыми исходными приближениями $u_{xx}^{(0)}(x,t), u_{xt}^{(0)}(x,t), u_{tt}^{(0)}(x,t)$, $(x,t) \in \Delta_T$. Вид операторов, используемых в алгоритме конкретизирован в предыдущем пункте и дополняется с учетом первоначальной замены функции. Сходимость итерационных алгоритмов следует из установленной сжимаемости операторов A, B_i, $i = 1,2$, D_k, $k = 1,2,3$.

Литература

1. Kaliski S. Integral theorems for the wave-type heat conductivity equation // Bull. Acad. Polon. Ser. Sci. Tech. 1969. V. 17. P. 509 - 518.
2. Бубнов В.А., Соловьев И.А. Об использовании гиперболического уравнения в теории теплопроводности // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 33. N 6. С. 1131 - 1135.
3. Lattes R., Lions J.-L. Methode de quasi-reversibilite et applications. Paris: Dunod. 1967. 368 p.
4. Elden L. Hyperbolic approximations for a Cauchy problem for the heat equation // J. Inv. probl. 1988. V. 4. N 1. P. 59 - 70.
5. Щеглов А.Ю. О равномерном приближении решения одной обратной задачи методом квазиобращений // Математ. заметки. 1993. Т. 53. N 2. С. 168 - 174.
6. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. М.: Наука. 1969. 195 с.
7. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд. 1982. 88 с.
8. Cannon J.R., DuChateau P. An inverse problem for an unknown source term in a wave equation // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. N 3. P. 553 - 564.
9. Баев А.В. О решении обратной задачи для волнового уравнения по информации, заданной в точке // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. матем. и киб. 1989. N 4. С. 28 - 33.
10. Guo Bao Qi, Wang Jian Tao. An inverse problem for a one-dimensional semilinear hyperbolic equation with an unknown source // J. Harbin Inst. Tech. 1989. N 4. P. 14 - 20.
11. Denisov A.M. Determination of a nonlinear coefficient in a hyperbolic equation for the Goursat problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6. N 4. P. 327 - 334.
12. Shcheglov A.Yu. The inverse problem of determination of a nonlinear source in a hyperbolic equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6. N 6. P. 625 - 644.

13. Shcheglov A.Yu. Iterative method for recovery a nonlinear source in a hyperbolic equation with final overdetermination // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2002. V. 10. N 6. P. 629 - 641.

14. Денисов А.М. Существование решения обратной обратной задачи для квазилинейного уравнения гиперболического типа // Диф. ур-ния. 2002. Т. 38. N 9. С. 1155 - 1164.

15. Щеглов А.Ю. Метод приближенного решения обратной задачи для полулинейного уравнения гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. N 1. С. 129 - 144.

16. Hadamar J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. Paris: Hermann, 1932. 542 p.

17. Petrowsky I.G. Uber die Cauchysche Problem fur Systeme von partiellen Differentialgleichungen // Матем. сб. 1937. Т. 2. N 5. С. 815 - 870.

18. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения М.: Гос. изд-во техи.-теорет. лит-ры, 1953. 280 с.

19. Sobolev S. L. Sur les equations aux derivees partielles hyperboliques nonlineaires. Roma: Edizione Cremoneze, 1961. 156 p.

20. Jorgens K. Das Anfangswertproblem im Grossen Fur eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen // Math. Zeit. 1961. Bd. 77. Hft. 4. S. 295 - 308.

21. Mizohata S., Yamaguti M. Mixed problem for some semi-linear wave equation // J. Math. Kyoto Univ. 1962. V. 27. N 1. P. 61 - 78.

22. Brezis H. Periodic solutions of nonlinear vibrating strings and duality principles // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 8. N 3. P. 409 - 426.

23. Плотников П.И., Юнгерман Л.Н. Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала // Диф. ур-ния. 1988. Т. 24. N 9. С. 1599 - 1607.

24. Mizohata K., Ukai S. The global existence of small amplitude solutions to the nonlinear acoustic wave equation // J. Math. Kyoto Univ. 1993. V. 33. N 2. P. 505 - 522.

25. Щеглов А.Ю. Метод приближенного решения в C^2 уравнения гиперболического типа с Липшицевой нелинейностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. N 3. С. 420 - 435.