О.С. Дудакова[1]

О СТРУКТУРЕ РЕШЕТКИ КЛАССОВ ЧАСТИЧНЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ[*]

В работе исследуются замкнутые классы частично определенных функций многозначной логики. Известно, что множество всех замкнутых классов в частичной k-значной логике имеет мощность континуума при всех $k \geq 2$. Поэтому представляет интерес задача об описании отдельных фрагментов решетки замкнутых классов в частичной k-значной логике. Описание замкнутых классов в частичной двузначной логике, содержащих множество P_2 всех булевых функций или какой-нибудь из предполных классов в P_2, получено в работах $[1,2]$. Подобные результаты получены и для некоторых семейств предполных классов функций k-значной логики при произвольных $k \geq 3$ (см. [3]). Однако до недавнего времени не было получено результатов для классов частичных функций, содержащих предполный в P_k класс всюду определенных функций, монотонных относительно частичного порядка, не являющегося решеткой. В работах [4–7] показано, что существуют бесконечные семейства таких классов. В данной работе продолжены исследования в этом направлении. Рассматривается частично упорядоченное множество из 6 элементов с наименьшим и наибольшим элементами, которое не является решеткой. Построено бесконечное семейство классов частичных монотонных функций, содержащее семейство классов, описанное в работах [4, 7]. Данная работа представляет собой подробное изложение результатов работы [8].

Пусть $\mathscr{P} = (E_k, \leq)$ — произвольное частично упорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами. Через P_k^* обозначим семейство всех *частичных функций* на $\mathscr{P}$, то есть множество отображений $\cup_{n\geq 1}\{f \mid f : \mathscr{P}^n \to (\mathscr{P} \cup \{*\}\}$.*Областью определения* $(D(f))$ функции $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_k^*$ будем называть множество всех наборов из $\mathscr{P}^n$, на которых значение f отлично от $*$. Пусть F и G — замкнутые классы в P_k^*, $F \subseteq G$, через $\mathscr{I}(F,G)$ будем обозначать семейство всех замкнутых подклассов класса G, содержащих F. Через $M_{\mathscr{P}}$ обозначим класс всюду определенных монотонных функций на $\mathscr{P}$ (из существования наименьшего и наибольшего элементов в $\mathscr{P}$ следует, что $M_{\mathscr{P}}$ — предполный класс в P_k, см. [3]). Через $\widehat{M}^*_{\mathscr{P}}$ будем обозначать множество

[1]Доцент механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: `olga.dudakova@gmail.com`.

[*]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №18-01-00337 «Проблемы синтеза, сложности и надежности в теории управляющих систем»).

всех частичных функций, монотонных на области определения. Через $M^*_{\mathscr{P}}$ будем обозначать множество всех частичных функций из $\widehat{M}^*_{\mathscr{P}}$, доопределяемых до функций из $M_{\mathscr{P}}$. Легко видеть, что $\widehat{M}^*_{\mathscr{P}}$ и $M^*_{\mathscr{P}}$ — замкнутые классы в P^*_k и выполняются следующие соотношения:

$$M_{\mathscr{P}} \subset M^*_{\mathscr{P}} \subseteq \widehat{M}^*_{\mathscr{P}}.$$

Обозначим чрез $\mathscr{E}$ частично упорядоченное множество $\{0,\alpha,\alpha',\beta,\beta',1\}$ с наименьшим элементом 0, наибольшим элементом 1 и двумя парами несравнимых элементов α, α' и β, β', для которых $\alpha,\alpha' < \beta,\beta'$. Следует отметить, что это минимальное по числу элементов множество, имеющее наименьший и наибольший элементы и отличное от решетки (*решеткой* называется частично упорядоченное множество $\mathscr{P}$, такое что для любых $a,b \in \mathscr{P}$ существует $\sup(a,b)$ и $\inf(a,b)$). Известно (см. [3]), что если $\mathscr{P}$ — решетка, то $M^*_{\mathscr{P}} = \widehat{M}^*_{\mathscr{P}}$, также известно, что для произвольного частично упорядоченного множества $\mathscr{P}$ с наименьшим и наибольшим элементами число замкнутых классов в интервале $\mathscr{I}(M_{\mathscr{P}},M^*_{\mathscr{P}})$ конечно. В работах [4,7] построено бесконечное семейство $\{T^j_i\}$, классов, содержащихся в интервале $\mathscr{I}(M^*_{\mathscr{E}},\widehat{M}^*_{\mathscr{E}})$. В данной работе показано, что для максимальных по включению классов T^2_1 и T^1_2 из построенного семейства число классов в интервалах $\mathscr{I}(T^2_1,\widehat{M}^*_{\mathscr{E}})$ и $\mathscr{I}(T^1_2,\widehat{M}^*_{\mathscr{E}})$ бесконечно. Кроме того, найден предполный в $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$ класс, содержащий класс $M^*_{\mathscr{E}}$, и показано, что такой класс единственный.

Приведем необходимые определения (см. также [4, 7]).

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in \widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$. Пятерку наборов $\widetilde{a},\widetilde{a}',\widetilde{b},\widetilde{b}',\widetilde{c}$ назовем *квадратом* для f в $\mathscr{E}^n$, если для наборов выполняются неравенства $\widetilde{a},\widetilde{a}' < \widetilde{c} < \widetilde{b},\widetilde{b}'$ и значения функции заданы следующим образом: $f(\widetilde{a}) = \alpha$, $f(\widetilde{a}') = \alpha'$, $f(\widetilde{b}) = \beta$, $f(\widetilde{b}') = \beta'$, $f(\widetilde{c}) = *$.

Понятие квадрата является частным случаем понятия зигзага из работы [9]. Отсюда следует

Утверждение 1. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in \widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$. Тогда $f \in M^*_{\mathscr{E}}$ в том и только том случае, если в $\mathscr{E}^n$ нет квадрата для f.*

Пусть $f \in \widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, $\widetilde{a},\widetilde{a}',\widetilde{b},\widetilde{b}',\widetilde{c}$ — квадрат для функции f. Последовательность наборов $\widetilde{a}_0,\ldots,\widetilde{a}_{k+1}$, где $k \geq 1$ и все наборы различны назовем *нижним путем в квадрате*, если выполняются следующие условия: 1) $\widetilde{a}_0 = \widetilde{a}$, $\widetilde{a}_{k+1} = \widetilde{a}'$; 2) $\widetilde{a}_i$ и $\widetilde{a}_{i+1}$ сравнимы для всех $i = 0,\ldots,k$; 3) $f(\widetilde{a}_i) \neq *$ для всех $i = 1,\ldots,k$; 4) $\widetilde{a}_i < \widetilde{b},\widetilde{b}'$ для всех $i = 1,\ldots,k$. Аналогично определяется понятие *верхнего пути в квадрате* $\widetilde{a},\widetilde{a}',\widetilde{b},\widetilde{b}',\widetilde{c}$ для функции $f \in \widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$: это последовательность различных наборов $\widetilde{b}_0,\ldots,\widetilde{b}_{k+1}$ $(k \geq 1)$, для которых выполняются следующие условия: 1) $\widetilde{b}_0 = \widetilde{b}$, $\widetilde{b}_{k+1} = \widetilde{b}'$; 2) $\widetilde{b}_i$ и $\widetilde{b}_{i+1}$ сравнимы для всех $i = 0,\ldots,k$; 3) $f(\widetilde{b}_i) \neq *$ для всех $i = 1,\ldots,k$; 4) $\widetilde{b}_i > \widetilde{a},\widetilde{a}'$ для всех $i = 1,\ldots,k$. Число k будем называть *длиной пути*.

В работах [4,7] были определены следующие семейства функций:

F_∞: множество всех функций f из $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, для которых нет квадратов или ни в каком квадрате для f нет нижнего пути;

F_k: множество всех таких функций f из $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, что в любом квадрате для f, в котором есть нижний путь, длина любого нижнего пути в этом квадрате не меньше k, $k \geq 1$;

G_∞: множество всех функций f из $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, для которых нет квадратов или ни в каком квадрате для f нет верхнего пути;

G_k: множество всех таких функций f из $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, что в любом квадрате для f, в котором есть верхний путь, длина любого верхнего пути в этом квадрате не меньше k, $k \geq 1$.

Заметим, что $F_1 = G_1 = \widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$.

Положим $T_i^j = F_i \cap G_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, \infty$. В этих обозначениях $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}} = T_1^1$, $F_i = T_i^1$, $G_i = T_1^i$ $(i = 2, 3, \ldots, \infty)$. В работах [4,7] показано, что все множества T_i^j являются замкнутыми классами в P_6^*, все эти классы различны и выполняются следующие включения:

(1) $M^*_{\mathscr{E}} \subset T_\infty^\infty \subset T_\infty^i, T_i^\infty$ для всех $i \geq 1$;

(2) $T_\infty^i \subset T_\infty^{i-1}, T_m^i$ и $T_i^\infty \subset T_{i-1}^\infty, T_i^m$ для всех $i, m \geq 2$;

(3) $T_i^j \subset T_{i-1}^j, T_i^{j-1}$ для всех $i, j \geq 2$;

(4) $T_i^1 \subset T_{i-1}^1$; $T_1^i \subset T_1^{i-1}$ для всех $i \geq 2$.

Далее будет построено другое бесконечное семейство классов в интервале $\mathscr{I}(M^*_{\mathscr{E}}, \widehat{M}^*_{\mathscr{E}})$. Пусть $i, j \geq 2$. Определим следующие множества функций:

R_j^i: множество всех функций $f \in \widehat{M}^*$, таких что для f нет квадрата, в котором одновременно есть верхний путь длины меньшей, чем i, и нижний путь длины меньшей, чем j;

R_∞^i: множество всех функций $f \in \widehat{M}^*$, таких что для f нет квадрата, в котором одновременно есть верхний путь длины меньшей, чем i, и нижний путь произвольной длины;

R_j^∞: множество всех функций $f \in \widehat{M}^*$, таких что для f нет квадрата, в котором одновременно есть нижний путь длины меньшей, чем j, и верхний путь произвольной длины.

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 1 из работы [7].

Лемма 1. *Пусть* $f(x_1,\dots,x_n) = f_0(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$, *где* $f_0,f_1,\dots,f_m \in \widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$. *Пусть для* f *есть квадрат в* $\mathscr{E}^n$, *в котором есть одновременно нижний путь длины* k *и верхний путь длины* l, *где* $k,l \geq 1$. *Тогда либо для одной из функций* $f_1,\dots,f_m$ *есть квадрат в* $\mathscr{E}^n$, *в котором есть одновременно нижний путь длины* k *и верхний путь длины* l, *либо для* f_0 *есть квадрат в* $\mathscr{E}^m$, *в котором есть одновременно нижний путь длины* k' *и верхний путь длины* l', *где* $1 \leq k' \leq k$ *и* $1 \leq l' \leq l$.

Следствие. *Семейства функций* R_i^j, *где* $i = 2,\dots,\infty$, $j = 2,\dots,\infty$, *являются замкнутыми классами в* P_6^*.

Из определения классов T_i^j и R_i^j следует

Лемма 2. *Имеют место следующие соотношения:*

(a) $R_\infty^\infty \subseteq R_i^\infty, R_\infty^j$ *для всех* $i,j \geq 2$;

(b) $R_{i+1}^\infty \subseteq R_i^\infty$ *для всех* $i \geq 2$; $R_\infty^{j+1} \subseteq R_\infty^j$ *для всех* $j \geq 2$;

(c) $R_i^\infty \subseteq R_i^j$, $R_\infty^j \subseteq R_i^j$ *для всех* $i,j \geq 2$;

(d) $R_{i+1}^j \subseteq R_i^j$, $R_i^{j+1} \subseteq R_i^j$ *для всех* $i,j \geq 2$;

(e) $T_i^1 \subseteq R_i^j$ *для всех* $i,j = 2,3,\dots,\infty$; $T_1^j \subseteq R_i^j$ *для всех* $i,j = 2,3,\dots,\infty$.

Далее будет показано, что все включения в соотношениях (a)–(e) строгие.

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — функция из $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, такая что наборы в ее области определения образуют квадрат и нижний (верхний) путь в квадрате длины k, $k \geq 1$, причем этот квадрат — единственный квадрат для f, нижний (соответственно верхний) путь в квадрате также единственный, на всех остальных наборах f принимает значение $*$. Такую функцию f назовем *примитивной функцией нижнего* (соответственно *верхнего*) *типа порядка* k.

Пусть $k \geq 1$. Положим $\psi(k) = \begin{cases} 2, \text{ если } k = 1, \\ n, \text{ если } k = 2n-1, n \geq 2, \\ n+1, \text{ если } k = 2n, n \geq 1. \end{cases}$

В работе [7] доказано следующее утверждение:

Лемма 3. *Для любого* $k \geq 1$ *в* $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$ *существует примитивная функция нижнего (верхнего) типа порядка* k *от* $\psi(k)$ *переменных.*

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — функция из $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, такая что наборы в ее области определения образуют квадрат, в котором есть одновременно нижний путь длины k и верхний путь длины l, причем квадрат для функции f единственный в $D(f)$ и нижний и верхний пути в квадрате также единственные; на остальных наборах f принимает значение $*$. Такую функцию назовем *примитивной функцией смешанного типа порядка* $\langle k,l \rangle$.

Лемма 4. *Для любых* $k,l \geq 1$ *в* $\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$ *существует примитивная функция смешанного типа порядка* $\langle k,l \rangle$ *от* $\psi(k)+\psi(l)$ *переменных.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда хотя бы одно из чисел k,l равно 1, пусть $k=1, l \geq 1$. Пусть f — примитивная функция верхнего типа порядка l. Из определения функции f следует, что $f(0,\ldots,0)=*$. Доопределим функцию f на наборе $(0,\ldots,0)$ значением 0. Легко видеть, что полученная функция будет примитивной функцией смешанного типа порядка $\langle 1,l \rangle$. Случай $l=1$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $k,l \geq 2$. Будем доказывать утверждение леммы следующим образом: для заданных чисел k и l построим примитивную функцию нижнего типа порядка k от $\psi(k)$ переменных, примитивную функцию верхнего типа порядка l от $\psi(l)$ переменных, «склеим» наборы из областей их определения и на полученных наборах длины $\psi(k)+\psi(l)$ определим новую функцию так, чтобы она была примитивной функцией смешанного типа порядка $\langle k,l \rangle$.

Приведем подробное доказательство для случая, когда k и l нечетны, остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $k=2n-1$, $l=2m-1$, $n,m \geq 2$. Определим функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(y_1,\ldots,y_m)$. Множество $D(f)$ состоит из следующих наборов длины n:

$$\widetilde{a}^f=(\alpha,\alpha,\ldots,\alpha),\ \widetilde{a}'^f=(\alpha',\alpha',\ldots,\alpha'),$$
$$\widetilde{b}^f=(1,\beta,\beta,\ldots,\beta),\ \widetilde{b}'^f=(\beta,1,\beta,\ldots,\beta),$$
$$\widetilde{a}^f_{2i-1}=(\underbrace{\alpha',\ldots,\alpha'}_{i-1},0,\alpha,\ldots,\alpha),\ i=1,\ldots,n,$$
$$\widetilde{a}^f_{2i}=(\underbrace{\alpha',\ldots,\alpha'}_{i},\alpha,\ldots,\alpha),\ i=1,\ldots,n-1.$$

Значения функции f заданы следующим образом:

$$f(\widetilde{a}^f)=\alpha,\ f(\widetilde{a}'^f)=\alpha',$$
$$f(\widetilde{b}^f)=\beta,\ f(\widetilde{b}'^f)=\beta',$$
$$f(\widetilde{a}^f_i)=0 \text{ для всех } i=1,\ldots,2n-1,$$

на остальных наборах f принимает значение $*$.

Множество $D(g)$ состоит из следующих наборов длины m:

$$\widetilde{a}^g=(0,\alpha,\alpha,\ldots,\alpha),\ \widetilde{a}'^g=(\alpha,0,\alpha,\ldots,\alpha),$$
$$\widetilde{b}^g=(\beta,\beta,\ldots,\beta),\ \widetilde{b}'^g=(\beta',\beta',\ldots,\beta'),$$
$$\widetilde{b}^g_{2j-1}=(\underbrace{\beta',\ldots,\beta'}_{j-1},1\beta,\ldots,\beta),\ j=1,\ldots,m,$$
$$\widetilde{b}^g_{2j}=(\underbrace{\beta',\ldots,\beta'}_{j},\beta,\ldots,\beta),\ j=1,\ldots,m-1.$$

Значения функции g заданы следующим образом:

$$g(\widetilde{a}^g)=\alpha,\ g(\widetilde{a}'^g)=\alpha',$$
$$g(\widetilde{b}^g)=\beta,\ g(\widetilde{b}'^g)=\beta',$$
$$g(\widetilde{b}^g_j)=1 \text{ для всех } j=1,\ldots,2m-1,$$

на остальных наборах g принимает значение $*$.

Нетрудно показать (см. также [7], лемма 2), что f — примитивная функция нижнего типа порядка k, g — примитивная функция верхнего типа порядка l.

Далее определим функцию $h(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$. Для произвольных наборов $\widetilde{u}=(u_1,\dots,u_n)\in\mathscr{E}^n$ и $\widetilde{v}=(v_1,\dots,v_m)\in\mathscr{E}^m$ через $\widetilde{uv}$ будем обозначать набор $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m)$. В качестве $D(h)$ возьмем следующее множество наборов из $\mathscr{E}^{n+m}$:

$$\widetilde{a}=\widetilde{a}^f\widetilde{a}^g,\ \widetilde{a}'=\widetilde{a}'^f\widetilde{a}'^g,\ \widetilde{b}=\widetilde{b}^f\widetilde{b}^g,\ \widetilde{b}'=\widetilde{b}'^f\widetilde{b}'^g,$$
$$\widetilde{a}_i=\widetilde{a}_i^f\widetilde{0},\ \widetilde{b}_j=\widetilde{1}\widetilde{b}_j^g,\ i,j=1,\dots,2m-1,$$

где $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$ — это наборы $(0,\dots,0)$ и $(1,\dots,1)$ длины m и n соответственно.

Обозначим через $\widetilde{c}$ набор $(\underbrace{\beta,\beta,\dots,\beta,}_{n}\underbrace{\alpha,\alpha,\dots,\alpha,}_{m})$.

Далее положим

$$h(\widetilde{a})=\alpha,\ h(\widetilde{a}')=\alpha',$$
$$h(\widetilde{b})=\beta,\ h(\widetilde{b}')=\beta',$$
$$h(\widetilde{a}_i)=0 \text{ для всех } i=1,\dots,2n-1,$$
$$h(\widetilde{b}_j)=1 \text{ для всех } j=1,\dots,2m-1,$$

на остальных наборах h принимает значение $*$.

Легко видеть, что $h\in\widehat{M}^*_{\mathscr{E}}$, $\widetilde{a},\widetilde{a}',\widetilde{b},\widetilde{b}',\widetilde{c}$ — квадрат для h в $\mathscr{E}^n$, последовательность наборов $\widetilde{a},\widetilde{a}_1,\dots,\widetilde{a}_{2n-1},\widetilde{a}'$ — нижний путь длины k, последовательность наборов $\widetilde{b},\widetilde{b}_1,\dots,\widetilde{b}_{2m-1},\widetilde{b}'$ — верхний путь длины l в этом квадрате. При этом из построения следует, что других квадратов для h нет и других путей в квадрате $\widetilde{a},\widetilde{a}',\widetilde{b},\widetilde{b}',\widetilde{c}$ нет. Таким образом, h — примитивная функция смешанного типа порядка $\langle k,l\rangle$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Все классы R_i^j при $i,j=2,3,\dots,\infty$ различны и отличны от классов T_i^j.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что все включения в соотношениях (a)–(e) в формулировке леммы 2 строгие.

Пусть $i\geq 2$ и пусть f — примитивная функция смешанного типа порядка $\langle i,1\rangle$. Тогда $f\in R_i^\infty\setminus R_{i+1}^\infty$, $f\in R_i^\infty\setminus R_\infty^\infty$, следовательно, $R_\infty^\infty\subset R_i^\infty$ и $R_{i+1}^\infty\subset R_i^\infty$. Соотношения $R_\infty^\infty\subset R_\infty^j$ и $R_\infty^{j+1}\subset R_\infty^j$ для любого $j\geq 2$ доказываются аналогично.

Пусть $i,j\geq 2$ и пусть g — примитивная функция смешанного типа порядка $\langle i-1,j\rangle$. Тогда $g\in R_i^j\setminus R_i^\infty$, следовательно, $R_i^\infty\subset R_i^j$. Соотношения $R_\infty^j\subset R_i^j$ для любых $i,j\geq 2$ доказываются аналогично.

Пусть $i,j\geq 2$ и пусть h — примитивная функция смешанного типа порядка $\langle i,j-1\rangle$. Тогда $h\in R_i^j\setminus R_{i+1}^j$, следовательно, $R_{i+1}^j\subset R_i^j$. Соотношения $R_i^{j+1}\subset R_i^j$ для любых $i,j\geq 2$ доказываются аналогично.

Пусть r — примитивная функция нижнего типа порядка 1. Тогда $r \in R_\infty^\infty$ и $r \notin T_i^1$ для любого $i = 2, 3, \ldots, \infty$, откуда получаем, что $T_i^1 \subset R_i^j$ для всех $i, j = 2, 3, \ldots, \infty$. Соотношения $T_1^j \subset R_i^j$ для всех $i, j = 2, 3, \ldots, \infty$ доказываются аналогично. Теорема доказана.

Диаграмма включений классов R_i^j и T_i^j приведена на рисунке 1.

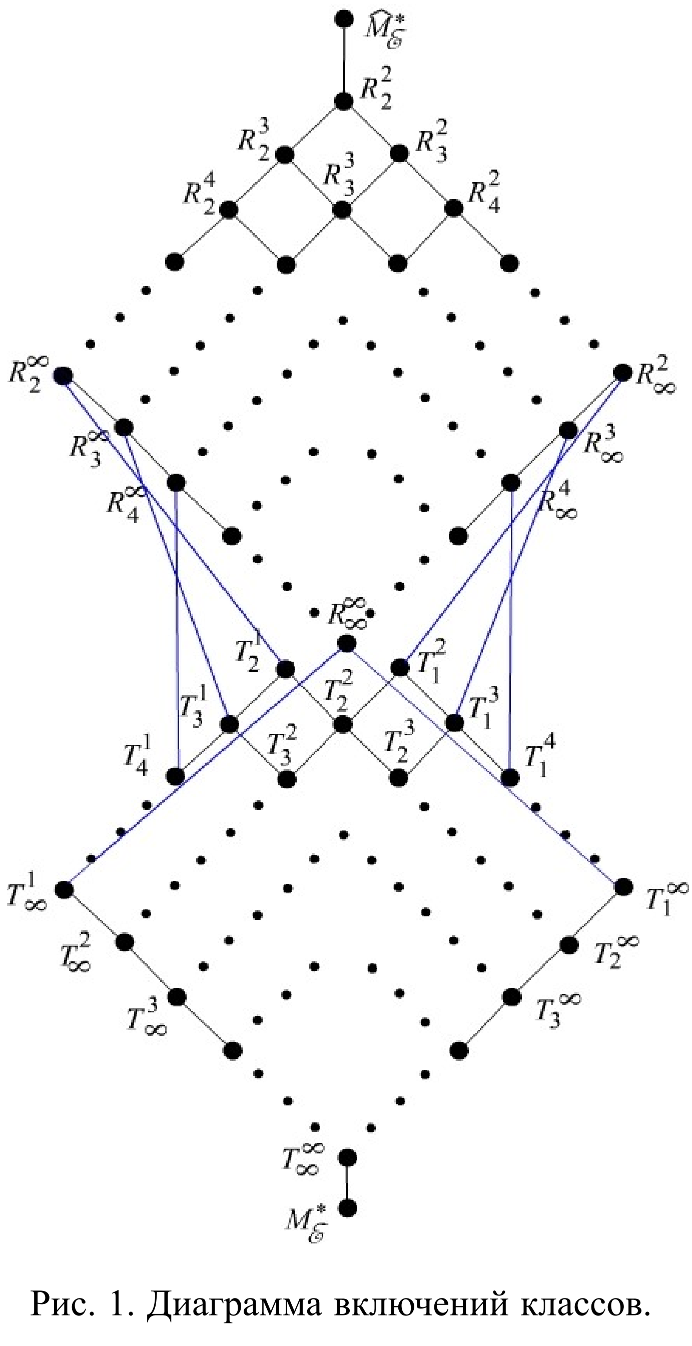

Рис. 1. Диаграмма включений классов.

Замечание. Полученные результаты обобщаются на случай произвольного частично упорядоченного множества с наименьшим и наибольшим элементами, не являющегося решеткой. Пусть $\mathscr{P} = (E_k, \preceq)$ — произвольное частично упорядоченное множество из k элементов с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. Нетрудно показать, что $\mathscr{P}$ не является решеткой тогда и только тогда, когда в $\mathscr{P}$ найдутся две пары несравнимых элементов α, α' и β, β', такие что $\alpha, \alpha' < \beta, \beta'$ и не существует элемента $\gamma \in \mathscr{P}$, для которого $\alpha, \alpha' < \gamma < \beta, \beta'$. Далее, все предыдущие рассуждения можно провести для частичных функций из P_k^*, монотонных относительно частичного порядка $\preceq$, принимающих значения только из множества $\{0, \alpha, \alpha', \beta, \beta', 1\}$.

Теорема 2. *Пусть $A \subseteq \widehat{M}_{\mathscr{E}}^*$ и пусть $M_{\mathscr{E}}^* \subseteq A$. Система A полна в классе $\widehat{M}_{\mathscr{E}}^*$ тогда и только тогда, когда содержит функцию, не лежащую в классе R_2^2.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in A \setminus R_2^2$. Это значит, что в $D(f)$ есть квадрат $\widetilde{a}, \widetilde{a}', \widetilde{b}, \widetilde{b}', \widetilde{c}$ и пара наборов $\widetilde{u}, \widetilde{v}$, таких что $\widetilde{u} < \widetilde{a}, \widetilde{a}'$ и $\widetilde{v} > \widetilde{b}, \widetilde{b}'$ и выполняются равенства $f(\widetilde{u}) = 0$, $f(\widetilde{v}) = 1$. Легко видеть, что для каждого $i = 1, \dots, n$ среди значений $a_i, a_i', b_i, b_i', u_i, v_i$ не могут одновременно встретиться все четыре значения из $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$.

Пусть $g(x_1, \dots, x_m)$ — произвольная функция из $\widehat{M}_{\mathscr{E}}^*$. Определим n функций следующим образом: для $i = 1, \dots, n$ для каждого набора $\widetilde{p} = (p_1, \dots, p_m)$ из $\mathscr{E}^m$ положим

$$\varphi_i(p_1, \dots, p_m) = \begin{cases} u_i, \text{ если } g(\widetilde{p}) = 0, \\ a_i, \text{ если } g(\widetilde{p}) = \alpha, \\ a_i', \text{ если } g(\widetilde{p}) = \alpha', \\ b_i, \text{ если } g(\widetilde{p}) = \beta, \\ b_i', \text{ если } g(\widetilde{p}) = \beta', \\ v_i, \text{ если } g(\widetilde{p}) = 1, \\ * \text{ если } g(\widetilde{p}) = *. \end{cases}$$

Легко видеть, что выполняется равенство

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Из монотонности функции g и из построения наборов $\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{a}, \widetilde{a}', \widetilde{b}, \widetilde{b}'$ следует, что $\varphi_i \in \widehat{M}_{\mathscr{E}}^*$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Кроме того, для каждого $i = 1, \dots, n$ функция φ_i не принимает по крайней мере одного из значений $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, откуда в силу утверждения 1 следует, что $\varphi_i \in M_{\mathscr{E}}^*$. Следовательно, $\varphi_i \in A$ для всех $i = 1, \dots, n$, а значит, $g \in [A]$. Теорема доказана.

Следствие. *Класс R_2^2 предполон в $\widehat{M}_{\mathscr{E}}^*$, причем это единственный предполный в $\widehat{M}_{\mathscr{E}}^*$ класс, содержащий множество $M_{\mathscr{E}}^*$.*

Литература

1. *Фрейвалд Р. В.* Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик // ДАН СССР. 1966. Т. 167, № 6. С. 1249–1250.

2. *Алексеев В. Б., Вороненко А. А.* О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 58–79.

3. *Lau D.* Function algebras on finite sets: a basic course on many-valued logic and clone theory. Springer Monographs in Mathematics. Berlin. Springer, 2006.

4. *Дудакова О. С.* О классах частичных монотонных функций шестизначной логики // Мат-лы XVIII Междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). М.: МАКС Пресс, 2017. С. 78–81.

5. *Алексеев В. Б.* О числе замкнутых классов в частичной *k*-значной логике, содержащих класс монотонных функций // Труды *X* Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.). М.: МАКС Пресс, 2018. С. 33–36.

6. *Алексеев В. Б.* О замкнутых классах в частичной k-значной логике, содержащих класс монотонных функций // Дискретн. матем. 2018. 30, вып. 2. С. 3–13.

7. *Дудакова О. С.* Построение бесконечного семейства классов частичных монотонных функций многозначной логики // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. Принято к печати.

8. *Дудакова О. С.* О структуре решетки классов частичных монотонных функций шестизначной логики // Труды *X* Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.). М.: МАКС Пресс, 2018. С. 114–116.

9. *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. 3. P. 211–218.